Educational Research
Научно–методически статии

МОТИВАЦИЯ ПРИ РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ ЧРЕЗ ПРЕФОРМУЛИРОВКА НА УСЛОВИЯТА

[1]Сава Гроздев, [2]Диана Стефанова
[1]Институт по математика и информатика – БАН
[2]Основно училище „Н. Вапцаров“ – гр. Асеновград

Резюме. В статията се разглежда възможността за заостряне на вниманието на учениците при решаване на задачи чрез преформулиране на условията като задачи-въпроси.

Keywords: problem, pre-formulation, problem-question, solution

Учителят не само трябва да дава готови знания на учениците, но е необходимо умело да организира подходяща познавателна дейност за тяхното усвояване. Учебната практика показва, че от съществено значение е как той успява да въведе темата, да покаже обосновано необходимостта от изучаване на проблемите в нея, да представи връзките с други теми и проблеми. Един от възможните похвати е да поставя въпроси, а също и да предизвиква питания от страна на учениците. Отговорите и обясненията са логическите следствия, които звучат убедително при наличие на конкретност и ясна формулировка в съответните въпроси.

Според Аристотел въпросът възниква тогава, когато има алтернатива, т.е. когато са налице поне две възможности, от които е необходимо да се избере едната. Всяко съждение може да се представи в подходяща форма и да се превърне в предмет на дискусия (Аристотел, 1976). Рене Декарт разглежда въпроса като централен в евристиката. Той съветва всеки, който се стреми да познае истината, да се учи да поставя въпроси и подчертава, че яснотата и определеността във формулировката на въпроса са условия за стигане до откритие. Под въпрос Декарт разбира „всичко, в което изнамираме истина или лъжа“. Във всеки въпрос той отделя три момента: *първи* – въпросът трябва да съдържа нещо неизвестно, иначе става безполезен; *втори* – съответното неизвестно трябва да е отбелязано с нещо, в противен случай липсва направляваща компонента за стигане до верния отговор или съответното откритие; *трети* – въпросът трябва да съдържа и известни неща (Декарт, 1936). По понятието „въпрос“ взимат отношение и други учени: Болцано, Раймунд Луллий и пр. Някои от тях дефинират и типове въпроси.

Философът В. П. Копнин разглежда въпроса като форма на мисленето. Според него въпросът представлява съждение – съобщение, което е база на въпроса. В. Ф. Берков (Берков, 1973) разделя въпросите на въпроси за решаване и въпроси за попълване. В (Казанов & Якушев, 1994) авторите дават други тълкувания на същността на понятието „въпрос“:

1. Въпросът означава задача или проблем, изискващ решение. Решението в този случай е отговорът на въпроса.

2. Въпросът означава мисъл във въпросителна форма. Задачата може да се постави и без да се използва въпросителната форма и т.н.

Анализирайки различни мнения за понятието „въпрос“, Л. М. Фридман (Фридман, 2012) прави следния извод: „Всяка задача е въпрос (това означава, че всяка задача може да се представи във формата на въпрос), но не всеки въпрос е задача. Въпросът е задача тогава, когато в самия въпрос има дадени някакви основания за отговор на въпроса и този отговор изисква от решаващия не само работа на паметта, а главното е да се изпълняват някакви мисловни действия, операции над зададените съждения във въпроса-задача“.

Имайки предвид мнението на Фридман, както и мненията на останалите, в настоящата работа ще споделим вижданията ни във връзка с понятието „въпрос“ и с мястото на въпроса в обучението по математика. В учителската си дейност вторият автор на статията е използвал досега два вида въпроси. Първият се отнася до въпросите, установяващи нивото на усвоените знания, а вторият е свързан с дадени ситуации за математически обекти, които Фридман нарича въпроси-задачи.

Въпросите за установяване на нивото на усвоените знания сме обособили в две групи:

– въпроси, изискващи възпроизвеждане на дадена информация, т.е. изискващи репродуктивен отговор; тях ще наричаме репродуктивни въпроси;

– въпроси, изискващи повече мисловна дейност при търсене на отговора, включително прилагане на методите на познание за сравняване, анализиране, формулиране на хипотези и разсъждаване върху тях, т.е. въпроси, изискващи творческо приложение на знания.

Ето няколко примера на „репродуктивни въпроси“, които сме използвали в своята практика.

Коя права наричаме симетрала на отсечка? Какво гласи Питагоровата теорема? Коя отсечка наричаме медиана в триъгълника? Колко решения има квадратното уравнение с дискриминанта, по-голяма от нула? Какво гласи теоремата на Виет? Какви свойства притежава равностранният триъгълник? Какви свойства имат диагоналите на даден успоредник? На колко е равно $(a + b)^2$? Какво е вероятност? Какво е лихва? Какво е период на функция?

Горните въпроси са използвани в беседи с ученици с цел установяване дали е усвоено дадено знание. Тяхната цел е да активират паметта на ученика.

