

## КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

**Задача 1.** Да се намерят всички реални стойности на  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при които корените на уравнението  $x^2 + (1 + a^2 + b^2 + c^2)x + ab + bc + ca = 0$  са цели числа.

*Милен Найденов, Варна*

**Задача 2.** В остроъгълния триъгълник  $ABC$  точката  $C_x$  се движи по най-малката страна  $AB$ , а точките  $A_x$  и  $B_x$  се движат съответно по страните  $BC$  и  $AC$ , така че във всеки момент са изпълнени равенствата  $C_x A_x = C_x B$  и  $C_x B_x = C_x A$ . Да се докаже, че окръжността  $k_x$ , определена от точките  $A_x$ ,  $B_x$  и  $C$  има втора неподвижна точка. Коя е тази точка?

*Хаим Химов, Варна*

**Задача 3.** Правоъгълният триъгълник  $A_0 B_0 C_0$  е вписан в окръжност  $k_0(O, R)$  и е описан около окръжност  $k_i(I, r)$ .

а) Да се намерят страните на триъгълник  $ABC$ , вписан в  $k_0(O, R)$  и описан около  $k_i(I, r)$ , така че триъгълникът да има ъгъл  $60^\circ$ .

б) Да се докаже, че ако  $S_0$  и  $S$  са лицата съответно на  $\Delta A_0 B_0 C_0$  и  $\Delta ABC$ , то е изпълнено равенството  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_0 + r^2)$ .

*Сава Гроздев (София) и Веселин Ненков (Бели Осъм)*

**Краен срок за изпращане на решения 31 март 2015 г.**

*Напомяме, че в края на 2014 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2015 г.*

*Решенията трябва да бъдат представяни ясно, като всяка задача е задължително да бъде на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на [mathinfo@azbuki.bg](mailto:mathinfo@azbuki.bg) и [vnenkov@mail.bg](mailto:vnenkov@mail.bg).*

## РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2013

**Задача 1.** Да се намерят всички реални функции  $f(x): (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ , за които при  $x > 1$  и  $y > 0$  е изпълнено равенството  $f(x^y) = (f(x))^y$ .

Йон Неделку, Плоещ и Лучиан Тутеску, Крайова, Румъния

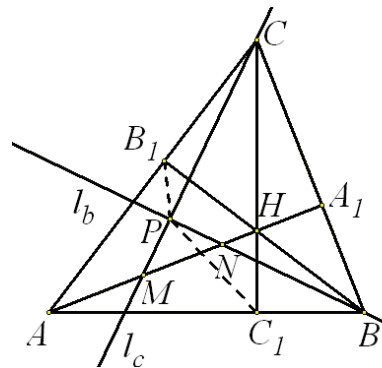
*Решение:* Нека  $y = \frac{1}{\ln x} = \log_x e$ . Тогава  $f(x^y) = f(x^{\log_x e}) = f(e)$ . Полагаме  $f(e) = a > 1$ . От условието получаваме  $a = f(e) = (f(x))^{\frac{1}{\ln x}}$ , откъдето  $f(x) = a^{\ln x}$ . Освен това  $a^{\ln x} = e^{\ln a \cdot \ln x} = e^{\ln x \cdot \ln a} = (e^{\ln x})^{\ln a} = x^{\ln a}$ . Затова, като положим  $\ln a = \alpha > 0$ , получаваме, че търсените функции са  $f(x) = x^\alpha$  за всички  $\alpha > 0$ .

**Задача 2.** Височините  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  на остроъгълен триъгълник  $ABC$  се пресичат в точка  $H$ . Ако правите  $l_b$  и  $l_c$  минават съответно през върховете  $B$  и  $C$ , така че  $l_b \perp l_c$ ,  $l_b \cap AA_1 = N$  и  $l_c \cap AA_1 = M$ , да се докаже, че описаните окръжности на триъгълниците  $AB_1M$ ,  $HC_1M$ ,  $AC_1N$ ,  $NB_1N$ ,  $A_1BM$ ,  $A_1CN$  и окръжността с диаметър страната  $BC$  имат обща точка.

Хаим Химов, Варна

*Решение:* Означаваме пресечната точка на  $l_b$  и  $l_c$  с  $P$ . От условието имаме  $\sphericalangle BPM = \sphericalangle MA_1B = 90^\circ$ , откъдето следва, че точките  $M, B, A_1$  и  $P$  лежат на една окръжност. Следователно  $P$  лежи върху описаната окръжност  $k_1$  на  $\triangle A_1BM$ . Аналогично от равенството  $\sphericalangle NPC = \sphericalangle NA_1C = 90^\circ$  следва, че  $P$  лежи върху описаната окръжност  $k_2$  на  $\triangle A_1CN$ . Лесно се вижда, че точката  $P$  лежи върху окръжността  $k_3$  с диаметър  $BC$ . Тъй като  $P \in k_1$ , то  $\sphericalangle PMA_1 = \sphericalangle PBA_1$ . Освен това от вписания четириъгълник  $PC_1BC$  следва, че  $\sphericalangle PBA_1 = \sphericalangle PC_1C$ .

Така получаваме, че  $\sphericalangle PMA_1 = \sphericalangle PC_1C$ , т.е.  $\sphericalangle PMH = \sphericalangle PC_1H$ , откъдето следва, че точките  $P, M, C_1$  и  $H$  лежат на една окръжност. Следователно  $P$  лежи върху описаната окръжност на  $\triangle HC_1M$ . Аналогично се доказва, че  $P$  лежи върху описаната окръжност на  $\triangle HB_1N$ . Тъй като четириъгълникът  $PB_1CC_1$  е вписан в  $k_3$ , то



$\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle PC_1C$ . Това равенство заедно с вече доказаното  $\sphericalangle PMA_1 = \sphericalangle PC_1C$  води до  $\sphericalangle AB_1P = \sphericalangle PMA_1$ . Затова четириъгълникът  $AMPB_1$  е вписан в окръжност и следователно  $P$  лежи върху описаната окръжност на  $\triangle AB_1M$ . По същия начин се доказва, че  $P$  лежи върху описаната окръжност на  $\triangle AC_1N$ . С това задачата е решена.

**Задача 3.** Триъгълник с медицентър  $G$  е описан около окръжност  $k(I, r)$ , така че  $IG \perp AB$ .

а) Ако  $h_c$  и  $r_c$  са дължините на височината през  $C$  и радиусът на външно вписаната за  $\triangle ABC$  окръжност, допираща се до страната  $AB$ , да се докаже, че  $h_c = 4r$  и  $r_c = 2r$ .

б) Да се построи триъгълник  $ABC$  по дадени  $r$  и дължина  $s$  на страната  $AB$ .

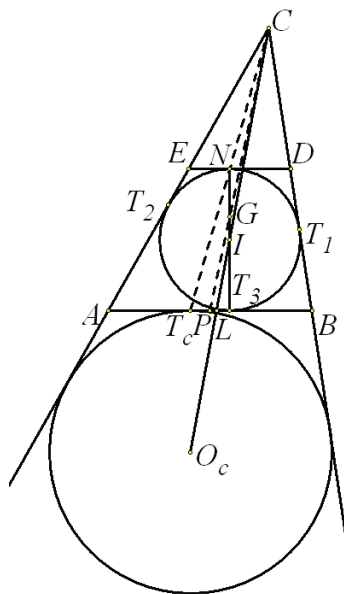
*Христо Лесов, Казанлък*

*Решение:* За определеност считаме, че  $AC > BC$ . Нека  $P$  е средата на  $AB$ ,  $L$  пресечната точка на  $CI$  с  $AB$ . От свойството на ъглополовящата  $CL$  в  $\triangle ABC$  имаме  $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$  или  $\frac{AL+BL}{BL} = \frac{AC+BC}{BC}$ , откъдето  $BL = \frac{BC}{AC+BC} \cdot AB < \frac{1}{2} AB = BP$ . Затова  $L$  е между  $B$  и  $P$ .

Нека окръжността  $k$  се допира до страната  $AB$  в точка  $T_3$ , а външно вписаната окръжност  $k_c$  с център  $O_c$  и радиус  $r_c$  се допира до страната  $AB$  в точка  $T_c$ .

Тогава  $AT_c = \frac{1}{2}(AB + BC - AC) < \frac{1}{2} AB = AP$  и затова точките  $A, T_c, P, L, T_3$  и  $B$  са разположени в този ред върху правата  $AB$ . По условие  $IG \perp AB$  и затова  $T_3, I$  и  $G$  лежат в този ред на диаметър на  $k$ . Ако означим с  $N$  диаметрално противоположната точка на  $T_3$  върху  $k$ , то  $IN = IT_3$ . Тъй като  $BT_3 = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$ ,

то  $P$  е среда на отсечката  $T_3T_c$ . Следователно  $IP$  е средна отсечка в  $\triangle NT_3T_c$ . Затова  $NT_c \parallel IP$  и  $NT_c = 2IP$ . През точката  $N$  построяваме допирателната към  $k$ . Нека тя пресича правите  $BC$  и  $AC$  съответно в точките  $D$  и  $E$ . Тогава  $DE \perp IN$ ,  $DE \parallel AB$  и триъгълниците  $ABC$  и  $EDC$  са хомотетични с център  $C$ , при което  $T_c$  се преобразува в  $N$ , а  $k_c$  в  $k$ . Следователно точките  $C, N$  и  $T_c$  лежат на една права и  $CN \parallel IP$ . Така получаваме, че триъгълниците  $CNG$  и  $PIG$  са хомотетични с център



$G$  и  $\frac{CN}{IP} = \frac{NG}{IG} = \frac{CG}{GP} = 2$ . Оттук  $CN = 2IP = NT_c$  и  $NG = 2IG$ . Това означава, че  $IN$  е средна отсечка в  $\Delta COO_c$ . Следователно  $CI = IO_c$ ,  $r_c = O_cT_c = 2IN = 2r$  и  $N$  е точката на Нагел за  $\Delta ABC$ , която лежи върху средната отсечка  $DE$  на  $\Delta ABC$ . Ако  $CF \perp AB$  ( $F \in AB$ ), то  $CF \parallel NT_3$  и затова  $CF$  е средна отсечка в  $\Delta CET_c$ . Оттук  $h_c = CF = 2NT_3 = 2 \cdot 2r = 4r$ .

б) Ще използваме твърдение 2 от статията „Разположение на забележителни точки и прави в триъгълника“ в кн. 4, 2014 г. на сп. „Математика и информатика, стр. 339, съгласно което  $IG \perp AB$  тогава и само тогава, когато  $AC + BC = 3AB$ . Нека окръжността  $k$  се допира до  $BC$  и  $AC$  съответно в точки  $T_1$  и  $T_2$ . Тогава  $CT_1 = CT_2 = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = AB$  и правоъгълните триъгълници  $CIT_1$  и  $CIT_2$  могат да се построят по дадени катети  $IT_1 = IT_2 = r$  и  $CT_1 = CT_2 = c$ . След това има два варианта: I) Построяваме окръжността  $k(I, r)$  и окръжност с център  $C$  и радиус  $4r$ . Общата външна допирателна към тези окръжности пресича правите  $CT_1$  и  $CT_2$  съответно в точките  $A$  и  $B$ . II) Върху продължението на  $CI$  нанасяме отсечка  $IO_c = CI$  и построяваме окръжността  $k_c$  с център  $O_c$  и радиус  $r_c = 2r$ . Общата вътрешна допирателна на  $k$  и  $k_c$  пресича  $CT_1$  и  $CT_2$  съответно в точките  $A$  и  $B$ .