

НЯКОЛКО СВОЙСТВА НА ЕДИН ВИД КРИВИ, ПОРОДЕНИ ОТ ТОЧКА НА НАГЕЛ

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Институт по математика и информатика – БАН

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата статия е описано обобщение на една геометрична задача от международната олимпиада по математика през 2013 г.

Keywords: triangle, conic, Ceva circle, Ceva curve, Feuerbach configuration, Nagel point, GSP.

За някои геометрични твърдения може да се каже, че притежават естествени обобщения. Често най-естественото обобщение е скрито в особено построение, което съдържа някои специални конструкции. Пример за такова твърдение е следната задача от международната олимпиада по математика през 2013 г.: *Външно-вписаните окръжности $\Gamma_a(I_a)$, $\Gamma_b(I_b)$ и $\Gamma_c(I_c)$ на $\triangle ABC$ се допират до страните му BC , CA и AB съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Да се докаже, че ако центърът на описаната около $\triangle A_1B_1C_1$ окръжност k лежи върху описаната окръжност $\Gamma(O)$ на $\triangle ABC$, то $\triangle ABC$ е правоъгълен.* (Гроздев&Ненков, 2013)

Допирните точки на $\Gamma_a(I_a)$, $\Gamma_b(I_b)$ и $\Gamma_c(I_c)$ съответно с BC , CA и AB , свързани със срещуположните им върхове, образуват чевиани, които се пресичат в добре познатата точка на Нагел за $\triangle ABC$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Освен това всяко описано за $\triangle ABC$ конично сечение се свързва с еднозначно определени вписани в $\triangle ABC$ конични сечения, които също определят точки на Нагел. Конструкцията, съдържаща тези конични сечения, наричаме Фойербахова конфигурация (Ненков, 2010).

От друга страна, петите на чевианите през произволна точка P от равнината на $\triangle ABC$ лежат на една окръжност – наричаме я окръжност на Чева. Тази окръжност пресича за втори път страните на $\triangle ABC$ в точки, които, свързани със срещуположните им върхове, образуват чевиани през точка P' (Хитов, 1990). По отношение на произволно описано за $\triangle ABC$ конично сечение $\bar{k}(O)$ чрез специална конструкция на всяка точка P еднозначно може да се съпостави точка P' , така че петите на чевианите през точките P и P' определят конично сечение,

което наричаме крива на Чева за точката P (и P'). Когато $\bar{k}(O)$ съвпадне с описаната за $\triangle ABC$ окръжност, кривата на Чева преминава в окръжността на Чева за точките P и P' (Гроздев & Ненков, 2014).

Въз основа на тези две наблюдения можем да очакваме, че най-естественото обобщение на олимпиадната задача се получава при разглеждане на кривата на Чева за точка на Нагел в подходяща Фойербахова конфигурация. Затова в началото трябва да припомним какво по-точно определяме като Фойербахова конфигурация и крива на Чева.

Обичайните изследвания, които извършваме върху свойствата на Фойербахови конфигурации и криви на Чева, осъществяваме с помощта на барицентрични координати. Затова в по-нататъшните изследвания ще използваме барицентрични координати спрямо даден $\triangle ABC$, като $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Средите на страните BC , CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Освен това в построяването на коничните сечения и забелязването на някои от техните свойства ще използваме конструктивните и динамични възможности на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP).

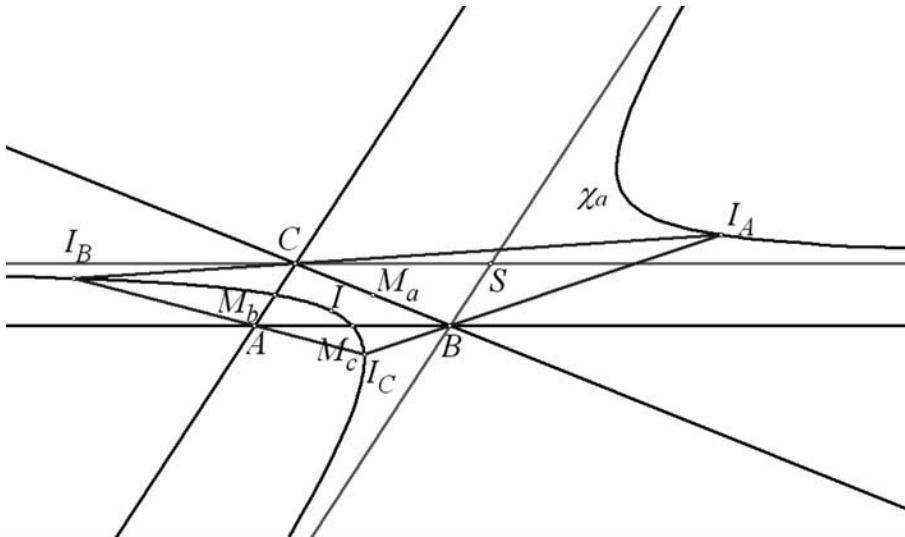
1. Фойербахови конфигурации. Нека $I(x_I, y_I, z_I)$ ($x_I + y_I + z_I = 1$) е произволна точка от равнината на $\triangle ABC$, нележаща на никоя от правите BC , CA , AB , M_bM_c , M_cM_a и M_aM_b . Спрямо $\triangle ABC$ точката I има спрегнат триъгълник $I_A I_B I_C$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Точките $I(x_I, y_I, z_I)$, $I_A\left(-\frac{x_I}{1-2x_I}, \frac{y_I}{1-2x_I}, \frac{z_I}{1-2x_I}\right)$, $I_B\left(\frac{x_I}{1-2y_I}, -\frac{y_I}{1-2y_I}, \frac{z_I}{1-2y_I}\right)$ и $I_C\left(\frac{x_I}{1-2z_I}, \frac{y_I}{1-2z_I}, -\frac{z_I}{1-2z_I}\right)$ са центрове на конични сечения $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$, вписани в $\triangle ABC$. Средите на отсечките $I_A I_B$, $I_B I_C$, $I_C I_A$ и $I_A I_B$ лежат на конично сечение $\bar{k}(O)$, описано за $\triangle ABC$ (Ненков, 2010). От резултатите, получени в (Ненков, 2008), следва, че уравнението на кривата $\bar{k}(O)$ и координатите на центъра ѝ O са съответно следните:

$$(1) \quad \bar{k}(O) : x_I^2 yz + y_I^2 zx + z_I^2 xy = 0,$$

$$(2) \quad O\left(\frac{(1-2x_I-2y_Iz_I)x_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2y_I-2z_Ix_I)y_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{(1-2z_I-2x_Iy_I)z_I^2}{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)}\right).$$

Коничните сечения $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$ са обвързани с редица общи свойства. Поради едно от тях ще казваме, че те са елементи на една *Фойербахова конфигурация* (Ненков, 2010).