Творческите въпроси, които сме използвали, притежават отговори, свързани с критично отношение към поставена ситуация, мислено възпроизвеждане на съответно определение и сравнение между определението и ситуацията. В резултат на това се получава отговор (Маврова & Бойкина, 2012). Например:

Винаги ли права през средата на дадена отсечка е симетрала? Възможно ли е отсечки с дължини 3, 4 и 5 сантиметра да са страни на правоъгълен триъгълник? Винаги ли ъгъл, чиито рамене пресичат окръжност, е вписан? (Защо?) Възможно ли е пресечната точка на медианите в даден триъгълник да е център на вписаната в триъгълника окръжност? (Кога се случва това? Защо?) В кой квадрант се намира върхът на параболата $y = 3x^2 - 2x + 5$? Кога едно квадратно уравнение ще има корени с еднакви знаци? Кога центровете на вписаната и описаната окръжност на даден триъгълник съвпадат? (Възможно ли е това да се случи?) Какви стойности приема вероятността на дадено събитие? На колко винаги се дели сборът на едно двуцифрено число и числото, записано със същите цифри, но в обратен ред? Вярно ли е, че два ъгъла са съседни, ако две техни рамена са противоположни лъчи? Може ли страната на ромб да е равна на половината от негов диагонал? Винаги ли права, перпендикулярна на отсечката AA_1, е ос на симетрия на точките A и A_1? Верни ли са в стереометрията следните твърдения, известни от планиметрията: 1. Ако права пресича една от няколко успоредни прави, тя пресича и другите прави. 2. Две прави, перпендикулярни на една и съща права, са успоредни. 3. Ако две прави са перпендикулярни съответно на две пресичащи се прави, то те се пресичат? Вярно ли е, че права, имаща една обща точка с равнина, лежи в тази равнина? Дали числата 2, 20, – 30 и – 31 са членове на редицата с общ член $(n + 2).(-1)^n$ и кой е десетият член на тази редица? Може ли една обикновена дроб, в която числителят е по-малък от знаменателя, да бъде равна на дроб, в която числителят е по-голям от знаменателя?

Тук преобладават и съпътстващи въпроси: Защо? От какво? Какво? Как? Възможно ли е? и т.н. Отговорите на тези или подобни на тях въпроси трябва да дадат пълна характеристика на всички страни и отношения на изучавания обект.

В обучението на ученици сме използвали упражнения, в които се изисква намиране на ситуация за определен(и) обект(и) и упражнения за представяне на дадена задача под формата на въпрос. Вторият вид упражнения има за цел да покаже доколко учениците са осмислили съответната задача. При първия вид упражнения сме използвали ситуации като следната:

1. Дължините на страните на триъгълник са 12, 10 и 14 сантиметра. Поставете въпрос и решете задачата.

Тук учениците в зависимост от нивото на знанията си поставят различни въпроси. Например: На колко е равна медианата към най-голямата страна на триъгълника? Или: На колко е равен ъгълът между страните с дължини 12 и 10 сантиметра? И т. н.

Аналогично постъпихме и със следните примери:

2. Дължините на страните на успоредник са 6 и 8 сантиметра, а ъгълът между тези страни е 30^0. Поставете въпрос и решете задачата.

Въпросите на учениците бяха различни: Колко квадратни сантиметра е лицето на успоредника? Какви са дължините на диагоналите на успоредника? На колко е равен ъгълът между диагоналите на успоредника? И т.н.

3. Даден е ромб със страна a и остър ъгъл 60^0. Поставете въпрос и решете задачата.

Поставени бяха въпросите: На колко е равно отношението на диагоналите на ромба? Колко е лицето на ромба? Колко е радиусът на вписаната окръжност в ромба? И т.н.

4. Дадено е уравнението $|x^2 - 5x + 6| = ax$. Поставете въпрос и решете задачата.

На тази задача получихме следния въпрос: Колко на брой са корените на уравнението в зависимост от параметъра a?

Вторият вид упражнения са свързани с дейността „преформулиране на задача в задача-въпрос“. Например:

Задача 1: Към две непресичащи се окръжности с радиуси 4 и 6 сантиметра са построени общите им вътрешни допирателни, които са перпендикулярни. Намерете разстоянието между центровете на тези окръжности.

За да се установи доколко съдържанието на дадената задача е осмислено от учениците, може да се постави изискване към тях да формулират задачата във вид на въпрос. С подобен подход се цели постигане на психологически ефект. Самото изискване за преформулировка създава условия за осмисляне и мотивира търсенето на отговор. За конкретната задача формулировката на въпроса има следния вид: Колко е разстоянието между центровете на две непресичащи се окръжности с радиуси 4 и 6 сантиметра, чиито общи вътрешни допирателни са перпендикулярни?

