Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Да се намерят всички рационални стойности на параметъра k, за които уравнението $(k-10)x^2-(2k-21)x-2k+22=0$, $k\neq 10$ притежава целочислени корени.

Милен Найденов, Варна

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и радиус на описаната окръжност R, за който $\sphericalangle BAC=\alpha$ и $\sphericalangle ABC=\beta$. Ако D е точка от полуравнината относно правата AB, несъдържаща триъгълника, за която $\sphericalangle ADC=180^\circ-2\beta$ и $\sphericalangle BDC=180^\circ-2\alpha$, да се докаже, че $HD=R$.

Хаим Хаимов, Варна

Задача 3. Нека $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $\dots$, $A_nB_nC_n$ са произволни еднакво ориентирани равностранни триъгълници от една равнина. Да се докаже, че центровете на тежестта G_a, G_b и G_c съответно на многоъгълниците $A_1A_2\dots A_n$, $B_1B_2\dots B_n$ и $C_1C_2\dots C_n$ са върхове на равностранен триъгълник.

Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Краен срок за изпращане на решения 31 май 2015 г.

Напомняме, че в края на 2014 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2015 г.

Решенията трябва да бъдат представяни ясно, като всяка задача е задължително да бъде на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg *и* vnenkov@mail.bg.

Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2014

Задача 1. Да се докаже, че за произволен триъгълник със страни a, b и c е изпълнено неравенството $(a+b+c)^2\left(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4\right)\le 27a^2b^2c^2$.

Йонуц Иванеску, Крайова, Румъния

Решение: Ако S, R и $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ са съответно лицето, радиусът на описаната окръжност и полупериметърът на триъгълника, то са изпълнени следните релации: $16S^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$, $4SR=abc$ и $p\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$. От двете равенства лесно се вижда, че разглежданото неравенство е еквивалентно с $p\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}R$, което съвпада със споменатото неравенство.

Задача 2. Ако *M* е множеството на всички равнобедрени триъгълници, страните и лицето на които са естествени числа, да се намерят три триъгълника от *M*, различните страни на които са последователни естествени числа.

Милен Найденов, Варна

Решение: като залепим два питагорови триъгълника със страни 3, 4, 5 по катета с дължина 4, получаваме равнобедрен триъгълник с основа $a=6$, бедро $b=5$ и лице $S=12$. Така намираме един от желаните триъгълници. Сега разглеждаме равнобедрените триъгълници, които имат основа $a=10k+6$ и бедро $b=10k+5$ $(k\ge 0)$ и това обобщава разгледания случай. Лицето S на триъгълник от този вид, според Хероновата формула, се изразява с равенството $S=(5k+3)\sqrt{75k^2+70k+16}$. При $k=0$ получаваме вече разгледания триъгълник. При $k=6$ получаваме нов триъгълник със страни $a=66$, $b=5$ и лице $S=120$. Сега да увеличим страните на триъгълниците от предишния вид с единица и да разменим местата на основата и бедрото, т.е. разглеждаме равнобедрените триъгълници с основа $a=10k+6$ и бедро $b=10k+7$ $(k\ge 0)$. Лицето на триъгълник от този вид се намира по формулата $S=(5k+3)\sqrt{5\left(15k^2+22k+8\right)}$. При $k=1$ получаваме трети триъгълник от множеството *M*, който има основа

$a = 16$, бедро $b = 65$ и лице $S = 1848$. Четвърти триъгълник от M, който се получава по различен начин, има основа $a = 240$, бедро $b = 241$ и лице $S = 25080$.

Задача 3. Ако P е вътрешна точка за изпъкналия четириъгълник $ABCD$, която притежава свойствата $\frac{DP}{CP} = \frac{AD}{BC}$ и $\sphericalangle DPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAD$. Да се докаже, че са изпълнени равенствата $\frac{DP}{AP} = \frac{CD}{AB}$ и $\sphericalangle APD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACD$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Означаваме симетричните точки на D и P относно симетралата на AC съответно с D_1 и P_1. От свойствата на симетрията и условието получаваме $\frac{D_1P_1}{AP_1} = \frac{DP}{CP} = \frac{AD}{BC} = \frac{CD_1}{BC}$ и $\sphericalangle D_1P_1A = \sphericalangle DPC = \sphericalangle ACB + \sphericalangle ACD_1 = \sphericalangle D_1CB$. Следователно $\Delta D_1P_1A \sim \Delta D_1CB$. Сега лесно се съобразява, че $\Delta D_1P_1C \sim \Delta D_1AB$, откъдето следва, че $\frac{D_1P_1}{CP_1} = \frac{D_1A}{AB}$ и $\sphericalangle CP_1D_1 = \sphericalangle BAD_1$. От свойствата на симетрията тези равенства водят до $\frac{DP}{AP} = \frac{CD}{AB}$ и $\sphericalangle APD = \sphericalangle BAD_1 = \sphericalangle CAB + CAD_1 = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ACD$.