Всяка от кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$ чрез центъра си определя еднозначно останалите. Изключения се получават само когато центърът O съвпада с някоя от точките M_a , M_b и M_c . Ако $O \equiv M_a$, коничното сечение $\bar{k}(O)$ не е определено еднозначно от центъра си. Затова ще го определим с помощта на центъра I на съответното му вписано конично сечение $k(I)$. От (2) следва, че $O \equiv M_a$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $1 - 2x_I - 2y_I z_I = 0$. Последното равенство означава, че точката I лежи на хиперболата χ_a , която има уравнение $\chi_a : 1 - 2x - 2yz = 0$ (тази хипербола има за център точката, симетрична на A спрямо M_a , а асимптотите ѝ са успоредни на AC и AB (фиг. 1)). Нека сега I е точка от хиперболата χ_a . Точката I е център на единствено конично сечение $k(I)$, което е вписано в $\triangle ABC$. Освен това точката I има спрямо $\triangle ABC$ спрегнат триъгълник $I_A I_B I_C$. Средите на отсечките $I_A I_B$, $I_B I_C$, $I_C I_A$ и $I_A I_B$ ще лежат на описано около $\triangle ABC$ конично сечение $\bar{k}(M_a)$, което има за център точката M_a . Обратно, на така получената крива $\bar{k}(M_a)$ можем да съпоставим кривата $k(I)$, от която е получена. По този начин получаваме съответствие между вписаните конични сечения $k(I)$ с центрове върху хиперболата χ_a и описаните



Фигура 1

конични сечения с център M_a . Освен това след заместване на координатите на точките I_A , I_B и I_C в уравнението на \mathcal{X}_a , лесно се установява, че те също лежат на \mathcal{X}_a (фиг. 1). Следователно всяка от тези точки поражда същата крива $\bar{k}(M_a)$, както и точката I . Така всяка от точките I , I_A , I_B и I_C поражда по единствен начин кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(M_a)$. Поради специалните положения, които имат центровете на кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(M_a)$, ще казваме, че те са елементи на *специална Фойербахова конфигурация*.

По аналогичен начин се получават специални Фойербахови конфигурации, в които участват описани за $\triangle ABC$ конични сечения с центрове точките M_b и M_c . Когато кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$ са елементи на Фойербахова конфигурация, за която $O \notin \{M_a, M_b, M_c\}$, ще казваме още, че разглеждаме *обща Фойербахова конфигурация*. Тъй като произволна Фойербахова конфигурация може да се разглежда като породена само от точката I (център на вписана в $\triangle ABC$ крива), то всички аналитични резултати ще зависят само от координатите на I . Затова произволна специална Фойербахова конфигурация притежава всички свойства, които имат общите Фойербахови конфигурации. Тъй като за една специална Фойербахова конфигурация е изпълнено едно от равенствата $1 - 2x_I - 2y_I z_I = 0$, $1 - 2y_I - 2z_I x_I = 0$, $1 - 2z_I - 2x_I y_I = 0$, тя притежава и по-специални свойства. Такова специално и основно свойство е, че по отношение на специалните Фойербахови конфигурации всеки триъгълник се държи като правоъгълен триъгълник. Този факт ясно ще се прояви в обобщението на олимпиадната задача.

2. Крива на Чева за точка на Нагел. Нека кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$ са елементи на една Фойербахова конфигурация и $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ се допират до BC , CA и AB съответно в точките

$$A_1\left(0, \frac{1-2y_I}{2x_I}, \frac{1-2z_I}{2x_I}\right), B_1\left(\frac{1-2x_I}{2y_I}, 0, \frac{1-2z_I}{2y_I}\right), C_1\left(\frac{1-2x_I}{2z_I}, \frac{1-2y_I}{2z_I}, 0\right).$$

Правите AA_1 , BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка $N(1-2x_I, 1-2y_I, 1-2z_I)$, която ще наричаме *точка на Нагел за $\triangle ABC$ спрямо тройката криви $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$* (Ненков, 2010). По аналогичен начин спрямо тройките криви $k(I)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$; $k(I)$, $k(I_C)$ и $k(I_A)$; $k(I)$, $k(I_A)$ и $k(I_B)$ се получават точките на Нагел $N_A\left(\frac{1}{1-2x_I}, \frac{2z_I-1}{1-2x_I}, \frac{2y_I-1}{1-2x_I}\right)$, $N_B\left(\frac{2z_I-1}{1-2y_I}, \frac{1}{1-2y_I}, \frac{2x_I-1}{1-2y_I}\right)$, $N_C\left(\frac{2y_I-1}{1-2z_I}, \frac{2x_I-1}{1-2z_I}, \frac{1}{1-2z_I}\right)$ (Ненков, 2010). Ще обърнем специално внимание

на точката N , защото останалите точки на Нагел се получават, като заменим вписаната крива $k(I)$ с $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$. От резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2014), е известно, че през точките A_1 , B_1 и C_1 минава крива от втора степен, уравнението на която може да се запише по следния начин

$$\bar{c}_N : k(x_I^2 y z + y_I^2 z x + z_I^2 x y) + (a_{11} x + a_{22} y + a_{33} z)(x + y + z) = 0,$$

където

$$k = \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)(1-4x_I)(1-4y_I)(1-4z_I)}{4x_I y_I z_I},$$

$$a_{11} = (1-2y_I)(1-2z_I)[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)],$$

$$a_{22} = (1-2z_I)(1-2x_I)[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)],$$

$$a_{33} = (1-2x_I)(1-2y_I)[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)].$$

Кривата \bar{c}_N наричаме *крива на Чева за точката на Нагел N* . Кривата на Чева \bar{c}_N , както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), пресича за втори път правите BC , CA , AB съответно в точките

$$A_2 \left(0, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)}{2x_I(1-2y_I)(1-2z_I)}, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)}{2x_I(1-2y_I)(1-2z_I)} \right),$$

$$B_2 \left(\frac{4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)}{2y_I(1-2z_I)(1-2z_I)}, 0, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)}{2y_I(1-2z_I)(1-2z_I)} \right),$$

$$C_2 \left(\frac{4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)}{2z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}, \frac{4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)}{2z_I(1-2x_I)(1-2y_I)}, 0 \right).$$