Задача 2: Изчислете стойността на израза

$$\left(\frac{1-2.17,3^3}{1+17,3^3}\right)^3+\left(\frac{17,3(2-17,3^3)}{1+17,3^3}\right)^3+17,3^3.$$

След преформулиране на задачата в задача-въпрос тя става: На колко е равна стойността на израза $\left(\frac{1-2.17,3^3}{1+17,3^3}\right)^3+\left(\frac{17,3(2-17,3^3)}{1+17,3^3}\right)^3+17,3^3$?

Задача 3: В един кашон са поставени еднакви по размер и маса жълти, сини и червени топчета. Вероятността да се извади жълто топче е $\frac{1}{3}$, а синьо – съответно $\frac{2}{5}$. Ако броят на червените топчета е 12, пресметнете броя на всички топчета в кашона.

След осмисляне на условието на задачата от учениците тя бе преформулирана по следния начин: Колко на брой са жълтите, сините и червените топчета в един кашон, ако всичките са с еднакви размери и маси, като вероятността да се извади жълто топче е $\frac{1}{3}$, вероятността да се извади синьо топче е съответно $\frac{2}{5}$, а броят на червените топчета е 12?

Задача 4: Четириъгълникът *ABCD* е вписан в окръжност и описан около окръжност. Ако $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBA = 30^0$ и $AC = 4$ сантиметра, намерете сбора от радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците *ABC* и *ACD*.

Възможна преформулировка на тази задача е следната: Ако четириъгълникът *ABCD* с $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBA = 30^0$ и $AC = 4$ сантиметра е вписан в окръжност и описан около окръжност, на колко е равен сборът от радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците *ABC* и *ACD*,?

Задача 5: Даден е правоъгълен паралелепипед, размерите на който са цели числа (измерени в метри). Числените стойности на сумата от размерите (измерени в метри) и обема (измерен в кубични метри) са равни. Намерете измеренията на паралелепипеда.

Промяната, която извършиха учениците по тази задача, е следната: Какви са измеренията на правоъгълен паралелепипед, ако те са цели числа (измерени в метри), а числените стойности на сумата от размерите (измерени в метри) и обема (измерен в кубични метри) са равни?

Дадените задачи се преформулират като задачи-въпроси (по Фридман), а упражненията имат творчески характер. Ясно е, че всяка задача може да се преформулира под формата на въпрос. Това е вярно дори за задачите за доказателство и построение, като в първия случай може да се използва въпросът „Вярно ли е, че…?“, след което следва подлежащото на доказване твърдение. Във втория случай може да се използва въпросът „Може ли да се построи…?“ и т.н. Разбира се, самият въпрос може да се окаже сложен, но по-важното в случая е условието да бъде осъзнато от учениците и те да получат необходимата мотивация за търсене на съответно решение. Самата работа по текста на задачата е полезна за детайлно запознаване с информацията в условието, без което е невъзможно да се очаква успешно решение. Не без значение е и предизвикването на интерес у учениците да свършат нещо, което на пръв поглед не е свързано с математика. Постигането на успех при формулировката се превръща в стимул за търсене на пътя към крайния резултат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аристотел (1976). *Метафизика*. Изд. „Мисъл“.
2. Берков, В. (1973). *Вопрос как форма мысли*. Минск.
3. Декарт, Р. (1936). *Правила для руководства ума*. Москва, 128 – 132.
4. Казанов, А. & Якушев, А. (1994). *Логика 1. Парадоксология*. Москва.
5. Копнин, В. (1963). *Идея как форма мышления*. Киев.
6. Маврова, Р. & Бойкина, Д. (2012). *Актуални проблеми на методиката на обучението по математика – активност, самостоятелност, творчество*. Пловдив: УИ „П. Хилендарски“ (ISBN 978-954-423-810-0).
7. Фридман, Л. (2012). *Основы проблемологии*. Москва: Либроком (ISBN 978-5-397-03342-8).

REFERENCES:

1. Aristotel (1976). Metafizika. Izd. „Misal“.
2. Berkov, V. (1973). Vopros kak forma maysli. Minsk.
3. Dekart, R. (1936). Pravila dlya rukovodstva uma. Moskva, 128 – 132.
4. Kazanov, A. & Yakushev, A. (1994). Logika 1. Paradoksologiya. Moskva.
5. Kopnin, V. (1963). Ideya kak forma mayshleniya. Kiev.
6. Mavrova, R. & Boykina, D. (2012). Aktualni problemi na metodikata na obuchenieto po matematika – aktivnost, samostoyatelnost, tvorchestvo. Plovdiv: UI „P. Hilendarski“ (ISBN 978-954-423-810-0).
7. Fridman, L. (2012). Osnovay problemologii. Moskva: Librokom (ISBN 978-5-397-03342-8).

MOTIVATION IN PROBLEM SOLVING BY TASK PREFORMULATION

Abstract. The paper considers a possibility to intensify students’ attention in problem solving by a task pre-formulation to problem-questions.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Primary School “Nikola Vaptsarov”
Assenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg