Educational Technologies
Образователни технологии

УЧЕНЕ ЧРЕЗ ОТКРИТИЯ – НОВ ЕФЕКТИВЕН ПОДХОД В УЧЕНЕТО ЧРЕЗ ЕКСПЕРИМЕНТИРАНЕ

Сава Гроздев, Деко Деков
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. През последните години експерименталният подход в образованието, известен като „учене чрез експериментиране“ или „учене чрез преоткрития“ и неправилно наричан „изследователски подход“, става все по-популярен. Важно е да се отбележи, че при ученето чрез преоткрития в хода на експерименталния процес ученикът или студентът получава неизвестни за него факти, които в отделни случаи могат да се окажат нови научни резултати. Получаването на нов научен резултат е съществено и то може да бъде поставено като цел в обучението. В този случай е подходящо съответното учене да се нарича „учене чрез открития“. По този начин в експерименталния подход, т.е. в ученето чрез експериментиране, се оформят две направления: учене чрез преоткрития и учене чрез открития. Точно ученето чрез открития, а не ученето чрез преоткрития, е правилно да се нарича изследователски подход. Настоящата статия е посветена именно на подхода за учене чрез открития. Авторите привеждат примери, показващи как може да бъде прилаган предлаганият подход.

Keywords: learning through discoveries, learning through rediscoveries, research approach in education, experimental approach in education, computer-generated mathematics, Euclidean geometry, “Discoverer”.

У нас изразът *изследователски подход* се свързва най-вече с приложение на информационни технологии (предимно динамичен софтуер) в обучението на ученици. Всъщност става дума за обучение чрез преоткрития, което е добре известен дидактически прийом. По наше сведение за първи път Фройдентал го извежда в явен формат. Буквалният превод от английски на изследователския подход е заблуждаващ. Оригиналният термин *inquiry-based science education* (IBSE), от който по-късно отпада *science*, е въведен в т. нар. **доклад Рокар**, виж (Гроздев & Лазаров, 2013). По-добър е свободният превод, според който специално в областта на математиката това е метод, основан на решаването на задачи, допълнен с експериментални дейности.

Ученикът или студентът най-добре усвоява учебния материал в хода на един творчески процес, при който той самостоятелно преоткрива научните факти. Тогава се включва емоционалната компонента и съответното знание става част от съзнанието, знанието става живо, т.е. може да се използва пълноценно. Ролята на учителите и преподавателите е да подпомогнат учениците и студентите да разгърнат творческите си способности. Понастоящем в направлението „учене чрез експериментиране“ се говори за изследователски подход при овладяване на новите знания, при който ученикът или студентът преоткрива известни факти. Не се споменава възможността той да открие нови научни резултати в процеса на ученето си. Неотдавна няколко държави от Европейския съюз завършиха проект по популяризиране на „ученето чрез експериментиране“. В заключителния доклад на проекта от февруари 2013 г. се представя софтуерът, който би могъл да подпомогне творческия процес на овладяване на математиката, виж (Inquiry in Mathematics Education). В този документ не се споменава за компютърна програма, която е в състояние да прави открития в математиката. В това няма нищо чудно. Понастоящем в света има само една компютърна програма, която е в състояние да прави открития в математиката – компютърната програма „Откривател“, която е създадена от авторите на тази статия и популяризирането на която започна в началото на 2013 г. Авторите наричат „учене чрез открития“ експерименталния подход при овладяване на знанията в областта на математиката от страна на ученика или студента, при който се използва например компютърната програма за открития „Откривател“. В бъдеще ролята на програмата „Откривател“ може да бъде поета от ново поколение усъвършенствани компютърни програми за открития в различни области на науката, с което подходът ще бъде разпространен и в други области на образованието.

Ученето чрез открития цели да разгърне максимално творческия потенциал на един ученик или студент. Наличната понастоящем методология е сходна с методологията за писане на реферат. Предвижда се в началото учениците и студентите да дискутират темата, след което да започнат да издирват материали по темата, като активно използват интернет. След това те проучват тези материали, като се стремят да намерят общите закономерности и да видят нещата от своя гледна точка. Ученикът и студентът използват активно компютърни програми. Ако се изследват геометрични фигури и закономерности, те използват компютърни програми за динамична геометрия от типа на C.a.R. или GeoGebra, като провеждат експерименти и се стремят да формулират хипотези за изследваните понятия. В изследователския подход, т.е. в ученето чрез открития, се набляга върху експериментите и формулирането на хипотези, защото при изградена хипотеза ученикът или студентът вече предполага какъв е отговорът, а с отговора най-лесно може да намери доказателството. Учениците и студентите изготвят доказателство, с което хипотезата става теорема. При приключило изследване те оформят заключителен документ, който съдържа получените резултати. Изисква се този документ да бъде такъв, че да може лесно да бъде прочетен от други потребители. Документът може да се нарече есе или по-традиционно – реферат. За ролята на рефератите в образователния процес виж също така (Гроздев & Деков, 2014e). По същество, при ученето чрез открития ученикът или студентът действа така, както действа ученият, когато провежда научни изследвания. За да бъде активиран състезателният елемент, ученето чрез открития насърчава провеждането на конкурси за класиране на реферати. В крайна сметка, ученето чрез открития може да бъде сумирано в следната последователност: Въпрос, Събиране и проучване на известните резултати, Експерименти, Хипотеза, Доказателство, Записване на резултатите, Популяризиране на резултатите.