Тези точки заедно с върховете определят правите AA_2 , BB_2 и CC_2 , които минават през една точка N' , чиито координати се изразяват по следния начин:

$$x_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)][4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$y_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)][4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1},$$

$$z_{N'} = \frac{[4x_I y_I z_I - (1-2y_I)(1-2z_I)][4x_I y_I z_I - (1-2z_I)(1-2x_I)]}{48x_I^2 y_I^2 z_I^2 - 32x_I y_I z_I (y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) + 4(y_I z_I + z_I x_I + x_I y_I) - 1}.$$

Относно координатите на центъра $O(N)$ на кривата на Чева \bar{c}_N в (Гроздев & Ненков, 2014) е показано, че те се определят с равенствата

$$\begin{aligned}
 x_{O(N)} &= \frac{x_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \left\{ x_I(1-2x_I)^2(1-2y_I)(1-2z_I) + \right. \\
 &+ \left. [(1-2y_I-2z_Ix_I)(1-2z_I-2x_Iy_I) - x_I(1-2y_I)(1-2z_I)](1-2x_I-2y_Iz_I) \right\}, \\
 y_{O(N)} &= \frac{y_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \left\{ y_I(1-2y_I)^2(1-2z_I)(1-2x_I) + \right. \\
 &+ \left. [(1-2z_I-2x_Iy_I)(1-2x_I-2y_Iz_I) - y_I(1-2z_I)(1-2x_I)](1-2y_I-2z_Ix_I) \right\}, \\
 z_{O(N)} &= \frac{z_I}{(1-2x_I)^2(1-2y_I)^2(1-2z_I)^2} \times \left\{ z_I(1-2z_I)^2(1-2x_I)(1-2y_I) + \right. \\
 &+ \left. [(1-2x_I-2y_Iz_I)(1-2y_I-2z_Ix_I) - z_I(1-2x_I)(1-2y_I)](1-2z_I-2x_Iy_I) \right\}.
 \end{aligned}$$

Едно забележително свойство на центъра на кривата на Чева \bar{c}_N е, че при произволна Фойербахова конфигурация той лежи върху правата, определена от точките N и N' (Гроздев & Ненков, 2014). В следващия пункт ще покажем още едно свойство на центъра $O(N)$, което е свързано със специалните Фойербахови конфигурации и една специална крива от трета степен в равнината на $\triangle ABC$.

3. Необходими и достатъчни условия центърът $O(N)$ да лежи върху описаната крива $\bar{k}(O)$. Едно обобщение на формулираната в началото задача е направено в (Гроздев & Ненков, 2013). Сега ще покажем обобщение, в което основните геометрични елементи се обхващат по естествен начин от специални Фойербахови конфигурации. Нека N е точка на Нагел, принадлежаща на Фойербахова конфигурация, съдържаща кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$, $k(I_C)$ и $\bar{k}(O)$, а \bar{c}_N е съответната ѝ крива на Чева. От (1) следва, че центърът $O(N)$ на \bar{c}_N ще лежи върху $\bar{k}(O)$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

$$x_I^2 y_{N(O)} z_{N(O)} + y_I^2 z_{N(O)} x_{N(O)} + z_I^2 x_{N(O)} y_{N(O)} = 0.$$

След заместване в това равенство на координатите на центъра $N(O)$ получаваме

$$\begin{aligned}
 &\frac{x_I y_I z_I}{(1-2x_I)^3(1-2y_I)^3(1-2z_I)^3} \times \\
 &\times [2x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)](1-2x_I-2y_I z_I)(1-2y_I-2z_I x_I)(1-2z_I-2x_I y_I) = 0.
 \end{aligned}$$

Последното равенство показва, че е изпълнено следното

Твърдение 1. *Една Фойербахова конфигурация за $\triangle ABC$ притежава точка на Нагел, чиято крива на Чева има за център точка от описаната крива, тогава и само тогава, когато един от центровете на вписаните в $\triangle ABC$ криви лежи*

върху някоя от кривите: $K : 2xyz - (1-2x)(1-2y)(1-2z) = 0$, $\chi_a : 1-2x-2yz = 0$, $\chi_b : 1-2y-2zx = 0$, $\chi_c : 1-2z-2xy = 0$.

От Твърдение 1 се получават някои интересни следствия. Първо да отбележим, че видът на кривата $\bar{k}(O)$ се определя от общите решения на уравнението \bar{y} (1) и уравнението на безкрайната права $x + y + z = 0$. От тези уравнения се получава $y_I^2 x^2 + (x_I^2 + y_I^2 - z_I^2)xy + x_I^2 y^2 = 0$. Последното уравнение има реални решения само когато изразът $D = -(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)$ е положителен. В тези случаи $\bar{k}(O)$ е хипербола, а в останалите – елипса. Ако $I \in K$, то е изпълнено $D = -2x_I y_I z_I$. От друга страна, точките от K , които са различни от M_a, M_b и M_c , имат една отрицателна и две положителни координати (фиг. 2). Следователно, когато $I \in K$, кривата $\bar{k}(O)$ е хипербола. Така получаваме следното

Следствие 1. Ако $I \in K$, то съответната Фойербахова конфигурация за ΔABC се състои от хиперболи (фиг. 2).

Оттук следва още

Следствие 2. Ако една Фойербахова конфигурация за ΔABC не е специална и се състои от елипси, тя не притежава точка на Нагел, чиято крива на Чева има за център точка от описаната крива $\bar{k}(O)$.

От следствие 2 непосредствено се получава

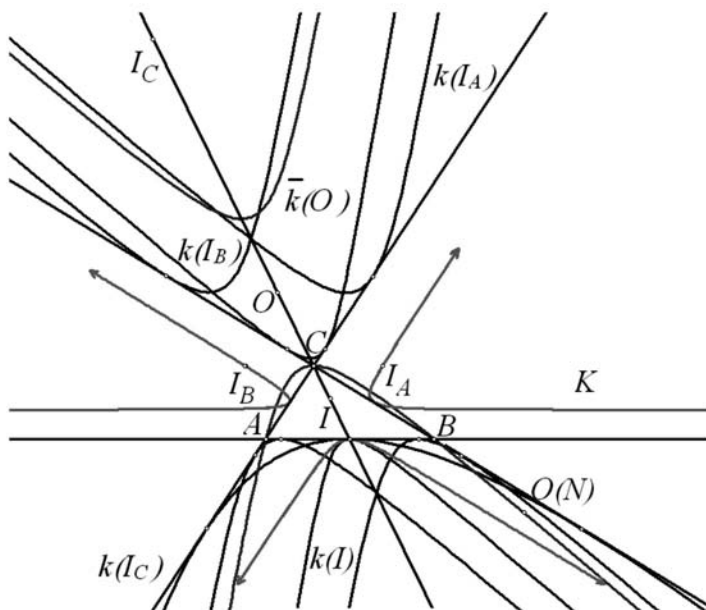
Следствие 3. Ако центърът O на описаната окръжност $\bar{k}(O) \equiv \Gamma(O)$ не лежи върху страна на ΔABC , съответната Фойербахова конфигурация за ΔABC , състояща се от окръжности, не притежава точка на Нагел, чиято окръжност на Чева има център, лежащ на $\bar{k}(O)$.

