Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2013

Задача 1. Да се намерят всички наредени тройки от реални числа (x, y, z), за които са изпълнени неравенствата:

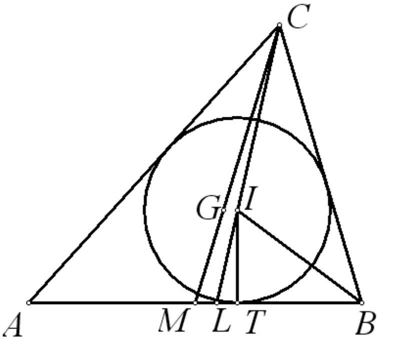
$$\begin{cases} 2^x + 2^{y+1} + 2^{z+2} \le 28, \\ x + y + z \ge 6, \\ y + 3z \ge 8. \end{cases}$$

Даниела Белдеа, Баилещ, Румъния

Решение: От неравенството между средното аритметично и средното геометрично намираме $28 \ge 2^x + 2^y + 2^y + 2^z + 2^z + 2^z + 2^z \ge 7.\sqrt[7]{2^{x+2y+4z}} = 7.\sqrt[7]{2^{x+y+z}.2^{y+3z}} \ge$ $\ge 7.\sqrt[7]{2^6.2^8} = 7.2^2 = 28$. Следователно $2^x = 2^y = 2^z$, т.е. $x = y = z$. Така от второто (или третото) неравенство получаваме $3x \ge 6$, т.е. $x \ge 2$. От първото неравенство следва $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} \le 28$, което води до $2^x \le 2^2$, т.е. $x \le 2$. Следователно $x = y = z = 2$.

Задача 2. Да се построи триъгълник *ABC*, описан около окръжност с радиус *r*, така че страните му *BC*, *AB* и *AC* да образуват в този ред аритметична прогресия с разлика *d*, където *r* и *d* са дадени отсечки.

Христо Лесов, Казанлък



Решение: Нека *G* е медицентърът на *ABC*, *M* е средата на *AB* и *I* е центърът на вписатата в ΔABC окръжност. От свойството на ъглополовящата *BI* в ΔBCL следва $\frac{CI}{LI} = \frac{BC}{BL}$, а от свойството на ъглополовящата *CL* в ΔABC следва $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$. Тези равенства, посредством следствията от второто $\frac{AL+BL}{BL} = \frac{AC+BC}{BC}$ и $\frac{AB}{BL} = \frac{AC+BC}{BC}$, водят до $\frac{BC}{BL} = \frac{AC+BC}{BC} = \frac{CI}{LI}$. Тъй като *BC*, *AB* и *AC* образуват в този ред аритметична прогресия, то *AC* + *BC* = 2*AB*. Затова от предишните равенства получаваме $BL = \frac{BC}{2}$ и $\frac{CI}{LI} = 2 = \frac{CG}{MG}$. Следователно

$GI \parallel ML$ и $\dfrac{GI}{ML}=\dfrac{CG}{CM}=\dfrac{2}{3}$, т.е. $GI=\dfrac{2}{3}ML$. Сега от $ML=BM-BL=\dfrac{AB-BC}{2}=\dfrac{d}{2}$ следва $GI=\dfrac{d}{3}$. Ако T е допирната точка на вписаната в ΔABC окръжност, то $IT=r$, $BT=\dfrac{BC-AC+AB}{2}$ и $TM=BM-BT=\dfrac{AC-BC}{2}=d$.

От тези резултати виждаме, че желаното построение може да се извърши по следния начин: 1) Построяваме отсечката $GI=\dfrac{d}{3}$; 2) Построяваме $IT\perp GI$, $IT=r$ и правата l през T, перпендикулярна на IT; 3) Върху l по посока на $\overrightarrow{IG}$ нанасяме отсечка $TM=d$; 4) Построяваме правата MG, а след това върху нея – точка C, за която $\overrightarrow{GC}=2.\overrightarrow{MG}$ – така се определя върхът C; 4) Построяваме окръжност с център I и радиус $IT=r$, а след това допирателните през C към тази окръжност. Тези допирателни пресичат l в точките A и B. Триъгълникът ABC е търсеният.

Задача 3. Нека O и H са центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълен триъгълник ABC, за който $\sphericalangle ACB=\gamma$. Ако M и N са такива точки съответно върху страните AC и BC, за които $\sphericalangle MHN=\gamma$, да се докаже, че:

а) ортогоналните проекции P и Q съответно на точките O и H върху правата MN лежат на Ойлеровата окръжност на ΔABC;

б) $\sphericalangle MON=180^\circ-2\gamma$.

Хаим Хаимов, Варна

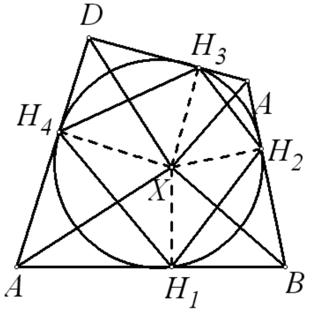
Решение: В решението ще използваме следната:

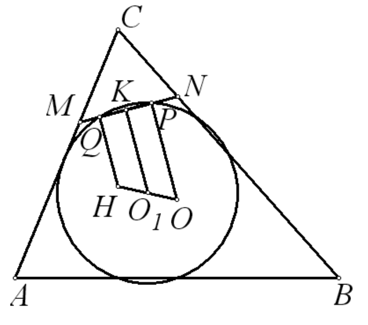
Лема. *Нека X е произволна точка в изпъкналия четириъгълник $ABCD$, а H_1, H_2, H_3 и H_4 са ортогоналните проекции на X съответно върху AB, BC, CD и DA. Точките H_1, H_2, H_3 и H_4 лежат на една окръжност тогава и само тогава, когато $\sphericalangle AXB+\sphericalangle CXD=180^\circ$.*

Доказателство. Тъй като четириъгълниците AH_1XH_4, H_4XH_3D, H_3XH_2C и H_1BH_2X са вписани, то $\sphericalangle H_4H_1X=\sphericalangle H_4AX$, $\sphericalangle H_2H_1X=\sphericalangle H_2BX$, $\sphericalangle H_4H_3X=\sphericalangle H_4DX$ и $\sphericalangle H_2H_3X=\sphericalangle H_2CX$. Оттук следва

$$\begin{aligned}&\sphericalangle H_4H_1H_2+\sphericalangle H_4H_3H_2=\left(\sphericalangle H_4H_1X+\sphericalangle H_2H_1X\right)+\left(\sphericalangle H_4H_3X+\sphericalangle H_2H_3X\right)=\\&=\left(\sphericalangle H_4AX+\sphericalangle H_2BX\right)+\left(\sphericalangle H_4DX+\sphericalangle H_2CX\right)=\left(\sphericalangle H_4AX+\sphericalangle H_4DX\right)+\left(\sphericalangle H_2BX+\sphericalangle H_2CX\right)=\\&=\left(180^\circ-\sphericalangle AXD\right)+\left(180^\circ-\sphericalangle BXD\right)=\sphericalangle AXB+\sphericalangle CXD.\end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle H_4H_1H_2 + \sphericalangle H_4H_3H_2 = 180^\circ$ е еквивалентно с $\sphericalangle AXB + \sphericalangle CXD = 180^\circ$. С това лемата е доказана.





Преминаваме към решаване на задачата.

а) От условието имаме $\sphericalangle AHB = 180^\circ - \gamma$ и затова $\sphericalangle AHB + \sphericalangle MHN = 180^\circ$. Според лемата можем да заключим, че проекциите на H върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат на една окръжност. Но това е Ойлеровата окръжност k на ΔABC, защото съдържа петите на височините му. Следователно $Q \in k$. Центърът O_1 на k е средата на OH. Затова, ако K е средата на PQ, то O_1K е средна основа в трапеца $OHQP$, което означава, че $O_1K \perp PQ$. Оттук следва, че $O_1P = O_1Q$ и затова $P \in k$.

б) От $P \in k$ следва, че проекциите на точката O върху страните на четириъгълника $ABNM$ лежат върху окръжността k. Според лемата можем да заключим, че $\sphericalangle AOB + \sphericalangle MON = 180^\circ$, т.е. $\sphericalangle MON = 180^\circ - 2\gamma$. С това задачата е решена.