

ФОРМИРАНЕ НА ЗНАНИЯ ВЪРХУ КРИВИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

¹Сава Гроздев, ²Веселин Ненков

¹Институт по математика и информатика – БАН

²Технически колеж – Ловеч

Резюме. В статията се разглеждат криви от втора степен като естествени обобщения на окръжностите. Целта е формиране на знания, осигуряващи възможност за обобщаване на задачи от Евклидовата геометрия.

Keywords: circle, Apollonius circle, ellipse, parabola, hyperbola, conic

1. Увод. Кривите от втора степен са същевременно едни от най-простите криви в равнината и такива, които притежават много интересни и забележителни свойства. Освен това участват в много комбинации от по-сложни фигури. Затова е добре да се намери подходящо въвеждане на тези криви като геометрични места на точки. Компютърната програмата GSP позволява да се извърши такова въведение, като се проследи естественото развитие на една идея, започваща от добре познатата геометрична представа за окръжност.

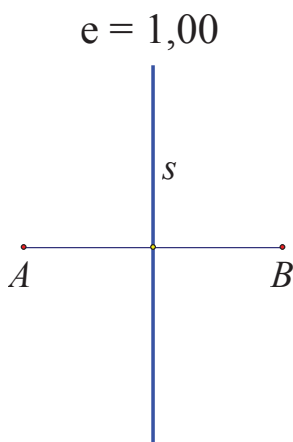
Всяка окръжност е множество от точки в равнината, които се намират на едно и също разстояние от дадена точка. По естествен начин оттук следва да се потърси множеството от точки, които са на едно и също разстояние от две дадени точки A и B . Добре известно е, че това множество е права, минаваща през средата на отсечката AB и перпендикулярна на правата AB . Тази права се нарича *симетрала* на отсечката AB . Симетралата на отсечката AB може да се разглежда и като множество от точки, разстоянията на които до точките A и B имат отношение равно на единица. Това води към следващо обобщаване на горната задача: да се намери множеството от точки, разстоянията на които до точките A и B имат отношение, равно на положителното число e .

В последната задача можем да се запитае какво ще се получи, ако например точката B се замени с права b , т.е. да се намери множеството от точки, разстоянията на които до точката A и правата b имат отношение, равно на положителното число e . Интересно е да се установи какво ще се получи, ако и двете точки A и B се заменят съответно с прави a и b , т.е. да се намери множеството от точки, разстоянията на които до правите a и b имат отношение, равно на положителното число e .

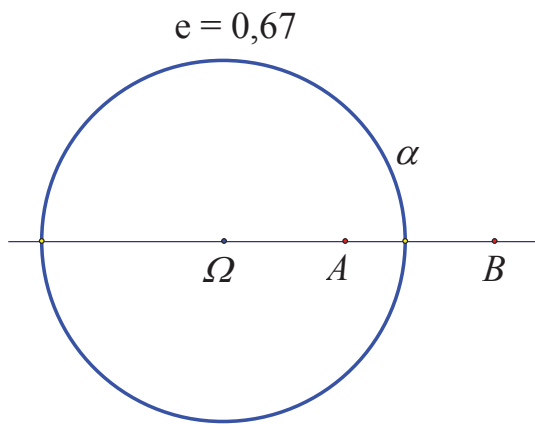
Множество от точки, разстоянията на които до две дадени точки, две прави или точка и права имат постоянно отношение, ще наричаме множество от точки с постоянно отношение. По-нататък ще опишем поотделно всички споменати множества с постоянно отношение.

2. Множества от точки, разстоянията на които до две дадени точки са постоянни. Нека са дадени две различни точки A и B в равнината и реално положително число e . Избираме произволна координатна система Oxy , спрямо която нека $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Търсим множеството от точки $M(x, y)$, за които е изпълнено равенството $\frac{AM}{BM} = e$. От формулата за разстояние между две точки получаваме, че последното равенство е еквивалентно с $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = e^2((x - b_1)^2 + (y - b_2)^2)$. Оттук след преобразувания се получава, че координатите на точките от търсеното множество удовлетворяват уравнението

$$(1) (1 - e^2)x^2 + (1 - e^2)y^2 - 2(a_1 - eb_1)x - 2(a_2 - eb_2)y + a_1^2 + a_2^2 - e^2(b_1^2 + b_2^2) = 0.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Ако $e = 1$, то от (1) се получава

$$(2) s: 2(a_1 - b_1)x + 2(a_2 - b_2)y - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 0,$$

което е уравнение на права (фиг. 1).

Това трябваше да се очаква, защото, както беше отбелязано по-рано, s е симетралата на отсечката AB (фиг. 1).

Ако $e \neq 1$, то от (1) се получава

$$(3) \alpha: x^2 + y^2 - 2 \frac{a_1 - eb_1}{1 - e^2} x - 2 \frac{a_2 - eb_2}{1 - e^2} y + \frac{a_1^2 + a_2^2 - e^2(b_1^2 + b_2^2)}{1 - e^2} = 0.$$

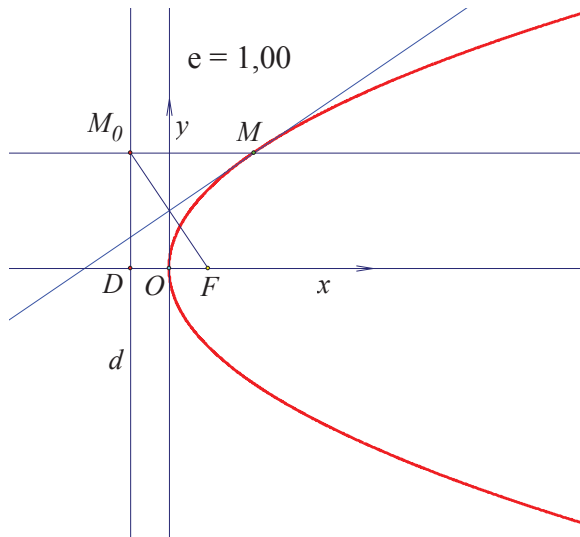
Нека $A_0 = \frac{a_1 - eb_1}{1 - e^2}$, $B_0 = \frac{a_2 - eb_2}{1 - e^2}$ и $C_0 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - e^2(b_1^2 + b_2^2)}{1 - e^2}$. След стандартни пресмятания се получава, че $A_0^2 + B_0^2 - C_0 = \frac{e^2}{(1 - e^2)^2} \cdot |AB|^2 > 0$. Следователно по една известна теорема [118, с. 109–110], [68, с. 67] имаме, че (3) е уравнение на окръжност α с център в точката $\Omega \left(\frac{a_1 - eb_1}{1 - e^2}, \frac{a_2 - eb_2}{1 - e^2} \right)$ и радиус $\rho = \frac{e}{|1 - e^2|} \cdot |AB|$. (Фиг. 2).

Окръжността $\alpha(\Omega, \rho)$ се нарича *Аполониева окръжност* за отсечката AB при отношение e (фиг. 2) [98, с. 255 – 257], [100, с. 437 – 439], [101, с. 265 – 267].

3. Множества от точки, разстоянията на които до дадени точка и права са постоянни. Нека са дадени точка F , права d и реално положително число e . Според взаимното разположение на F и d са възможни два случая: 1) F не лежи на d и 2) F лежи на d . Разглеждаме всеки от тези случаи поотделно.

1) Нека F не лежи на d и разстоянието между F и d е равно на p . През F построяваме права x , перпендикулярна на d . Нека $x \cap d = D$ и $FD = p$. Нека M_0 е ортогоналната проекция на точката M върху правата d .

1.1) Нека $e = 1$ и O е средата на FD (фиг. 3).



Фиг. 3.

Търсим множеството на точките, за които е изпълнено равенството $MF = M_0$. Точката M лежи върху симетралата $s(M_0)$ на отсечката FM_0 . Избираме правоъгълна координатна система Oxy така, че ординатната ос Oy да е по симетралата $s(D)$ на отсечката FD (Фиг. 3).

Спрямо така избраната координатна система имаме $D\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ и $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Правата d има уравнение $x = -\frac{p}{2}$ и затова, ако $M(x, y)$, то $M_0\left(-\frac{p}{2}, y\right)$.

Когато точката M_0 се движи по правата d , симетралата $s(M_0)$ на отсечката FM_0 заема някакво положение в равнината (Фиг. 3). При всяко фиксирано положение на точката M_0 правата $s(M_0)$ е фиксирана и според (2) се описва с уравнение от вида

$$(2') s(M_0): 2(a_1 - b_1)X + 2(a_2 - b_2)Y - a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 0.$$

В това уравнение (X, Y) са координатите на произволна точка от фиксираната права $s(M_0)$ и $a_1 = \frac{p}{2}$, $a_2 = 0$, $b_1 = -\frac{p}{2}$, $b_2 = y$, което следва от вида на координатите на точките F и M_0 . Следователно уравнението на симетралата $s(M_0)$ е

$$(4) s(M_0): 2pX - 2yY + y^2 = 0.$$

Всяка права $s(M_0)$ пресича съответната права M_0M в точката $M(x, y)$ (фиг. 3). Затова всяка точка $M(x, y)$ от търсеното множество ще удовлетворява уравнението (4) и при $X = x$, $Y = y$ се получава

$$(5) y^2 = 2px.$$

Следователно търсеното множество се описва с уравнението (5). Кривата с уравнение (5) се нарича *парабола* (фиг. 3).

1.2) Нека $e \neq 1$.

Търсим множеството на точките, за които е изпълнено равенството $\frac{MF}{MM_0} = e$. Точката M лежи на Аполониевата окръжност $\alpha(M_0)$ за отсечката FM_0 при отношение e . Избираме правоъгълна координатна система Oxy така, че центърът ѝ да съвпада с центъра O на Аполониевата окръжност $\alpha(D)$ за отсечката FD при отношение e (фиг. 4, 5).

В означенията, при които е получено (3) за точките $F(a_1, a_2)$ и $D(b_1, b_2)$ спрямо тази координатна система, са изпълнени равенствата $a_2 = b_2 = 0$ и $a_1 - b_1 = p$. Освен това координатите на точката $O\left(\frac{a_1 - eb_1}{1 - e^2}, \frac{a_2 - eb_2}{1 - e^2}\right)$ трябва да са равни на нула.

Следователно $a_1 - eb_1 = 0$ и затова $a_1 = -\frac{e^2p}{1 - e^2}$ и $b_1 = -\frac{p}{1 - e^2}$. Така се получава, че

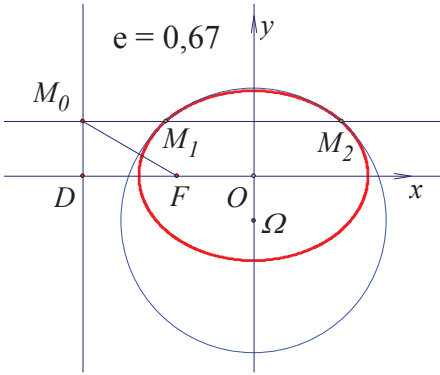
$$F\left(-\frac{e^2p}{1 - e^2}, 0\right) \text{ и } D\left(-\frac{p}{1 - e^2}, 0\right).$$

Правата d има уравнение $x = -\frac{e^2p}{1 - e^2}$ и затова, ако $M(x, y)$, то $M_0\left(-\frac{e^2p}{1 - e^2}, y\right)$.

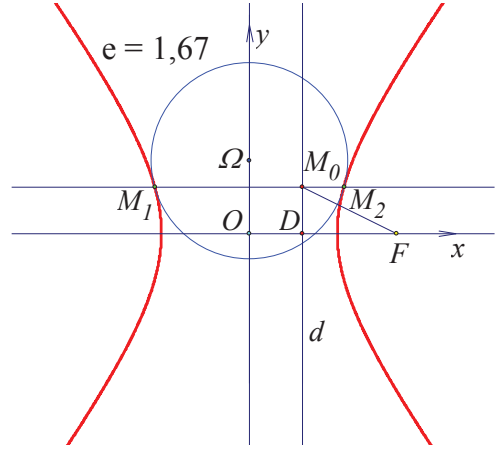
Когато точката M_0 се движи по правата d , Аполониевата окръжност $\alpha(M_0)$ за

отсечката FM_0 при отношение e заема някакво положение в равнината (фиг. 4, 5). При всяко фиксирано положение на точката M_0 окръжността α (M_0) е фиксирана и според (3) се описва с уравнение от вида

$$(3') \alpha(M_0): X^2 + Y^2 - 2 \frac{a_1 - eb_1}{1-e^2} X - 2 \frac{a_2 - eb_2}{1-e^2} Y + \frac{a_1^2 + a_2^2 - e^2(b_1^2 + b_2^2)}{1-e^2} = 0.$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

В това уравнение (X, Y) са координатите на произволна точка от фиксираната окръжност α (M_0) и $a_1 = -\frac{e^2 p}{1-e^2}$, $a_2 = 0$, $b_1 = -\frac{p}{1-e^2}$, $b_2 = y$, което следва от вида на координатите на точките F и M_0 . Следователно уравнението на окръжността α (M_0) е

$$(6) \alpha(M_0): X^2 + Y^2 + 2 \frac{e^2}{1-e^2} yY - \frac{e^2}{1-e^2} y^2 - \frac{e^2 p}{(1-e^2)^2} = 0.$$

Всяка окръжност α (M_0) пресича съответната права M_0M в точката $M(x, y)$ (фиг. 4, 5). Затова всяка точка $M(x, y)$ от търсеното множество ще удовлетворява уравнението (6) и при $X = x$ и $Y = y$ се получава

$$(7) x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2}$$

Следователно търсеното множество се описва с уравнението (7).

Ако $e < 1$, полагаме $a = \frac{ep}{1-e^2}$ и $b = \frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$. Уравнението (7) се записва във вида

$$(8) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ако $e > 1$, полагаме $a = \frac{ep}{e^2-1}$ и $b = \frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}$. Уравнението (7) се записва във вида

$$(9) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Кривите с уравнения (8) и (9) се наричат съответно *елипса* (фиг. 4) и *хипербола* (фиг. 5).

2) Нека F лежи на d . През F построяваме права x , перпендикулярна на d . Избираме правоъгълна координатна система Fxy така, че центърът ѝ да съвпада с точката F , а ординатната ос да съвпада с правата d (фиг. 6, 7, 8).

Търсим множеството от точки $M(x,y)$, за които е изпълнено равенството $\frac{FM}{M_0M} = e$. Спрямо въведената координатна система имаме $F(0,0)$ и $M_0(0,y)$.

2.1) Нека $e = 1$. От (2') при $a_1 = a_2 = b_1 = 0$ и $b_2 = y$ се получава

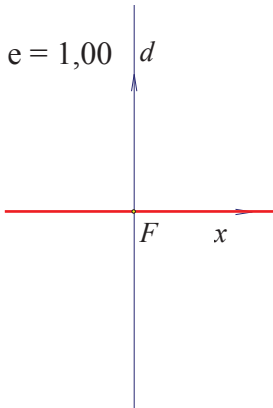
$$(10) s(M_0): 2yY - y^2 = 0.$$

Всяка точка $M(x,y)$ от търсеното множество ще удовлетворява уравнението (10) и при $X = x$, $Y = y$ се получава

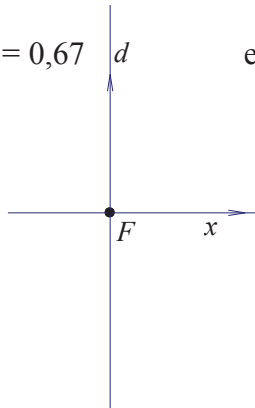
$$(11) y^2 = 0$$

Следователно търсеното множество се описва с уравнението (11).

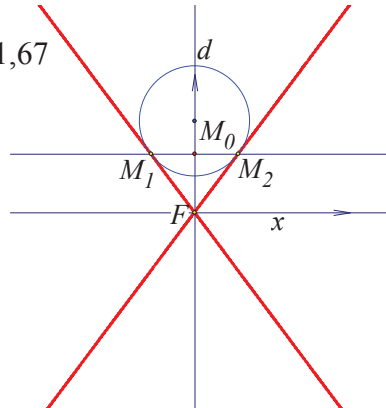
Уравнението (11) показва, че правата x се описва два пъти от точката M при движението на точката M_0 върху правата d . Затова кривата с уравнение (11) се нарича *двойна права* (фиг. 6).



Фиг. 6.



Фиг. 7.



Фиг. 8.

2.2) Нека $e \neq 1$. От (3') при $a_1 = a_2 = b_1 = 0$ и $b_2 = y$ се получава

$$(12) \alpha(M_0): X^2 + Y^2 + 2\frac{e^2}{1-e^2}Y - \frac{e^2}{1-e^2}Y^2 = 0.$$

Всяка точка $M(x,y)$ от търсеното множество ще удовлетворява уравнението (12) и при $X=x$, $Y=y$ се получава

$$(13) x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = 0.$$

Следователно търсеното множество се описва с уравнението (13).

Ако $e < 1$, полагаме $a = 1$ и $b = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$. Уравнението (13) се записва във вида

$$(14) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Уравнението (14) има само едно реално решение, което съответства на точката F . Кривата с уравнение (14) се нарича *две комплексно спрегнати пресичащи се прави* (фиг. 7).

Ако $e > 1$, полагаме $a = 1$ и $b = \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}$. Уравнението (13) се записва във вида

$$(15) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Уравнението (15) представя две прави пресичащи се в точката F . Кривата с уравнение (15) се нарича *две реални пресичащи се прави* (фиг. 8).

4. Множества от точки, разстоянията на които до две дадени прави са постоянни. Нека са дадени две различни прави d_1 и d_2 в равнината и реално положително число e . Според броя на общите точки на d_1 и d_2 са възможни два случая: 1) d_1 и d_2 са успоредни и 2) d_1 и d_2 се пресичат. Разглеждаме всеки от тези случаи поотделно.

1) Нека $d_1 \parallel d_2$ и разстоянието между тях е равно на p (фиг. 9, 10).

Построяваме произволна права y , перпендикулярна на d_1 и d_2 . Нека $y \cap d_1 = A$ и $y \cap d_2 = B$ (Фиг. 9, 10). Нека M_1 и M_2 са ортогоналните проекции на точката M съответно върху правите d_1 и d_2 .

1.1) Нека $e = 1$ и O е средата на AB . Разглеждаме ортогонална координатна система Oxy така, че $A(0, -p)$ и $B(0, p)$. Ясно е, че в този случай търсеното множество е правата y (фиг. 9).

1.2) Нека $e \neq 1$.

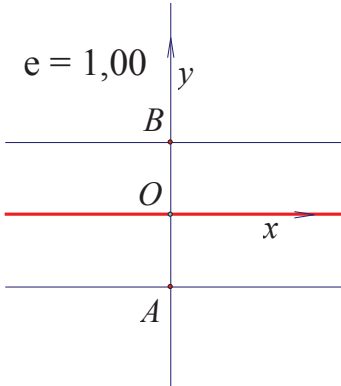
Избираме правоъгълна координатна система Oxy така, че центърът ѝ да съвпада с центъра O на Аполониевата окръжност $\alpha(D)$ за отсечката AB при отношение e (Фиг. 10). В означенията, при които е получено (3) за точките $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$ спрямо тази координатна система, са изпълнени равенствата $a_1 = b_1 = 0$, $b_2 - a_2 = p$. Освен това координатите на точката $O\left(\frac{a_1 - eb_1}{1-e^2}, \frac{a_2 - eb_2}{1-e^2}\right)$ трябва да са равни на нула.

Следователно $a_2 - eb_2 = 0$ и затова $a_2 = \frac{e^2 p}{1-e^2}$ и $b_2 = \frac{p}{1-e^2}$. Следователно $A\left(0, \frac{e^2 p}{1-e^2}\right)$

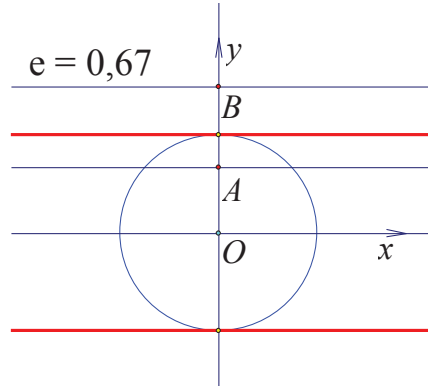
и $B\left(0, \frac{p}{1-e^2}\right)$. Уравненията на правите d_1 и d_2 са съответно $y = \frac{e^2 p}{1-e^2}$ и $y = \frac{p}{1-e^2}$, затова, ако $M(x, y)$, то $M_1\left(x, \frac{e^2 p}{1-e^2}\right)$ и $M_2\left(x, \frac{p}{1-e^2}\right)$.

Сега от (3') при $a_1 = x$, $a_2 = \frac{e^2 p}{1-e^2}$, $b_1 = x$, $b_2 = \frac{p}{1-e^2}$ се получава уравнението

$$y^2 - \frac{e^2 p^2}{(1-e^2)^2} = 0.$$



Фиг. 9.



Фиг. 10.

В последното уравнение полагаме $b = \frac{ep}{1-e^2}$ и получаваме

$$(16) \quad y^2 - b^2 = 0.$$

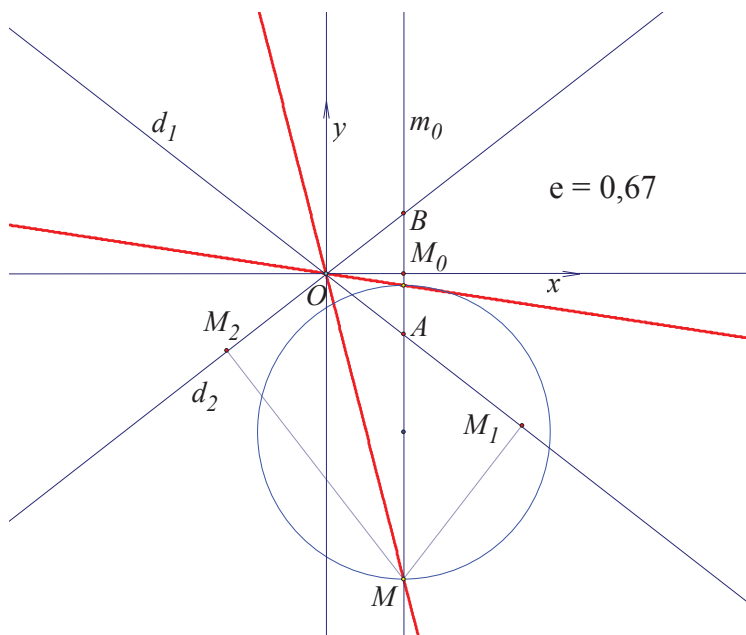
Кривата с уравнение (16) се нарича *две реални успоредни прави* (фиг. 10).

2) Нека $d_1 \cap d_2 = 0$ и нека ъглополовящите на ъглите, определени от правите d_1 и d_2 , са означени с x и y . По този начин определяме правоъгълна координатна система Oxy (фиг. 11). Спрямо разглежданата координатна система правите d_1 и d_2 имат уравнения от вида $d_1: y = kx$ и $d_2: y = -kx$.

Нека M_0 е произволна точка от оста Ox . През M_0 построяваме права m_0 , перпендикулярна на Ox (Фиг. 11).

Нека $m_0 \cap d_1 = A$, $m_0 \cap d_2 = B$ и M е точка от търсеното множество върху правата m_0 . Ако M_1 и M_2 са ортогоналните проекции на M съответно върху d_1 и d_2 , то $\frac{MM_1}{MM_2} = e$ (Фиг. 11).

Тъй като $\triangle AMM_1 \sim \triangle BMM_2$, то $\frac{AM}{BM} = \frac{MM_1}{MM_2} = e$. Следователно точката M лежи върху Аполониевата окръжност на отсечката AB (или нейната симетрала, ако $e = 1$) при отношение e . Затова ще търсим множеството от точки M като пресечни точки на Аполониевите окръжности (симетрала) на отсечките AB с правата m_0 през тях, когато точката M_0 описва оста Ox (Фиг. 11).



Фиг. 11.

Ако $M(x, y)$, то $A(x, kx)$, $B(x, -kx)$, $a_1 = x$, $a_2 = -kx$, $b_1 = xb_1$, $b_2 = -kx$ и следователно според (1) се получава

$$(17) (1 - e^2)X^2 + (1 - e^2)Y^2 - 2(1 - e^2)xX - 2k(1 + e^2)xY + (1 + k^2)x^2 = 0.$$

Всяка точка $M(x, y)$ от търсеното множество ще удовлетворява уравнението (17) и при $X = x$, $Y = y$ се получава

$$(18) (1 - e^2)k^2x^2 - 2(1 + e^2)kxy + (1 - e^2)y^2 = 0.$$

Уравнението (18) се представя още във вида

$$(18') (1 - e^2)k^2x^2 - 2(1 + e^2)kxy + (1 - e^2)y^2 = 0.$$

Уравнението (18') показва, че M описва две пресичащи се прави в точката O . Следователно кривата с уравнение (18') е две реални пресекателни прави (фиг. 11). При подходяща ротация на координатната система уравнението (18) може да се доведе до уравнение от вида (15).

5. Криви от втора степен. Уравненията (5), (8), (9), (11), (14), (15), (16) описват различни множества с постоянно отношение. По друг начин казано, координатите (x, y) на всяка точка от едно такова множество са едно реално решение на съответното уравнение. Освен тези уравнения съществуват и такива, които не притежават нито едно реално решение. Такива са уравненията:

$$(19) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

$$(20) y^2 + b^2 = 0.$$

Уравнение (19) е подобно на (8) и затова се нарича уравнение на *имагинерна елипса*, а (20) е подобно на (16) и затова се нарича уравнение на *две комплексно спрегнати успоредни прави*. Всички тези уравнения (5), (8), (9), (11), (14), (15), (16), (19), (20) са частни случаи на общото уравнение от втора степен с две неизвестни

$$(21) a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

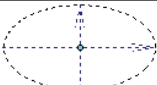
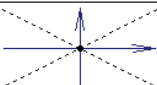
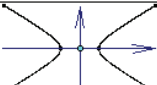
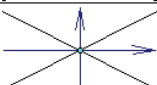
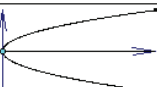
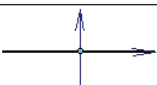
където $a_{ij} = a_{ji}$ ($1 \leq i, j \leq 3$) са реални числа.

Множеството на всички наредени двойки от комплексни числа (x, y) , които са решения на уравнение (21), се нарича *крива от втора степен*.

Досега бяха споменати девет различни вида криви от втора степен и затова възниква въпросът за съществуването на други видове, несъвпадащи с изброените. Оказва се, че с подходящи преобразувания уравнение (21) може да се сведе до някое от уравненията (5), (8), (9), (11), (14), (15), (16), (19), (20) [117, с. 109 – 110], [68, с. 193 – 201.], [74, с. 339 – 345]. Следователно кривите от втора степен са точно девет вида. Кратка обобщена информация за тях е представена на фиг. 12.

Геометричният смисъл на първите седем вида криви беше изяснен. Кривите (19) и (20) като непритежаващи реални точки нямат геометричен смисъл. Това обяснява факта, че от всички криви точно те не се получиха като множества с постоянно отношение.

Разгледаният начин за въведение в кривите от втора степен се различава съществено от приетия в основния курс по аналитична геометрия. Освен различния начин за получаване на каноничните уравнения на кривите от втора степен тук се забелязва и допълнителен геометричен смисъл, който липсва при чисто аналитичното им извеждане. Този подход предлага възможност на GSP да представи конструктивно кривите от втора степен, които имат реален геометричен смисъл.

КЛАСИФИКАЦИЯ НА КРИВИТЕ ОТ ВТОРА СТЕПЕН		
КРИВА	КАНОНИЧНО УРАВНЕНИЕ	НАИМЕНОВАНИЕ
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	ЕЛИПСА
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	ИМАГИНЕРНА ЕЛИПСА
	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	ДВЕ КОМПЛЕКСНО СПРЕГНАТИ ПРЕСИЧАЩИ СЕ ПРАВИ
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	ХИПЕРБОЛА
	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	ДВЕ РЕАЛНИ ПРЕСИЧАЩИ СЕ ПРАВИ
	$y^2 = 2px$	ПАРАБОЛА
	$y^2 - a^2 = 0$	ДВЕ РЕАЛНИ УСПОРЕДНИ ПРАВИ
	$y^2 + a^2 = 0$	ДВЕ КОМПЛЕКСНО СПРЕГНАТИ УСПОРЕДНИ ПРАВИ
	$y^2 = 0$	ДВОЙНА ПРАВА

Фиг. 12.

ЛИТЕРАТУРА

- Акопян А., Заславский А. *Геометрические свойства кривых второго порядка*. МЦНМО, Москва, 2007.
- Grozdev S. *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia, 2007, ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

REFERENCES

1. Agopyan, A. A., Zaslavskii. A. A. *Geometrical Properties of Curves of Second Degree*. Moscow: Center of Continuous Learning, 2007.
2. Grozdev, S. *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia, 2007, ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

FORMATION OF KNOWLEDGE ON CURVES OF SECOND DEGREE

Abstract. Curves of second degree are considered in the paper as natural generalizations of circles. The aim is to form knowledge giving possibility of generalizing problems from Euclidean Geometry.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**

Institute of Mathematics and Informatics – BAS

Acad. G. Bonchev Street, bl. 8

1113 Sofia, Bulgaria

E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**

Technical College Lovech

31, Sajko Saev Street

Lovech, Bulgaria

E-mail: vnenkov@mail.bg