Ако $I \in K$, можем да предположим, че някоя от точките I_A, I_B и I_C също лежи върху K . Това е възможно, когато освен $2x_I y_I z_I - (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I) = 0$ е изпълнено и поне едно от равенствата $2x_I y_I z_I + (1-2y_I)(1-2z_I) = 0$, $2x_I y_I z_I + (1-2z_I)(1-2x_I) = 0$, $2x_I y_I z_I + (1-2x_I)(1-2y_I) = 0$. Лесно се проверява, че от тези четири равенства едновременно могат да бъдат изпълнени най-много две. Следователно

Следствие 4. Ако $I \in K$, то съответната Фойербахова конфигурация за ΔABC притежава най-много две точки на Нагел, чиито криви на Чева имат центрове, лежащи върху описаната крива $\bar{k}(O)$.

В случай че I_A и I_B са двете точки, лежащи върху K (фиг. 2), то центровете на вписаните криви координатно се представят по следния начин:

$$I \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}, \frac{-2+\sqrt{6}}{2}, 3-\sqrt{6} \right), \quad I_A \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 1 \right), \quad I_B \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 1 \right),$$



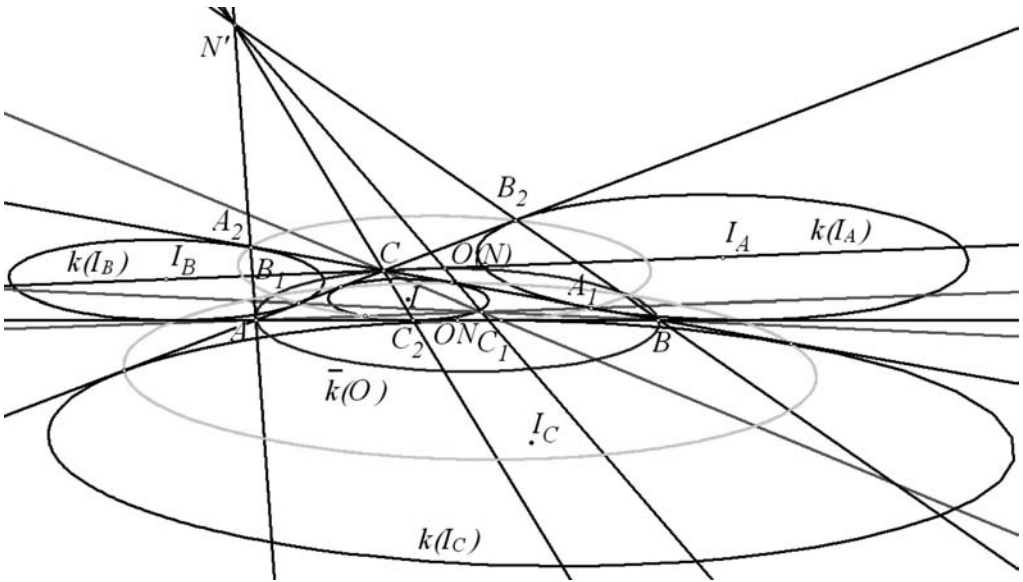
Фигура 2

$I_C \left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \frac{-2-\sqrt{6}}{2}, 3+\sqrt{6} \right)$ или $I \left(\frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \frac{-2-\sqrt{6}}{2}, 3+\sqrt{6} \right)$, $I_A \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 1 \right)$,
 $I_B \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, 1 \right)$, $I_C \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}, \frac{-2+\sqrt{6}}{2}, 3-\sqrt{6} \right)$. От тези координати се вижда, че
 точките I_A и I_B лежат на правата през върха C , която е успоредна на AB . Освен
 това тези точки са равно отдалечени от C .

Нека сега точката I лежи върху някоя от хиперболите χ_a , χ_b или χ_c . Тогава породената от I Фойербахова конфигурация за $\triangle ABC$ е специална. Както беше отбелязано, в този случай точките I_A , I_B и I_C лежат върху същата хипербола. Така от твърдение 1 непосредствено се получава търсеното естествено обобщение на формулираната в началото задача във вид на следното

Следствие 5. За произволна специална Фойербахова конфигурация за $\triangle ABC$ всяка точка на Нагел има крива на Чева, центърът на която лежи върху описаната крива $\bar{k}(O)$ (Фиг. 3).

От следствие 5 и следствие 3 се вижда, че олимпиадната задача (за класическата точка на Нагел) се уточнява в следното



Фигура 3

Следствие 6. *Центърът на окръжността на Чева за точката на Нагел лежи върху описаната окръжност на $\triangle ABC$ тогава и само тогава, когато $\triangle ABC$ е правоъгълен.*

Тъй като всяка Фойербахова конфигурация притежава четири точки на Нагел, от следствие 5 можем да останем с впечатление, че за произволна специална Фойербахова конфигурация точките на Нагел имат четири криви на Чева, центровете на които лежат върху $\bar{k}(O)$. Оказва се обаче, че тези криви са две. За да обосновем това, ще уточним положението на центъра на кривата на Чева за точката на Нагел N върху $\bar{k}(O)$, когато $I \in \chi_c$. В този случай е изпълнено равенството $1 - 2z_I - 2x_I y_I = 0$.

