Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2013

Задача 1. Да се сравнят числата 2^{233} и 5^{100}.

Йонуц Иванеску, Крайова, Румъния

Решение: За първото число, като използваме неравенството на Бернули, имаме:

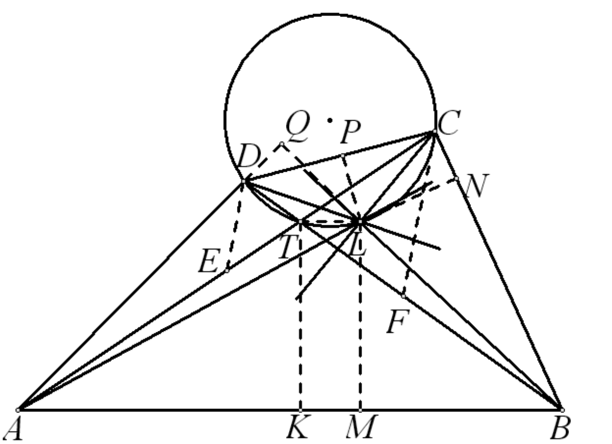
$$2^{233}=2^3.2^{230}=8.\left(2^{10}\right)^{23}=8.1024^{23}=8.\left[1000\left(1+\frac{24}{1000}\right)\right]^{23}>8.10^{69}.\left(1+23.\frac{24}{1000}\right)=$$

$$=8.10^{69}.\left(1+\frac{557}{1000}\right)>8.10^{69}.\left(1+\frac{500}{1000}\right)=8.10^{69}.\frac{3}{2}=12.10^{69}>10.10^{69}=10^{70}.$$

От еквивалентните неравенства $128>125 \Leftrightarrow 2^7>5^3 \Leftrightarrow 2^7.5^7>5^{10} \Leftrightarrow 10^7>5^{10} \Leftrightarrow 10^{70}>5^{100}$ следва, че $2^{233}>5^{100}$.

Задача 2. Точките E и F са среди съответно на диагоналите AC и BD на четириъгълника $ABCD$. Ако $\sphericalangle BAE=\sphericalangle ADE$ и $\sphericalangle ABF=\sphericalangle BCF$, да се докаже, че симедианите на триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB съответно през върховете B, C, D и A се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна



Решение: Нека L е пресечната точка на симедианите на ΔABC и ΔBCD съответно през върховете D и C. Означаваме проекциите на точката L върху страните AB, BC, CD и DA съответно с M, N, P и Q, а проекцията на пресечната точка на диагоналите T върху AB – с K. От определението на симедиана и условието имаме $\sphericalangle LDC=\sphericalangle ADE=\sphericalangle BAE$ и $\sphericalangle LCD=\sphericalangle BCF=\sphericalangle ABF$. Тогава $\Delta DLC \sim \Delta ATB$, откъдето $\sphericalangle DLC$

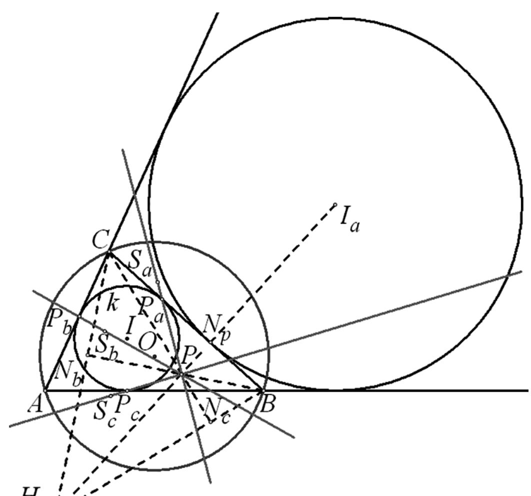
$= \sphericalangle ATB = \sphericalangle DTC$. Следователно четириъгълникът $DLTC$ е вписан в окръжност и $\sphericalangle ATL = \sphericalangle LDC$. От това равенство и $\sphericalangle LDC = \sphericalangle BAE$ следва, че $\sphericalangle ATL = \sphericalangle BAE$, т.е. $LT \parallel AB$. Следователно $TK = LM$. От $\Delta DLC \sim \Delta ATB$ следва $\dfrac{TK}{AB} = \dfrac{LP}{CD}$, откъдето $\dfrac{LM}{AB} = \dfrac{LP}{CD}$. От друга страна по свойството на симедианата имаме $\dfrac{LP}{CD} = \dfrac{LQ}{AD}$ и затова $\dfrac{LM}{AB} = \dfrac{LQ}{AD}$. Получаваме, че L е точка от симедианата на ΔABC през върха A. Аналогично се доказва, че L лежи върху симедианата на ΔABC през върха B. Така установихме, че четирите симедиани се пресичат в една точка.

Задача 3. Вписаната в ΔABC окръжност k се допира до BC, CA и AB съответно в точките P_a, P_b и P_c, а точката P е симетрична на центъра на k спрямо центъра на описаната около ΔABC окръжност.

а) Точките N_b, N_c и N_p са петите на височините на ΔBCP съответно през върховете B, C и P. Ако N_b', N_c' и N_p' са симетрични съответно на N_b, N_c и N_p спрямо съответните среди на страните, върху които лежат N_b, N_c и N_p, да се докаже, че правите BN_b', CN_c' и PN_p' се пресичат в една точка S_a.

б) Ако точките S_b и S_c са определени съответно за триъгълниците CAP и ABP по същия начин, както S_a за ΔBCP, да се докаже, че правите P_aS_a, P_bS_b и P_cS_c минават през една точка.

Сава Гроздев, София, Деко Деков, Стара Загора



Решение: Тъй като правите BN_b, CN_c и PN_p се пресичат в една точка H_a (ортоцентър на ΔBCP), то правите BN_b', CN_c' и PN_p' се пресичат в една точка S_a, която е изотомично спрегнатата с H_a.

Нека I е центърът на вписаната окръжност за ΔABC, а I_a е центърът на външновписаната му окръжност, допираща се до страната BC в точка P_a'. От свойствата на допирателните лесно се вижда, че точките P_a и P_a' са симетрични спрямо средата на BC. Според твърдение 5 от статията

„Няколко хомотетично породени свойства на Фойербаховите конфигурации", публикувана в брой 1, 2014 г. на сп. Математика и информатика, точката P лежи върху правата $I_aP'_a$, т.е. тази права съдържа височината на ΔBCP през върха P (това означава, че $P'_a \equiv N_p$). Следователно изотомичната спрямо ΔBCP на височината PP'_a е PP_a. От друга страна S_a е изотомична на ортоцентъра H_a и затова лежи върху PP_a. Следователно точките P, P_a и S_a лежат на една права. Аналогично се вижда колинеарността на тройките точки P, P_b, S_b и P, P_c, S_c. Следователно правите P_aS_a, P_bS_b и P_cS_c се пресичат в точката P.