Методологията, изложена в тази статия, включва използването от ученика или студента на компютърната програма за открития „Откривател", програма за компютърна алгебра като Мейпъл и програма за динамична геометрия като C.a.R. или GeoGebra. Усвояването и систематичното използване на програми от тези класове е важно условие за повишаване на нивото на образование.

Евклидовата геометрия е богата на теми и възможностите на „Откривател" могат да бъдат използвани в много направления. В тази статия ще разгледаме някои аспекти от използването на „Откривател" при ученето чрез открития. Авторите предполагат, че читателят е запознат с техните статии, посочени в литературата.

1. Формулиране на хипотези

Формулирането на хипотеза е ключов момент в изследователския подход изобщо. Съгласно текущите концепции на ученето чрез открития ученикът или студентът формулира хипотеза на базата на свои предишни знания и на базата на събраните от него материали. Експерименти могат да бъдат проведени с помощта на компютърна програма за динамична геометрия, като тези експерименти могат да доведат до формулиране на хипотеза виж (Гроздев & Ненков, 2009), (Гроздев & Ненков, 2010). Съществено нов елемент е провеждането на експерименти и формулирането на хипотеза с помощта на компютърната програма „Откривател". Авторите предполагат, че читателят е запознат с техни предишни статии за „Откривател".

Ще разгледаме един пример. Да напомним, че *C*-коника се нарича крива от втора степен, за която върховете на даден триъгълник, наречен референтен триъгълник, лежат върху кривата. За *C*-кониките виж статията (Гроздев & Деков, 2014f). Нека въпросът е следният: Кои забележителни точки на референтния триъгълник лежат върху дадена *C*-коника? Тук знанията, които имаме и които могат да бъдат намерени в интернет, имат ограничена приложимост. Експерименти с помощта на компютърна програма за динамична геометрия могат да помогнат, но частично, освен това провеждането на такива експерименти е трудоемко. Компютърната програма „Откривател“ променя ситуацията. Като пример можем да разгледаме хиперболата на Кипърт (“Kiepert Hyperbola”), която е една от класическите криви в геометрията на триъгълника, изучена за първи път от Лудвиг Кипърт през 1869 г., виж (Kiepert, 1869). Преди около 20 години Eddy и Fritsch (Eddy & Fritsch, 1994) са открили две забележителни точки, които лежат върху тази крива, а именно, точката на Спикър и третата точка на Брокар (съответно теореми 3 и 4 в цитираната статия). Преди около десет години списъкът е разширен до 44 точки, виж (Weisstein, Kiepert Hyperbola). Следващото придвижване в тази посока е с помощта на „Откривател“, като авторите на тази статия са намерили над 2000 забележителни точки, които лежат върху разглежданата крива, виж (Grozdev & Dekov, 2013c). Да отбележим, че този списък може да бъде разширен до над 10 000 точки при ново издание на „Откривател“.

Да разгледаме още един пример. В тази статия ползваме означението X(n), n ≥ 1 за забележителна точка на триъгълника съгласно (Kimberling).

Пример 1. Кои забележителни точки на триъгълника лежат върху *C*-кониката, имаща за перспектор точката на Спикър (Spieker Center, X(10))?

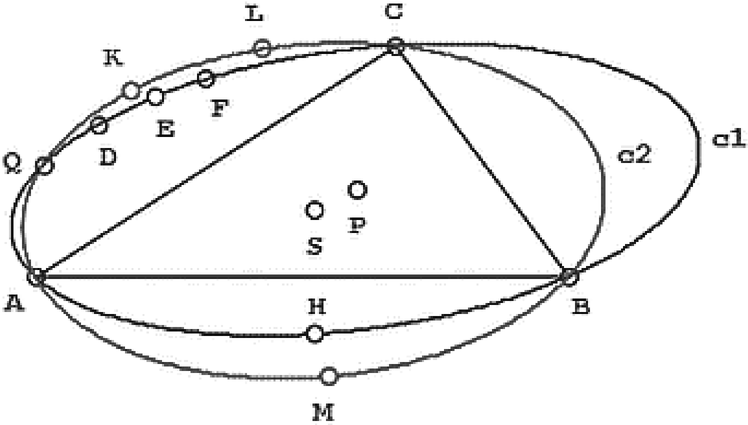
Тази *C*-коника, която ще означим с *c1*, е разгледана в (Yui, 2001, Chap.9, Exercises). В (Yui, 2001) са дадени формули, с които можем да намерим центъра на една *C*-коника, а също така две точки, които лежат върху *C*-кониката, наречени четвърта и пета пресечна точка. Първите три пресечни точки са пресечните точки на *C*-кониката с върховете на референтния триъгълник *ABC*, четвъртата пресечна точка е пресечната точка на *C*-кониката с окръжността, описана около Δ*ABC*, а петата пресечна точка е пресечната точка на *C*-кониката с нейната асоциирана С-коника. Асоциираната *C*-коника на разглежданата *C*-коника, която ще означаваме *c2*, е *C*-кониката с перспектор точката на Гринбърг (Grinberg Point, X(37)). Целесъобразно е да изучаваме едновременно една *C*-коника и нейната асоциирана *C*-коника.

Ще използваме част от базата данни на „Откривател“ и ще намерим забележителни точки на триъгълника, които лежат върху изследваните *C*-коники. Да отбележим, че намерените от „Откривател“ точки лежат върху *C*-кониката при фиксиран вид на триъгълника *ABC* (например остроъгълен или тъпоъгълен), като в повечето случаи точките лежат върху С-кониката независимо от вида на триъгълника *ABC*. За всяка точка потребителят трябва да направи проверка и да очертае вида на триъгълника *ABC*, при който точката лежи върху *C*-кониката. Авторите на „Откривател“ планират да създадат модул, който извършва посочения анализ, но засега този модул не е готов.

Резултатът е даден във файлове, приложени към тази статия, намиращи се в папката “Example 1”. Виждаме, че „Откривател“ е намерил 16 точки, които лежат върху *c1*, от които 7 точки са включени в (Kimberling). Върху *c2* лежат 20 точки, от които 8 са включени в (Kimberling). Намирането на точките можем да третираме като експеримент, а хипотезата е следната: Намерените от „Откривател“ точки лежат върху съответните *C*-коники.

Следващата стъпка е анализ и доказателство на хипотезата. Тук са възможни различни подходи. Този въпрос е разгледан в други статии на авторите и тук ще го пропуснем.

По-нататък ученикът или студентът може да използва компютърна програма за динамична геометрия, за да изготви графики на *C*-кониките заедно с точките върху тях. Компютърната програма служи и за визуална проверка на хипотезата – може да се види дали една точка лежи върху изследваната крива. Първо, трябва да построим *C*-кониките. Дадена програма за динамична геометрия дава възможност да се построи една *C*-коника по пет точки, които лежат върху нея. В случая с *C*-кониките първите три точки са върховете на референтния триъгълник *ABC*. Останалите две точки избираме от списъка с точки, които лежат върху *C*-кониката, и ги построяваме с електронни линийка и пергел.



Фигура 1

На фигура 1 са начертани двете *C*-коники, като са отбелязани и някои точки върху тях. На фиг.1 *S* е точката на Спикър, *P* е точката на Гринбърг. Двете *C*-коники минават през върховете на триъгълника *ABC.* Точките *D* (точка X(835)) и *K* (точка X(100)) са четвъртите пресечни точки съответно на *c1* и *c2*, а точка *Q* е петата пресечна точка, която е обща за двете *C*-коники. Освен това начертали сме и някои от точките, които лежат върху *C*-кониките. Точка *E* е точката "Isotomic Conjugate of the Anticomplement of the Anticomplement of the Center of the Stevanovic Circle". Точка *F* е точката "Ceva Quotient of the Isotomic Conjugate of the Feuerbach Point and the Feuerbach Perspector" (точка X(4552). Точка *H* е точката "Isotomic Conjugate of the Anticomplement of the Anticomplement of the Inverse of the Gergonne Point in the Incircle". Точка *L* е точката "Ceva Quotient of the Isogonal Conjugate of the Feuerbach Point and the Incenter" (точка X(4551)). Точка *M* е точката "Isotomic Conjugate of the Anticomplement of the Schroder Point". Точки *E*, *H* и *M* не са включени в (Kimberling), както се вижда от приложените файлове.

Файлове, които са приложени към пример 1 от тази статия, съдържат твърдения, които могат да бъдат третирани като нови теореми за известни точки, като под „известни точки" ще разбираме точките, включени в енциклопедията (Kimberling). С тези теореми, снабдени с доказателства, могат да бъдат допълнени съответните статии в (Kimberling). Например в статията X(190) (Kimberling) липсва теоремата, че точката X(190) лежи върху *C*-кониката с перспектор точката на Спикър. Статията би могла да бъде попълнена с тази теорема. Обзори за *C*-коники като този, съдържащ се в (Yiu, 2001), също могат да бъдат допълнени.

Колко *C*-коники могат да бъдат изследвани с посочения метод? На всяка забележителна точка на триъгълника съответства една *C*-коника, така че броят на *C*-кониките е равен на броя на забележителните точки на триъгълника. Освен *C*-кониките в литературата по геометрия на триъгълника има описани още различни други криви от втора степен, които чакат изследване с помощта на „Откривател". Интерес представлява и изучаването на многобройните и интересни забележителни окръжности в геометрията на триъгълника.

2. Отново за формулирането на хипотези

В предишния параграф стана дума за теореми за известни точки. Нека да разгледаме още един пример за формулиране на хипотеза.

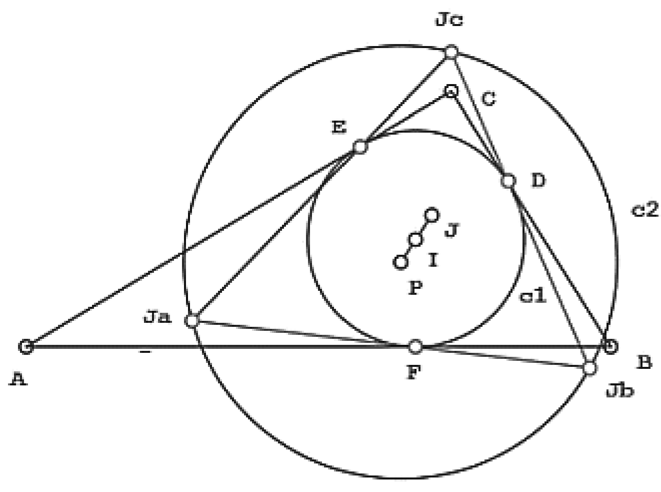
Пример 2. Какви нови теореми можем да открием за точката "First Mid-Arc Point (точка X(177))"?

Ще напомним, че тази точка е центърът на окръжността, вписана в триъгълника, върховете на който са допирните точки на страните на референтния триъгълник

ABC и окръжността, вписана в този триъгълник. По-долу ще дадем като пример едно от намерените от „Откривател“ твърдения за точката “First Mid-Arc Point”, като ще го формулираме като хипотеза и като задача.

Хипотеза. The First Mid-Arc Point is the External Center of Similitude of the Incircle and the Excentral Circle of the Intouch Triangle.

Задача 1. Нека *D*, *E* и *F* са допирните точки на вписаната в Δ*ABC* окръжност, означена с *c1*, и съответно страните *BC*, *CA* и *AB*. Нека *J* е центърът на вписаната в Δ*DEF* окръжност. Нека *Ja*, *Jb* и *Jc* са центровете на външновписаните окръжности на Δ*DEF*, а *c2* е окръжността, описана около Δ*JaJbJc*. Докажете, че точка *J* е външният център на хомотетия на окръжностите *c1* и *c2*.



Фигура 2

Фигура 2 илюстрира задача 1. Означенията на фиг. 2 са както в условието на задачата. Освен това точка *I* е центърът на вписаната в Δ*ABC* окръжност, а точка *P* е центърът на описаната около Δ*JaJbJc* окръжност.

Можем да третираме използването на „Откривател“ като провеждане на експеримент, който помага да бъде формулирана хипотеза. Такъв експеримент може да бъда проведен не само за точка, която е налична в (Kimberling), но и за точка, която не е включена в тази енциклопедия, виж например (Grozdev & Dekov, 2014g). Могат да бъдат изследвани и други геометрични обекти като триъгълници, окръжности и т.н.

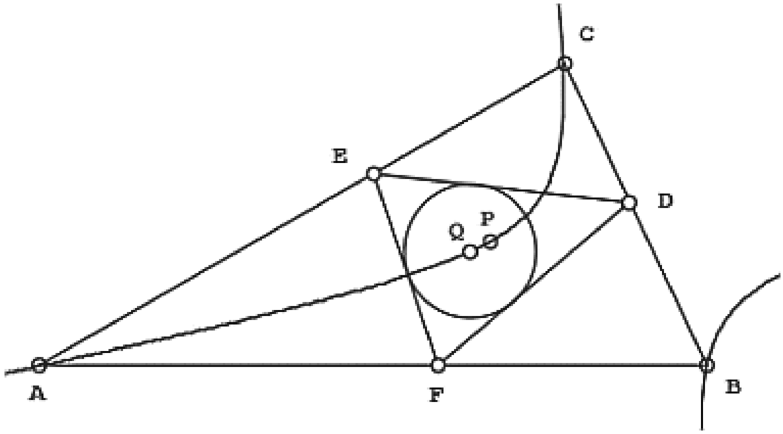
3. От частното към общото

Един от основните методи на изследване в математиката е обобщението.

Компютърната програма „Откривател“ произвежда голям брой твърдения. Преглеждайки тези твърдения, често забелязваме закономерности, които можем да формулираме като хипотези.

Пример 3. Хипотеза за точки, които лежат върху хиперболата на Кипърт.

Както беше казано по-горе, през 1994 г. Eddy и Fritsch доказват теорема, която гласи, че точката на Спикър лежи върху хиперболата на Кипърт, т.е. върху хиперболата на Кипърт лежи центърът на окръжността, вписана в медиалния триъгълник на ΔABC. Списък с точки, които лежат върху хиперболата на Кипърт, произведен от „Откривател“, е приложен към статията (Grozdev & Dekov, 2013c). Разглеждайки списъка, забелязваме следната закономерност: ако една точка лежи върху хиперболата на Кипърт, то центърът на окръжността, вписана в триъгълника на Чева на точката, също лежи върху хиперболата на Кипърт. Можем да приемем това твърдение като хипотеза, която е формулирана на базата на налични примери. Визуална проверка на хипотезата може да бъде извършена с помощта на програма за динамична геометрия.



Фигура 3

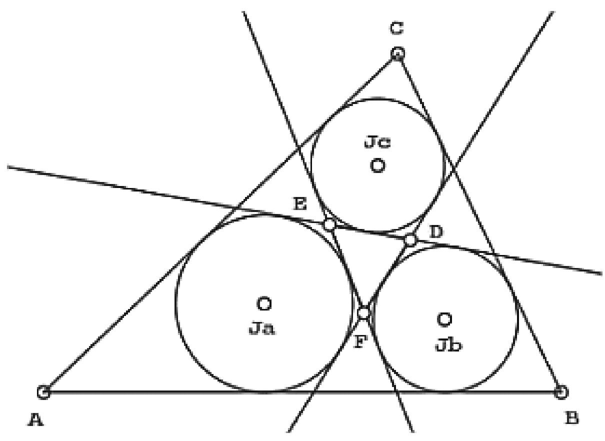
Фигура 3 илюстрира хипотезата. На фиг. 3 точка P е произволна точка, която лежи върху хиперболата на Кипърт, ΔDEF е триъгълникът на Чева на точка P, точка Q е центърът на окръжността, вписана в ΔDEF. Като движим с мишката точка P по хиперболата на Кипърт, виждаме, че точка Q също се движи върху хиперболата.

След като ученикът или студентът е формулирал хипотезата и визуално я е потвърдил, необходимо е да я докаже. След доказателството хипотезата ще стане теорема и тази теорема ще може да бъде използвана за намирането на много нови точки, които лежат върху хиперболата на Кипърт. Формулирането на хипотезата можем да определим и като приложение на метода „от частното към общото“. „Откривател” произвежда хиляди разнообразни твърдения, които дават богати възможности за анализ и формулиране на различни хипотези.

4. Изследване посредством въпроси и отговори

В последно време се възражда интересът към геометричните построения с линийка и пергел. Този интерес е стимулиран от програмите за динамична геометрия, където един от основните начини за построяване на геометричните обекти е построение с линийка и пергел.

Геометричните построения са една от областите, където творческите способности на ученика могат да бъдат разгърнати. Тук са редица класически задачи, като например задачата за построяване на окръжностите на Аполон, допиращи се до три дадени окръжности, задачата за построяване на окръжностите на Малфати и редица други. Един геометричен обект може да бъде построен по различни начини и въпросът кое построение е най-добро, е съществен. „Най-добро“ построение може да бъде третирано по различни начини, един от които е предложен от Лазаров и Табов, виж (Лазаров & Табов, 1988) и (Табов & Лазаров, 1990). Ще разгледаме пример за използването на „Откривател“ при построяване на геометричен обект с лиинйка и пергел.



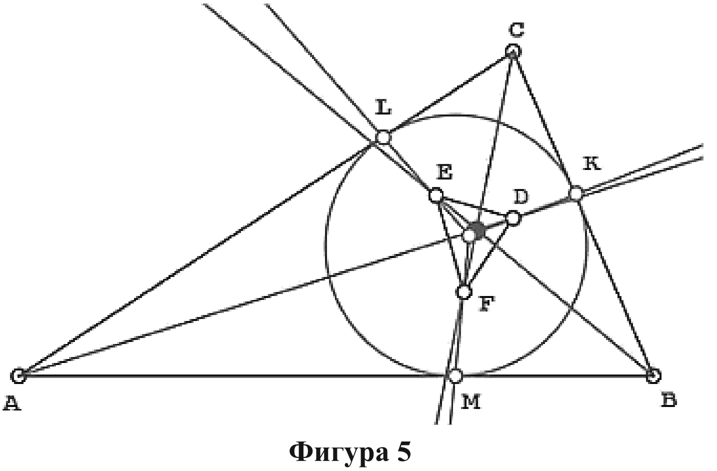
Фигура 4

Ще напомним, че централен триъгълник на Иф (Yff) наричаме триъгълник, всяка от външновписаните окръжности на който се допира до две от страните на ΔABC. На фиг. 4 ΔDEF е триъгълникът на Иф, а окръжностите с центрове *Ja*, *Jb* и *Jc* са външновписаните окръжности на ΔDEF.

Пример 4. Да се построи с линийка и пергел централният триъгълник на Иф.

При подхода чрез открития като първа стъпка ученикът или студентът проучва задачата и сведенията, които са налични в интернет и които могат да бъдат полезни за решаването на задачата. След това ученикът или студентът се стреми да намери решение на задачата. Експерименти могат да бъдат проведени с програма за динамична геометрия и с програма за открития. По-долу ще дадем един подход към решаването на задачата, който може да бъде използван за построяване и на други интересни триъгълници. Приложен към триъгълника на Иф, подходът е следният. Построяваме два триъгълника, които са перспективни с триъгълника на Иф, и построяваме съответните перспектори, след което можем да построим триъгълника на Иф, както е посочено по-долу.

Нека да възложим на „Откривател" да намери триъгълници, които са перспективни с триъгълника на Иф, а да намери също така и съответните перспектори. „Откривател" посочва кои от перспекторите са точки, които са включени в (Kimberling). Файловете с резултатите са приложени към тази статия. Виждаме, че „Откривател" намира 227 триъгълника, които са перспективни с триъгълника на Иф, като в пет от случаите перспекторите са точки, които са включени в (Kimberling). Нека да изберем триъгълниците и перспекторите, дадени на първите два реда в таблицата Table P-X, от файла "5_Table_P-X.php.htm" в папката "Perspectors", която е подпапка на папката "Example 4".



Фигура 5

Фигура 5 илюстрира построението на триъгълника на Иф. На чертежа няма удобно място за букви, с които да означим две от точките, затова едната точка е запълнена. Запълнената неозначена точка, която ще означаваме с P, е точката "First Mid-Arc Point", която е разгледана по-горе в пример 2. Незапълнената неозначена точка, която ще означаваме с Q , е точката "Yff Center of Conguence". Точки K, L и M са допирните точки на вписаната в ΔABC окръжност, съответно със страните BC, CA и AB. Точка D е пресечната точка на правите AP и QK, точка E е пресечната точка на правите BP и QL, а точка F е пресечната точка на правите CP и QM. Тогава ΔDEF е триъгълникът на Иф. При това построение приемаме, че можем да построим точката "Yff Center of Conguence". За построяването на тази точка виж (Гроздев & Деков, 2013b).

За построяването на триъгълника на Иф можем да използваме и друга двойка построими перспективни с триъгълника на Иф триъгълници и съответните построими перспектори. В посочената по-горе таблица имаме пет реда. Колко решения на задачата можем да получим? Освен това във файла "3_List_D.php.htm", който е в папката "Perspectors", има списък с други 222 триъгълника, които са перспективни с триъгълника на Иф. За да използваме триъгълник от този списък, трябва да можем да построим съответния перспектор Трябва пак да се обърнем към „Откривател", за да намерим твърдения, които да ни помогнат да построим съответния перспектор. При построителните задачи често се налага да възлагаме поредица от задачи на „Откривател". Поради тази причина прототипът на „Откривател" беше наречен „Машина за въпроси и отговори". Тук ще пропуснем по-нататъшното изследване на задачата с помощта на „Откривател".

Методът, който използвахме за построяване на триъгълника на Иф, е използван от авторите и в статията (Гроздев & Деков, 2014d). Ще отбележим, че ефективното използване на този метод е възможно само ако прилагаме компютърна програма за открития от типа на „Откривател". Съществуват и редица други методи за построения, които са ефективни при използването на програма за открития. Това е обширна тема, която тепърва ще бъде разработвана.

5. От решаване на задачи към производство на задачи

Решаването на задачи по математика, по общо мнение, е най-ефективният начин за усвояване на математиката. Това едва ли ще се промени в бъдеще. Решаването на задачи обаче може да бъде допълнено с прилагането на експерименталния подход и особено неговата висша форма – ученето чрез открития. При този подход „Откривател" открива голям брой твърдения, всяко от които може да бъде преформулирано като задача за доказателство, евентуално и като задача за построение. Ще отбележим, че „Откривател" може да произвежда и изчислителни задачи.

Задачите, които могат да бъдат произведени от „Откривател“, са с различна степен на трудност. Сред тях има задачи по геометрия, подходящи за работа в клас, за кръжоци, подготовка за олимпиади, за подготовка на реферати и т.н. Преподавателите по аналитична геометрия във висшите училища могат да обогатят лекциите и упражненията си с редица резултати, произведени от „Откривател“, а по-задълбочени изследвания могат да послужат за изготвяне на дипломни работи. Разработването на теми от Евклидовата геометрия като дипломни работи е особено насърчително при бъдещи учители по математика.

В предишни статии на авторите бяха дадени примери за преформулиране на твърдения на „Откривател“ като задачи за доказателство или задачи за построение, поради което тук ще пропуснем този въпрос, виж например (Гроздев & Деков, 2013b).

6. Популяризиране на научните резултати

Ученето чрез открития предвижда рефератите на учениците и студентите да бъдат представени за участие в конкурси, специално обявени за насърчаване на писането на реферати. В статията (Гроздев & Деков, 2014e) се пропагандира тезата, че рефератите трябва да бъдат публикувани в интернет, като за целта всяко училище и университет може да създаде собствено онлайн списание. Издаването на такова списание не изисква финанси, а инициативност.

При ученето чрез открития има допълнителни възможности за популяризиране на получените резултати. Ученикът или студентът разполага с нови факти, които не са известни по света. Той може да ги използва по различни начини, може да предложи новополучените факти за включване в съответни статии на съществуващи енциклопедии, като популярната онлайн енциклопедия (Weisstein). Ще отбележим, че тази енциклопедия има уеб формуляр, предназначен за потребителите да предлагат нови научни резултати за включване в енциклопедията. Включването на резултатите в енциклопедията ще означава, че името на ученика или студента ще бъде включено в енциклопедията. Това е награда и стимул за тях. Потребителят може евентуално да предложи нови резултати и в специализирани енциклопедии като (Kimberling), както и да обогати с нови сведения съответните статии в Уикипедия – изданието на български и евентуално на английски език. Реферати, съдържащи значими научни резултати, могат да бъдат предложени за публикуване в специализирани научни списания. Реферат, написани с помощта на „Откривател“, задължително трябва да бъде предложен за включване в енциклопедията (CGEEG), като най-добрите ще бъдат отпечатани и в (JCGM).

Както авторите отбелязват в (Гроздев & Деков, 2014е), енциклопедията (CGEEG) ще играе ролята и на форум за обмен на идеи на студенти, ученици и преподаватели. В този форум могат да бъдат обсъждани нови резултати, интересни теми за изследване и т.н.

Заключителни бележки

Основната разлика при „ученето чрез открития“ и „ученето чрез преоткрития“ е в крайния резултат. Ученето чрез открития дава възможност на ученика или студента да получи по-задълбочени и по-интересни резултати, в т.ч. и сериозни научни резултати, които са неизвестни на света преди проведеното изследване. Разработването на методически указания за учителите и преподавателите за прилагане на „ученето чрез открития“ в ежедневната им работа тепърва предстои. Необходима е и активна работа за популяризиране на новия подход в образованието, но това е една благодатна задача. Активизирането на интереса на учениците и студентите, допълването на рутинното преподаване с изследователски процес, при който учениците и студентите разгръщат творческите си способности, е ключът към повишаване ефективността на образователния процес.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Към статията е приложен файлът “discoveries.zip”, който съдържа файловете, цитирани в тази статия. Файлът “discoveries.zip” може да бъде изтеглен от уеб страницата на списанието.

БЕЛЕЖКИ

1. Kimberling, C., Kimberling’s Encyclopedia of Triangle Centers, http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html
2. Weisstein, E. W., “Kiepert Hyperbola”, MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html
3. Wikipedia, Yff center of congruence, http://en.wikipedia.org/wiki/Yff_center_of_congruence
4. Yiu, P. (2001). Introduction to the Geometry of the Triangle, Florida Atlantic University lecture notes, http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry130411.pdf
5. Inquiry in Mathematics Education, http://fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html
6. CGEEG, Computer-Generated Encyclopedia of Euclidean Geometry, http://eg-enc.webege.com/

7. JCGM, Journal of Computer-Generated Mathematics, http://www.ddekov.eu/j/

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. & Лазаров, Б. (2013). Експерименталната работа в училище. *Математика и информатика*, т. 56, 2, 103 – 111.

Гроздев, С. & Ненков, В. (2009). Една крива от втора степен за две точки на Чева. *Математика и математическо образование, Конференция на СМБ*, Боровец, 1 – 5 април 2009.

Гроздев, С. & Ненков, В. (2010). Върху един клас криви от втора степен. *Математика и математическо образование, Конференция на СМБ*, Албена, 6 – 10 април 2010.

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012a). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*, София, Архимед.

Гроздев, С. & Ненков, В. (2012b). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*, София, Архимед.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2013a). По пътя към първата компютърно генерирана енциклопедия. *Математика и информатика*, т. 56, 1, 49 – 59.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2013b). Някои приложения на компютърната програма „Откривател“. *Математика и информатика*, т. 56, 5, 444 – 455.

Grozdev, S. & Dekov, D. (2013c). Points on the Kiepert Hyperbola. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 8, no. 2, http://www.ddekov.eu/j/contents.htm#2013.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014a). Компютърно генерирана математика: Разработване на тема от Евклидовата геометрия. *Математика и информатика*, т. 57, 1, 34 – 42.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014b). Компютърно генерирана математика: Произведения на Коснита в Евклидовата геометрия. *Математика и информатика*, т. 57.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014c). Машинен подход към Евклидовата геометрия: Триъгълници на Ойлер, произведения на Ойлер и трансформации на Ойлер. *Математика и информатика*, т. 57.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014d). Компютърно генерирана математика: Бележка за триъгълника на Хаимов. *Математика и информатика*, т. 57.

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014e). Компютърната програма „Откривател“ и компютърно генерираната енциклопедия. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no. 2, http://www.ddekov.eu/j/

Гроздев, С. & Деков, Д. (2014f). Изучаване с помощта на компютърната програма „Откривател“ на криви от втора степен, описани около даден триъгълник. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 3, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014g). Learning through Discoveries. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no. 1, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014h). A New Relation between the Steiner Circumellipse and the Kiepert Hyperbola. *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no. 4, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014i). *Encyclopedia of Computer-Generated Euclidean Geometry*, http://eg-enc.webege.com/

Ненков, В. (2005). Някои геометрични места в равнината на триъгълника. *Математика плюс, 2005, 1*, 53 – 59.

Ненков, В. (2005). Четири криви от втора степен, минаващи през една точка. *Математика плюс, 2*, 61 – 66.

Ненков, В. (2007). Две описани конични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование, 36*, 392 – 396.

Nenkov, V. (2007). Euler's Line and Euler's Curve Dependent by a Point. New Trends in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, Bulgaria 6 – 8 July, 2007.

Ненков, В. (2007). Някои геометрични места, породени от един вид преобразувания в равнината на триъгълника. *Математика плюс, 3*, 67 – 70.

Ненков, В. (2007). Няколко свойства на спрегнатия триъгълник. *Математика и информатика, 6*, 16 – 21.

Ненков, В. (2008). Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика, 2*, 35 – 42.

Ненков, В. (2008). Компютърът – творчески помощник при създаването на геометрични обобщения. Научни трудове. Интердисциплинарен форум България и Русия – посоки на взаимност, 14 – 17 декември, 2008, Русе, България, 213 – 218.

Ненков, В. (2009). Няколко афинно породени свойства на елипсата. *Математика плюс, 2*, 54 – 59.

Ненков, В. (2009). Няколко етюда за вписани конични сечения. *Математика и информатика, 5*, 17 – 27.

Ненков, В. (2010). Множество на центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения. *Математика и информатика, 4*, 24 – 30.

Ненков, В. (2010) Няколко свойства на Фойербаховата конфигурация. *Математика и информатика, 5*, 42 – 61.

Ненков, В. (2011). Множество на центровете на описаните за четириъгълник конични сечения. *Математика и информатика, 4*, 15 – 20.

Лазаров, Б. & Табов, Й. (1988). Оценки на алгоритми за геометрични построения. *Обучението по математика и информатика*, № 6, 1 – 4.

Табов, Й. & Лазаров, Б. (1990). *Геометрични построения*, София: Народна просвета.
Eddy, R. & Fritsch, R. (1994). The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle. *Mathematics Magazine*, vol. 67, no. 3, pp. 188 – 205.
Kiepert, L. (1869). Solution de question 864. *Nouvelles Annales de Mathematiques*, vol. 8, pp.40 – 42.

REFERENCES:

Grozdev, S. & Lazarov, B. (2013). Eksperimentalnata rabota v uchilishte, *Matematika i informatika*, t. 56, 2, 103 – 111
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2009). Edna kriva ot vtora stepen za dve tochki na Cheva, *Matematika i matematichesko obrazovanie, Konferentsiya na SMB*, Borovets, 1-5 april 2009.
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2010). Varhu edin klas krivi ot vtora stepen, *Matematika i matematichesko obrazovanie, Konferentsiya na SMB*, Albena, 6-10 april 2010.
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012a). *Tri zabelezhitelni tochki varhu medianite na triagalnika*, Sofiya, Arhimed.
Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012b). *Okolo ortotsentara v ravninata i prostranstvoto*, Sofiya, Arhimed.
Grozdev, S. & Dekov, D. (2013a). Po patya kam parvata kompyutarno-generirana entsiklopediya, *Matematika i informatika*, t. 56, 1, 49 – 59.
Grozdev, S. & Dekov, D. (2013b). Nyakoi prilozheniya na kompyutarnata programa "Otkrivatel", *Matematika i informatika*, t. 56, 5, 444 – 455.
Grozdev, S. & Dekov, D. (2013c). Points on the Kiepert Hyperbola, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 8, no. 2, http://www.ddekov.eu/j/contents.htm#2013.
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014a). Kompyutarno-generirana matematika: Razrabotvane na tema ot Evklidovata geometriya, *Matematika i informatika*, t. 57, 1, 34 – 42.
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014b). Kompyutarno-generirana matematika: Proizvedeniya na Kosnita v Evklidovata geometriya, *Matematika i informatika*, t. 57,
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014c). Mashinen podhod kam Evklidovata geometriya: Triagalnitsi na Oyler, proizvedeniya na Oyler i transformatsii na Oyler, *Matematika i informatika*, t. 57,
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014d). Kompyutarno-generirana matematika: Belezhka za triagalnika na Haimov, *Matematika i informatik*i, t. 57,
Grozdev, S. & Dekov, D. (2014e). Kompyutarnata programa "Otkrivatel" i kompyutarnogeneriranata entsiklopediya, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no. 2, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014f). Izuchavane s pomoshtta na kompyutarnata programa “Otkrivatel” na krivi ot vtora stepen, opisani okolo daden triagalnik, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no 3, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014g). Learning through Discoveries, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no. 1, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014h). A New Relation between the Steiner Circumellipse and the Kiepert Hyperbola, *Journal of Computer-Generated Mathematics*, vol. 9, no. 4, http://www.ddekov.eu/j/

Grozdev, S. & Dekov, D. (2014i*). Encyclopedia of Computer-Generated Euclidean Geometry*, http://eg-enc.webege.com/

Nenkov, V. (2005). Nyakoi geometrichni mesta v ravninata na triagalnika. *Matematika plyus*, 2005, 1, 53 – 59.

Nenkov, V. (2005). Chetiri krivi ot vtora stepen, minavashti prez edna tochka. *Matematika plyus*, 2, 61 – 66.

Nenkov, V. (2007). Dve opisani konichni secheniya i dve porodeni ot tyah mnozhestva ot pravi. *Matematika i matematichesko obrazovanie*, 36, 392 – 396.

Nenkov, V. (2007). Euler’s Line and Euler’s Curve Dependent by a Point. New Trends in Mathematics and Informatics, Jubilee International Conference 60 years Institute of Mathematics and Informatics Bulgarian Academy Sciences, Abstracts, Sofia, Bulgaria 6-8 July, 2007.

Nenkov, V. (2007). Nyakoi geometrichni mesta, porodeni ot edin vid preobrazuvaniya v ravninata na triagalnika. *Matematika plyus*, 3, 67 – 70.

Nenkov, V. (2007). Nyakolko svoystva na spregnatiya triagalnik. *Matematika i informatika*, 6, 16 – 21.

Nenkov, V. (2008). Obobshtenie na teoremata na Foyerbah. *Matematika i informatika*, 2, 35 – 42.

Nenkov, V. (2008). Kompyutarat – tvorcheski pomoshtnik pri sazdavaneto na geometrichni obobshteniya. Nauchni trudove. Interdistsiplinaren forum Balgariya i Rusiya – posoki na vzaimnost, 14 – 17 dekemvri, 2008, Ruse, Balgariya, 213- 218.

Nenkov, V. (2009). Nyakolko afinno porodeni svoystva na elipsata. *Matematika plyus*, 2, 54 – 59.

Nenkov, V. (2009). Nyakolko etyuda za vpisani konichni secheniya. *Matematika i informatika*, 5, 17 – 27.

Nenkov, V. (2010). Mnozhestvo na tsentrovete na vpisanite v chetiriagalnik konichni secheniya. *Matematika i informatika*, 4, 24 – 30.

Nenkov, V. (2010) Nyakolko svoystva na Foyerbahovata konfiguratsiya. *Matematika i informatika*, 5, 42 – 61.

Nenkov, V. (2011). Mnozhestvo na tsentrovete na opisanite za chetiriagalnik konichni secheniya. *Matematika i informatika*, 4, 15 – 20.

Lazarov, B. & Tabov, Y. (1988). Otsenki na algoritmi za geometrichni postroeniya, *Obuchenieto po matematika i informatika*, № 6, 1 – 4.
Tabov, Y. & Lazarov, B. (1990). *Geometrichni postroeniya*, Sofiya: Narodna prosveta.
Eddy, R. & Fritsch, R. (1994). The Conics of Ludwig Kiepert: A Comprehensive Lesson in the Geometry of the Triangle, *Mathematics Magazine*, vol. 67, no. 3, pp. 188 – 205.
Kiepert, L. (1869). Solution de question 864, *Nouvelles Annales de Mathematiques*, vol. 8, pp.40 – 42.

LEARNING THROUGH DISCOVERIES – A NEW EFFECTIVE APPROACH WITHIN LEARNING THROUGH EXPERIMENTATION

Abstract. Recently the experimental approach in education, known as "learning through experimentation" or "learning through rediscoveries" and incorrectly called to be "research approach", becomes more popular. It is important to note, that in learning through rediscoveries during the experimentation process the student obtains unknown to him/her facts, which could turn out to be new scientific results in some cases. It is essential to obtain a new scientific result and this could be put as a goal in education. In this case it is convenient to call the coresponding learning to be „learning through discoveries". In such a way two directions are formed in the experimental approach, i.e. in learning through ecperimentation: learning through rediscoveries and learning through discoveries. It is correct, that exactly learning throgh discoveries should be called to be reaserch approach and not learning through rediscoveries. Namely, the present paper is dedicated to learning through discoveries. The authors discuss some examples how the proposed approach could be applied.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Str., bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Deko Dekov, Assoc. Prof.**
81, Zahari Knjazhevski Str.
Stara Zagora, Bulgaria
E-mail: ddekov1@gmail.com