След заместване на последното равенство в координатите на центъра $O(N)$ получаваме

$$O(N) \left(\frac{x_I(-x_I + y_I)}{(1 - 2x_I)(1 - 2y_I)}, \frac{y_I(-y_I + x_I)}{(1 - 2x_I)(1 - 2y_I)}, \frac{z_I^2}{(1 - 2x_I)(1 - 2y_I)} \right).$$

Но точката, която има такива координати, е средата на отсечката $I_A I_B$. Следователно $O(N)$ е средата на $I_A I_B$ (фиг. 3). След заместване на същото равенство в координатите на N' получаваме

$$N' \left(\frac{2y_I - 1}{1 - 2z_I}, \frac{2x_I - 1}{1 - 2z_I}, \frac{1}{1 - 2z_I} \right), \text{ т.е. } N' \equiv N_C.$$

имат обща крива на Чева \bar{c}_N , чийто център е средата на $I_A I_B$ (Фиг. 3). Отгук следва още, че точките $A_2 \left(0, \frac{2x_I - 1}{2x_I}, \frac{1}{2x_I} \right)$, $B_2 \left(\frac{2y_I - 1}{2y_I}, 0, \frac{1}{2y_I} \right)$ и $C_2 \left(\frac{1 - 2y_I}{2z_I}, \frac{1 - 2x_I}{2z_I}, 0 \right)$ са допирните точки на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I)$ съответно с правите BC , CA и AB (фиг. 3). Сега, ако в горните разсъждения заменим точката I с I_A (или I_B), получаваме, че точките на Нагел N_A и N_B имат обща крива на Чева \bar{c}_N , чийто център е средата на отсечката II_C . Кривата \bar{c}_N минава през останалите шест допирни точки на кривите $k(I)$, $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$ с правите BC , CA и AB , които не принадлежат на \bar{c}_N (фиг. 3). Освен това центровете на \bar{c}_N и \bar{c}_N са диаметрално противоположни точки за описаната крива $\bar{k}(O)$.

Последните резултати обобщаваме в следващите следствия.

Следствие 7. При всяка специална Фойербахова конфигурация за ΔABC центърът на кривата на Чева за произволна точка на Нагел е средата на някоя от отсечките $I_A I_B$, $I_B I_C$, $I_C I_A$, II_A , II_B и II_C .

Следствие 8. Ако $I \in \chi_c$, то допирните точки на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I)$ съответно с правите BC , CA и AB лежат на кривата на Чева \bar{c}_N .

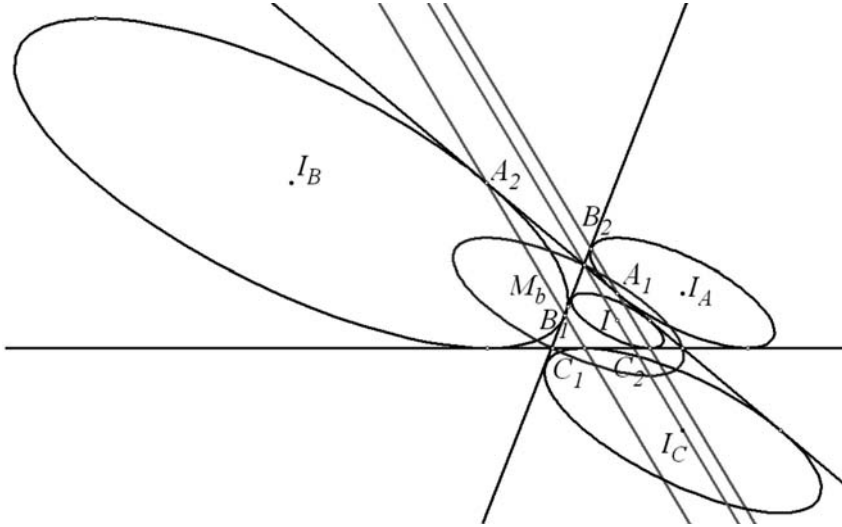
Следствие 9. Ако $I \in \chi_c$, то точките на Нагел N и N_C имат обща крива на Чева \bar{c}_N .

Следствие 10. При всяка специална Фойербахова конфигурация за ΔABC точките на Нагел имат две криви на Чева, центровете на които са диаметрално противоположни точки за описаната крива $\bar{k}(O)$.

4. Едно обобщение на кривата на Чева за точка на Нагел. От следствие 8 се вижда, че когато $O \equiv M_c$, допирните точки A_2 , B_2 и C_2 на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I)$ съответно с правите BC , CA и AB лежат на кривата на Чева \bar{c}_N за точката на Нагел N , минаваща през допирните точки A_1 , B_1 и C_1 на $k(I_A)$, $k(I_B)$ и $k(I_C)$ съответно с правите BC , CA и AB . От друга страна, при произволна Фойербахова конфигурация двете тройки точки A_1 , B_1 , C_1 и A_2 , B_2 , C_2 са пети на две тройки чевиани за ΔABC , минаващи през точките на Нагел N и N_C . Но в (Гроздев & Ненков, 2009) е показано, че шест точки от страните на триъгълник с тези свойства лежат на една крива от втора степен. Следователно е изпълнено следното

Твърдение 2. При произволна Фойербахова конфигурация за ΔABC допирните точки $A_1 \left(0, \frac{1 - 2y_I}{2x_I}, \frac{1 - 2z_I}{2x_I} \right)$, $B_1 \left(\frac{1 - 2x_I}{2y_I}, 0, \frac{1 - 2z_I}{2y_I} \right)$, $C_1 \left(\frac{1 - 2x_I}{2z_I}, \frac{1 - 2y_I}{2z_I}, 0 \right)$,

$A_2\left(0, \frac{2x_l-1}{2x_l}, \frac{1}{2x_l}\right)$, $B_2\left(\frac{2y_l-1}{2y_l}, 0, \frac{1}{2y_l}\right)$, $C_2\left(\frac{1-2y_l}{2z_l}, \frac{1-2x_l}{2z_l}, 0\right)$ лежат на една крива от втора степен $K(N, N_C)$.



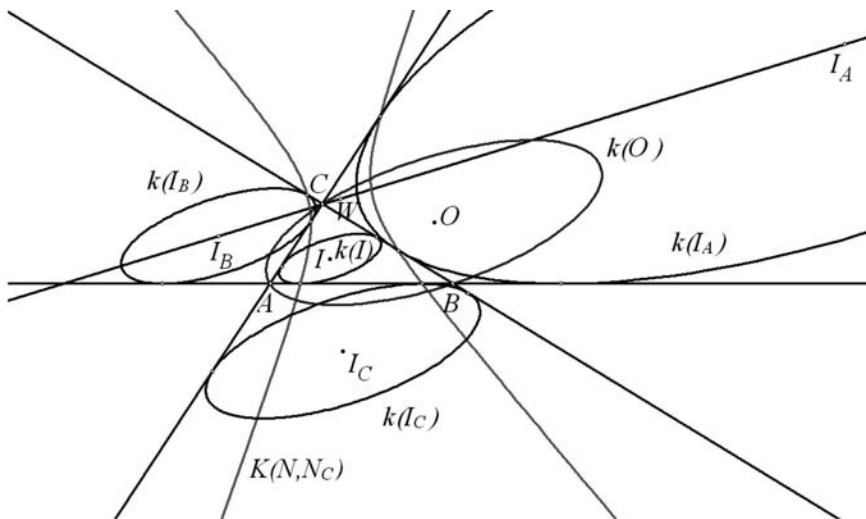
Фигура 4

От координатите на точките на Нагел $N(1-2x_l, 1-2y_l, 1-2z_l)$ и $N_C\left(\frac{2y_l-1}{1-2z_l}, \frac{2x_l-1}{1-2z_l}, \frac{1}{1-2z_l}\right)$, както и от резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2009), следва, че уравнението на кривата $K(N, N_C)$ може да се представи по следния начин $K(N, N_C)$:

$$\begin{aligned} & (1-2x_l)(1-2y_l)(1-2z_l)x^2 + (1-2x_l)(1-2y_l)(1-2z_l)y^2 - \\ & - (1-2x_l)^2(1-2y_l)^2z^2 - 2(1-2x_l)(1-2y_l)(1-2y_l-2z_lx_l)yz - \\ & - (1-2x_l)(1-2y_l)(1-2x_l-2y_lz_l)zx - \left[(1-2x_l)^2 + (1-2y_l)^2\right](1-2z_l)xy = 0. \end{aligned}$$

Всъщност след заместване на координатите на точките A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 и C_2 в последното уравнение непосредствено се установява, че тези точки лежат на кривата $K(N, N_C)$. По този начин получаваме още едно доказателство на твърдение 2.

Нека сега забележим, че от координатите на точките A_1, B_1, A_2 и B_2 се получават векторните равенства $\overline{A_2B_1} = \frac{1-2x_l}{2x_ly_l} \overline{C_1I}$ и $\overline{B_2A_1} = \frac{1-2y_l}{2x_ly_l} \overline{C_1I}$. Следователно



Фигура 5

$A_2B_1 \parallel B_2A_1 \parallel CI$. Оттук следва, че ако $K(N, N_C)$ е изродена крива, тя се състои от две успоредни прави. Такива успоредни прави могат да се получат в следните два случая: 1) когато са колинеарни двете тройки точки (A_2, B_1, C_2) и (A_1, B_2, C_1) ; 2) когато са колинеарни двете тройки точки (A_2, B_1, C_1) и (A_1, B_2, C_2) . Според теоремата на Менелай случай 1) е възможен точно когато са изпълнени равенствата $\frac{BA_2}{CA_2} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1$ и $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_2}{AB_2} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$. Пресмятанията показват, че и двете равенства са изпълнени тогава и само тогава, когато е в сила равенството $1 - 2x_I - 2y_I z_I = 0$. Последното, както знаем, е изпълнено тогава и само тогава, когато $O \equiv M_a$. Аналогично се проверява, че случай 2) е възможен тогава и само тогава, когато е в сила равенството $1 - 2y_I - 2z_I x_I = 0$, т.е. тогава и само тогава, когато $O \equiv M_b$ (Фиг. 4). Така получихме следното

Твърдение 3. Кривата $K(N, N_C)$ се състои от две успоредни прави тогава и само тогава, когато $O \equiv M_a$ или $O \equiv M_b$ (фиг. 4).

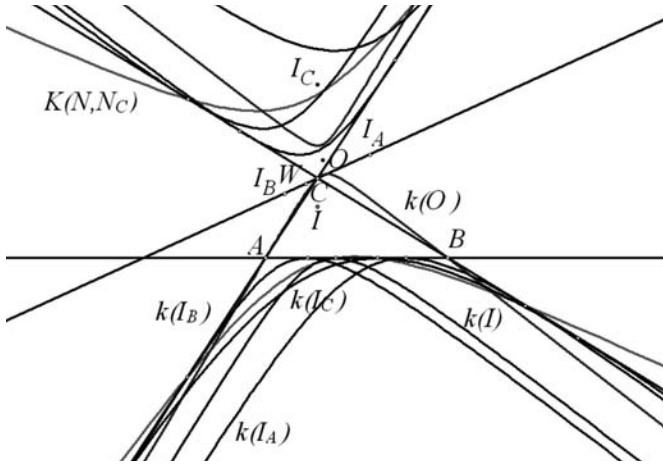
Случаите, в които кривата $K(N, N_C)$ не е изродена, тя притежава еднозначно определен център W . Ако $P\left(\frac{1-2x_I}{4y_I}, \frac{2x_I-1}{4x_I}, \frac{x_I(1-2z_I)+y_I}{4x_I y_I}\right)$ и

$Q\left(\frac{2y_I-1}{4y_I}, \frac{1-2y_I}{4x_I}, \frac{y_I(1-2z_I)+x_I}{4x_I y_I}\right)$ са среди съответно на отсечките A_2B_1 и B_2A_1 ,

то е изпълнено равенството $\overline{PQ} = \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)}{4x_I y_I} \overline{I_A I_B}$. Оттук следва, че точките

P и Q лежат на правата $I_A I_B$. Следователно четириъгълникът $A_1 B_2 A_2 B_1$ е трапец, а правата $I_A I_B$ минава през средите на основите му. Тъй като всяка крива от втора степен, която е описана около трапец, има за център точка, лежаща на правата през средите на основите му, то центърът W на $K(N, N_C)$ лежи върху правата $I_A I_B$. С това установихме следното

Твърдение 4. Центърът W на неизродената крива $K(N, N_C)$ лежи върху правата $I_A I_B$ (Фиг. 5, 6, 7, 8, 9).



Фигура 6

Това свойство на центъра W позволява лесно да определим координатите му.

Нека правата $l: x=t, y = \frac{2x_I-1}{2x_I}t, z = \frac{1}{2x_I}$, която минава през точката A_2 и е успоредна на правата $C_1 C_2 \equiv AB$, пресича за втори път $K(N, N_C)$ в точката A'_2 .

От уравнения на l и $K(N, N_C)$ за координатите на A'_2 намираме

$$A'_2 \left(\frac{(2x_I-1)[(1-2z_I)z_I^2 + (1-2y_I)(x_I^2 - y_I^2)]}{2x_I z_I^2 (1-2z_I)}, \frac{(1-2x_I)(1-2y_I)(x_I^2 - y_I^2)}{2x_I z_I^2 (1-2z_I)}, \frac{1}{2x_I} \right).$$

Сега правата през средите на отсечките $A_2 A'_2$ и $C_1 C_2$ (която е M_c) пресича $I_A I_B$ в центъра W . От уравнения на тези прави намираме координатите на W във вида

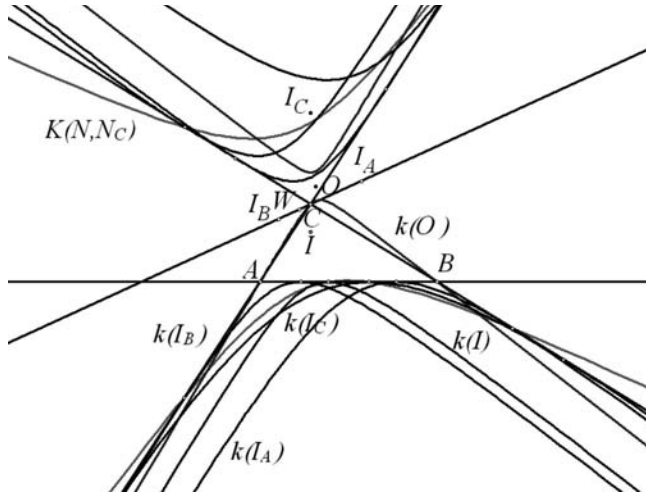
$$x_w = \frac{x_l(1-2x_l)(1-2y_l)(y_l-x_l)}{z_l^2(1-2z_l)-(1-2x_l)(1-2y_l)(x_l-y_l)^2},$$

$$y_w = \frac{y_l(1-2x_l)(1-2y_l)(x_l-y_l)}{z_l^2(1-2z_l)-(1-2x_l)(1-2y_l)(x_l-y_l)^2},$$

$$z_w = \frac{z_l^2(1-2z_l)}{z_l^2(1-2z_l)-(1-2x_l)(1-2y_l)(x_l-y_l)^2}.$$

В твърдение 3 са определени случаите, в които кривата $K(N, N_C)$ е изродена. Тъй като конструкцията на $K(N, N_C)$ е твърде обща, не може да се очаква, че видът ѝ в останалите случаи се определя по прост начин, както в твърдение 3. Наблюденията с GSP обаче показват, че видът на $K(N, N_C)$ запазва известно постоянство в зависимост от положението на центъра O на описаната крива $\bar{k}(O)$. За да определим вида на $K(N, N_C)$, необходимо е да определим броя на общите точки на $K(N, N_C)$ и безкрайната права $x + y + z = 0$. От уравненията на $K(N, N_C)$ и безкрайната права намираме

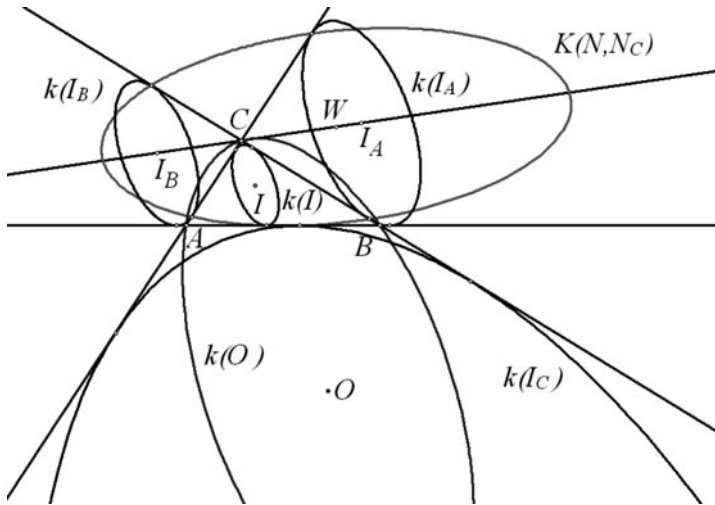
$$2y_l^2(1-2x_l)(1-2y_l)x^2 + 2x_l^2(1-2x_l)(1-2y_l)y^2 - (1-2z_l-2x_ly_l)[(1-2x_l)^2 + (1-2y_l)^2]xy = 0.$$



Фигура 7

Оттук следва, че видът на $K(N, N_C)$ зависи от знака на израза

$$\begin{aligned} \bar{D} &= -4(1-2x_I - 2y_I z_I)(1-2y_I - 2z_I x_I) \times \\ &\times [-(1-2x_I - 2y_I z_I)(1-2y_I - 2z_I x_I) + 4x_I y_I (1-2x_I)(1-2y_I)] = \\ &= -2(1-2x_I - 2y_I z_I)(1-2y_I - 2z_I x_I) \times \\ &\times \left\{ (1-2z_I) \left[(1-2x_I)^2 + (1-2y_I)^2 \right] - 8x_I y_I (x_I - y_I)^2 \right\}. \end{aligned}$$



Фигура 8

Нека $\Delta = (1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)$. От координатите на точката O и първото представяне на \bar{D} получаваме $\bar{D} = -4x_0 y_0 \Delta^2 [-x_0 y_0 \Delta^2 + 4x_I y_I (1-2x_I)(1-2y_I)]$. Ако са изпълнени неравенствата $x_0 < 0$ и $y_0 > 0$, то независимо от знака на Δ е изпълнено $(1-2x_I)(1-2y_I) < 4x_I y_I z_I^2$. Следователно

$$4x_I y_I (1-2x_I)(1-2y_I) = \frac{(1-2x_I)^2 (1-2y_I)^2}{z_I^2} > 0. \text{ Това означава, че } \bar{D} > 0. \text{ Оттук}$$

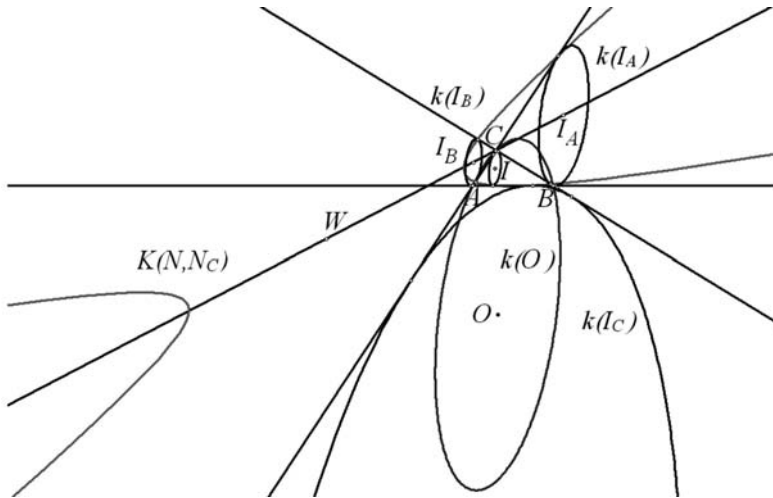
следва, че в този случай $K(N, N_C)$ е хипербола (фиг. 5). Аналогично се получава, че когато $x_0 > 0$ и $y_0 < 0$, кривата $K(N, N_C)$ е хипербола.

Сега да отбележим, че винаги една от точките I, I_A, I_B и I_C е вътрешна за ΔABC . Тъй като всяка от тези точки поражда една и съща Фойербахова конфигурация, то оттук нататък ще смятаме, че точката I е вътрешна за ΔABC . Ако точката I се намира в $\Delta M_a M_b C$, то са изпълнени неравенствата $1 - 2x_I > 0$,

$1-2y_I > 0$, $1-2z_I < 0$, $\Delta < 0$, $1-2x_I-2y_Iz_I = 2y_Iz_I - (1-2y_I)(1-2z_I) > 0$,
 $1-2y_I-2z_Ix_I = 2z_Ix_I - (1-2z_I)(1-2x_I) > 0$. Оттук следва, че ако точката I лежи в $\Delta M_a M_b C$, описаната крива $\bar{k}(O)$ е хипербола, а центърът ѝ O лежи във външната върхова област на точката C , т.е. $x_0 < 0$ и $y_0 < 0$. Сега от второто представяне на \bar{D} получаваме

$$\bar{D} = -4x_0y_0\Delta^2 \left\{ (1-2z_I) \left[(1-2x_I)^2 + (1-2y_I)^2 \right] - 8x_Iy_I(x_I - y_I)^2 \right\} > 0 .$$

Следователно в този случай $K(N, N_C)$ е хипербола (фиг. 6).

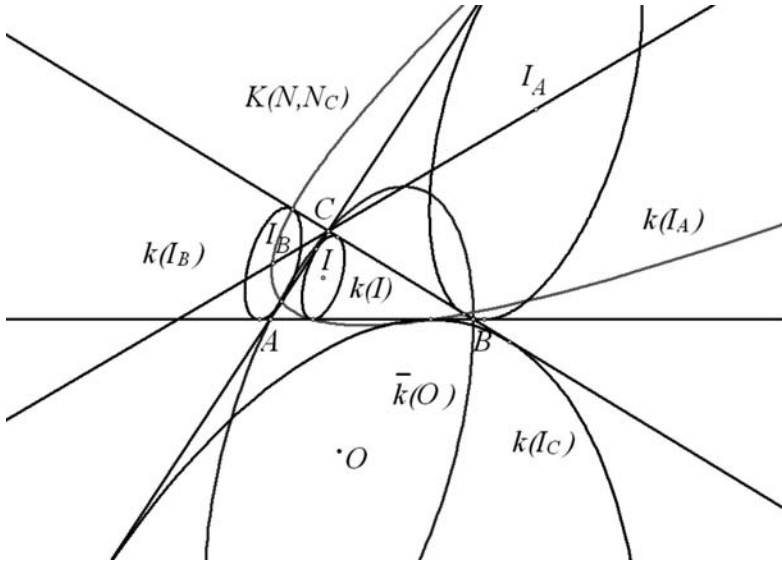


Фигура 9

От последните разглеждания следва, че ако центърът O на описаната крива $\bar{k}(O)$ е вътрешна точка за ΔABC , то точката I не лежи в никой от триъгълниците $M_b M_c A$, $M_c M_a B$ и $M_a M_b C$. Следователно I лежи в $\Delta M_a M_b M_c$ и $x_I < \frac{1}{2}$, $y_I < \frac{1}{2}$, $z_I < \frac{1}{2}$. Тъй като $\Delta > 0$, то от $z_0 > 0$ следва, че $1-2z_I-2x_Iy_I > 0$. Оттук получаваме

$$(1-2z_I) \left[(1-2x_I)^2 + (1-2y_I)^2 \right] - 8x_Iy_I(x_I - y_I)^2 > 4x_Iy_I(1-2x_I)(1-2y_I) > 0 .$$

Сега от второто представяне на \bar{D} получаваме $\bar{D} < 0$. Следователно, когато O е вътрешна точка за ΔABC , кривата $K(N, N_C)$ е елипса (фиг. 7).



Фигура 10

Остава да отбележим, че когато центърът O лежи в областта, при която $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ и $z_0 < 0$, съществуват положения на O , за които $K(N, N_C)$ е елипса (фиг. 8), положения, при които $K(N, N_C)$ е хипербола (фиг. 9), а също така и положения на O , когато $K(N, N_C)$ е парабола (фиг. 10).

Накрая можем да обобщим получените резултати за вида на $K(N, N_C)$ на следващата фигура 11.



Фигура 11

ЛИТЕРАТУРА

1. Гроздев, С., Ненков, В. (2013). Един специален вид криви от втора степен, породени от точката на Нагел, *Математика плюс*, 2, 44 – 53.
1. Гроздев, С., Ненков, В. (2014). Крива на Чева за точка от равнината на триъгълник. *Математика и информатика*, 3, 285 – 298.
2. Гроздев, С., Ненков, В. (2009). Една крива от втора степен за две точки на Чева. *Математика и математическо образование*, 38, 245 – 248.
3. Ненков, В. (2010). Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика*, 5, 42 – 61.
4. Ненков, В. (2008) Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика*, 2, 35 – 42.
5. Паскалев, Г., Чобанов, И. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.
6. Хитов, Х. (1990). *Геометрия на триъгълника*. София: Народна просвета.

REFERENCES:

1. Grozdev, S., Nenkov, V. (2013). Edin spetsialen vid krivi ot vtora stepen, porodeni ot tochkata na Nagel, *Matematika plyus*, 2, 44 – 53.
2. Grozdev, S., Nenkov, V. (2014). Kriva na Cheva za tochka ot ravninata na triagalnik. *Matematika i informatika*, 3, 285 – 298.
3. Grozdev, S., Nenkov, V. (2009). Edna kriva ot vtora stepen za dve tochki na Cheva. *Matematika i matematicheskoto obrazovanie*, 38, 245 – 248.
4. Nenkov, V. (2010). Nyakolko svoystva na Foyerbahovata konfiguratsiya. *Matematika i informatika*, 5, 42 – 61.
5. Nenkov, V. (2008) Obobshtenie na teoremata na Foyerbah. *Matematika i informatika*, 2, 35 – 42.
6. Paskalev, G., Chobanov, I. (1985). *Zabelezhitelni tochki v triagalnika*. Sofiya: Narodna prosveta.
7. Hitov, H. (1990). *Geometriya na triagalnika*. Sofiya: Narodna prosveta.

SOME PROPERTIES OF A TYPE OF CURVES, GENERATED BY A NAGEL POINT

Abstract. The paper considers a generalization of a geometric problem from the International Mathematical Olympiad in 2013.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg