Educational Technologies
Образователни технологии

МАТЕМАТИЧЕСКИ МОДЕЛИ НА РЕАЛНИ ПРОЦЕСИ И ПРИЛОЖЕНИЯ НА СИСТЕМИТЕ ЗА КОМПЮТЪРНА АЛГЕБРА ЗА ТЯХНОТО ИЗСЛЕДВАНЕ
Част втора

Тихомир Иванов
Софийски университет „Св. Климент Охридски“,
Институт по математика и информатика – БАН

Резюме. Настоящата статия е продължение на темата, започната в бр. 5/2014 на сп. „Математика и информатика“. Стъпвайки на дискретния логистичен модел, за който говорихме в част 1, построяваме модел, описващ взаимоотношения от тип хищник – жертва между две популации. Целта ни е да покажем как даден модел може да се използва като градивен елемент на друг, по-сложен модел. Илюстрираме и още една много важна техника в математическото моделиране – създаването на модели, базирани на експериментални данни.

Keywords: mathematical modeling, computer algebra systems, education

1. Въведение

В първата част на темата „Математически модели на реални процеси и приложения на системите за компютърна алгебра за тяхното изследване“ (Иванов, 2, 2014) на базата на два примера показахме какво представлява математическият модел – най общо казано, това е описание на даден процес на езика на математиката. Обикновено той представлява връзка (функция, уравнение или система от уравнения и др.) между основните величини, описващи процеса. Казахме, че всеки математически модел е всъщност една абстракция на реалния процес. Той включва само най-съществените за процеса величини. В противен случай моделът би бил толкова сложен, че неговото изследване би било невъзможно. Показахме и че изследването на един математически модел, т.е. решаването на съответната математическа задача, често води до значителни технически пресмятания. За тях е удобно да се използва математически софтуер – например СКА Mathematica. Накрая, след като сме получили математически резултати, ние ги интерпретираме, за да получим информация за реалния процес.

В настоящата статия продължаваме въведението в света на математическото моделиране и в приложенията на системите за компютърна алгебра. Освен да разширим набора от практически примери, показващи ни как един реален процес от заобикалящия ни свят се описва на езика на математиката, си поставяме и следните две цели:

- Да покажем как един математически модел може да се използва като градивен елемент на друг, по-сложен модел, описващ по-сложна практическа ситуация.
- Да покажем как се съставя математически модел на базата на експериментални данни.

В параграф 2 стъпваме на дискретния логистичен модел, описващ развитието на една популация във времето, и съставяме модел, описващ взаимодействието между две популации – хищник и жертва. В параграф 3 коментираме много важния въпрос за съставянето на математически модели на базата на експериментални данни.

2. Математическо моделиране на екологична система от тип хищник – жертва

Теми: Числови редици, Функции, Граници на функции, Системи алгебрични уравнения

В статията (Иванов, 2, 2014) започнахме темата „Математическо моделиране в популационната динамика“. Разгледахме два математически модела, които описват изменението в числеността на една популация във времето. Изолираното съществуване на дадена популация е възможно в лабораторни условия и е важно за редица биотехнологични процеси. В естествените екосистеми обаче популациите съществуват съвместно с други популации. Ето защо е важно да можем да опишем възникващите взаимодействия помежду им. Основните взаимоотношения между две популации са следните:

- Конкуренция – при нея двете популации влияят негативно една на друга. Това може да се получи например вследствие на конкуриране за определен ресурс (храна, жизнено пространство и др.) – всяка популация би се развивала по-добре, ако не делеше съответния ресурс с другата.
- Мутуализъм – това е взаимоотношение, от което и двете популации извличат полза.
- Взаимодействие от тип хищник – жертва – едната популация се храни с другата. Очевидно това взаимодействие има положителен ефект върху хищника и отрицателен – върху жертвата.

Ще разгледаме въпроса за математическото моделиране на взаимодействията от тип хищник – жертва. Нека с N_k означим числеността на популацията-жертва в момента от време t_k, а с P_k – числеността на популацията-хищник. Нека разгледаме първо как се изменя числеността на жертвата. В отсъствието на хищници, както казахме в (Иванов, 2, 2014), изменението на популацията може да се опише с дискретния логистичен модел:

$$N_{k+1} = N_k + rN_k\left(1 - \frac{N_k}{\hat{E}}\right)$$

Вследствие на консумацията на хищника обаче числеността на жертвата ще намалява. Логично е да допуснем, че това намаление ще бъде пропорционално на числеността на хищника (колкото повече хищници има, толкова по-голяма ще е консумацията). Нека коефициентът на пропорционалност е μ (не задължително константа). Тогава окончателно развитието на популацията-жертва може да се опише с рекурентната зависимост:

$$N_{k+1} = N_k + rN_k\left(1 - \frac{N_k}{\hat{E}}\right) - \mu P_k$$

Популацията-хищник в отсъствието на храна би се развивала по закона:

$$P_{k+1} = P_k - dP_k,$$

където d е коефициент на смъртност. При наличието на храна трябва да отчетем и увеличението на числеността на хищника вследствие на консумацията. Счита се, че възпроизводството е правопропорционално на консумацията μP_k и нека коефициентът на пропорционалност е χ. Окончателно за популацията-хищник получихме

$$P_{k+1} = P_k + \chi\mu P_k - dP_k.$$

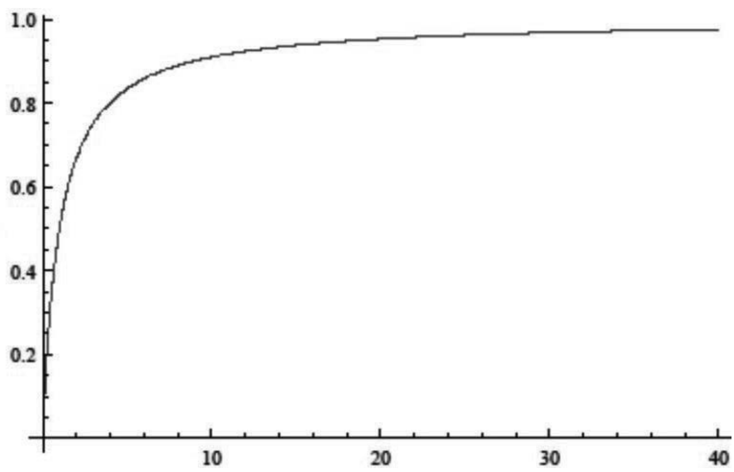
Коефициентът μ обикновено не е константа, а е функция на N_k. Това, разбира се, е логично – консумацията би следвало да зависи от това колко е наличната храна. Видът на функцията $\mu(N)$ (която в литературата носи името специфична функция на растеж) се базира на емпирични изследвания. Въпросът как експериментално се намират зависимости между дадени величини ще отложим за следващия параграф. Тук ще покажем един възможен израз за $\mu(N)$ и ще коментираме какви особености на процеса отразява той. Да подчертаем отново, че **всеки математически модел е абстракция на реалността** и отразява само някои нейни характеристики. Специфичната функция на растеж, която ще разгледаме, е:

$$\mu(N) = \frac{aN}{1+bN}$$

Това е т.нар. функция на Holling, тип-II (Brauer & Castillo-Chávez, 2001). Нека построим графиката на тази функция, за да добием визуално представа за нейното поведение. Ще използваме стойности на параметрите $a = 1$, $b = 1$.

```
In[2]:= a = 1;
        b = 1;
        Plot[a n/(1 + b n), {n, 0, 40}, PlotRange → All]
```

Out[473]=



Първо, функцията е строго монотонно растяща. С увеличението на храната N и консумацията $\mu(N)$ нараства. При $N \to +\infty$ обаче функцията клони към хоризонталната асимптота $P = a$. Идеята е, че от определена стойност нататък увеличението в количеството храна има малък ефект върху консумацията – никой хищник не може да приема безкрайно много храна.

В литературата съществуват и много други специфични функции на растеж, някои от които зависят и от числеността на хищника P_k. Повече информация може да бъде намерена например в (Skalski & Gilliam, 2001).

И така, моделът, който получихме, има вида

$$
\begin{aligned}
N_{k+1} &= N_k + rN_k\left(1 - \frac{N_k}{\hat{E}}\right) - \frac{aN_k}{1+bN_k}P_k, \\
P_{k+1} &= P_k + \chi\frac{aN_k}{1+bN_k}P_k - dP_k.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Това е дискретен вариант на известния модел на Rosenzweig–MacArthur (Rosenzweig & MacArthur, 1963), (Brauer & Castillo-Chávez, 2001).

Самото изследване на модела ще пропуснем по две причини. Първо, ако стойностите на параметрите в модела са известни, то задачата за намиране на решенията (редиците $\{N_k\}$ и $\{P_k\}$) е аналогична на тази, която решихме в (Иванов, 2, 2014) – трябва да построим един итеративен процес, който последователно пресмята стойностите на членовете на редиците $\{N_k\}$ и $\{P_k\}$. Второ, изследването на възможните поведения на тази система би излязло много извън рамките на настоящата статия. Възможно е доста сложно, включително хаотично поведение на решенията[1)]. Ще коментираме само едни специални решения на системата от рекурентни зависимости (1), които имат много голямо значение. Това са т.нар. стационарни решения – константни редици, чиито членове удовлетворяват системата (1). Нека членовете на редицата $\{N_k\}$ (които са равни помежду си) означим с N, а тези на редицата $\{P_k\}$ – с P. Замествайки в (1), получаваме система алгебрични уравнения, в която неизвестните са N и P:

$$
\begin{aligned}
N &= N + rN\left(1 - \frac{N}{\hat{E}}\right) - \frac{aN}{1+bN}P, \\
P &= P + \chi\frac{aN}{1+bN}P - dP.
\end{aligned}
$$

Решаваме тази система, използвайки СКА Mathematica:

```
In[5]:= Solve[{n = n + r n (1 - n/k) - (a n)/(1 + b n) p, p = p + χ (a n)/(1 + b n) p - d p}, {n, p}]
Out[5]= {{n → k, p → 0}, {n → -d/(d - χ), p → (r χ (-d - d k + k χ))/(k (-d + χ)^2)}, {n → 0, p → 0}}
```

Получихме три стационарни решения:

- $N = P = 0$ – ясно е, че ако в екосистемата няма нито хищници, нито жертви, няма как да има промяна в числеността на двете популации (което се отразява от константните решения).

- $N = k$, $P = 0$ – ако популацията-хищник е загинала, то популацията-жертва може необезпокоявана да съществува, достигайки и запазвайки максималната поддържана от жизнената среда численост.
- $N = \frac{d}{bd - a\chi}, P = -\frac{r\chi(-d - bdk + ak\chi)}{k(bd - a\chi)^2}$ – оказва се, че има още едно стационарно решение. От трите случая този е най-важен от практическа гледна точка – двете популации могат да съжителстват при тези числености, така че раждаемостта на жертвата и на хищника, смъртността на хищника и консумацията да се уравновесяват и двете популации да съществуват при дадените условия. За да бъдем коректни, трябва да отбележим, че самото съществуване на това стационарно решение на практика не е гаранция за възможното съжителство на двете популации, но няма да се спираме по-подробно на този въпрос.

Да подчертаем в заключение на този параграф, че знанията ни за описване растежа на една популация са необходим градивен елемент по пътя ни към описването на по-сложната ситуация на две взаимодействащи си популации. Стъпвайки на тези си знания, ние разширяваме модела, включително правейки експерименти и откривайки емпирични зависимости за все още неизучените неща. Аналогично впрочем математическите модели на взаимодействие между две популации, в частност моделите от тип хищник – жертва, играят ролята и на градивни елементи при описването на по-сложни екосистеми, състоящи се от повече видове организми, взаимодействащи си помежду си. Създаването на такива йерархии от математически модели е необходимо при изследването на редица сложни феномени – започвайки от по-прости процеси, постепенно натрупваме достатъчно знания, които да използваме за описването на по-сложните (които често са с много по-голяма практическа важност).

3. Построяване на математически модели на базата на експериментални данни

Тема: Функции

Много закони, описващи зависимостите между различни величини във физиката, химията, биологията и т.н., са експериментално установени. Както в (Иванов, 2, 2014), така и в настоящата статия, в математическите модели, които разгледахме, се възползвахме от такива закони (например дискретния логистичен модел и функцията на Holling, тип-II). Нека хвърлим малко светлина върху въпроса как се намира една емпирична зависимост.

Да разгледаме следния пример. Пускаме едно тяло от определена височина и през някакви интервали от време измерваме височината, на която то се намира.

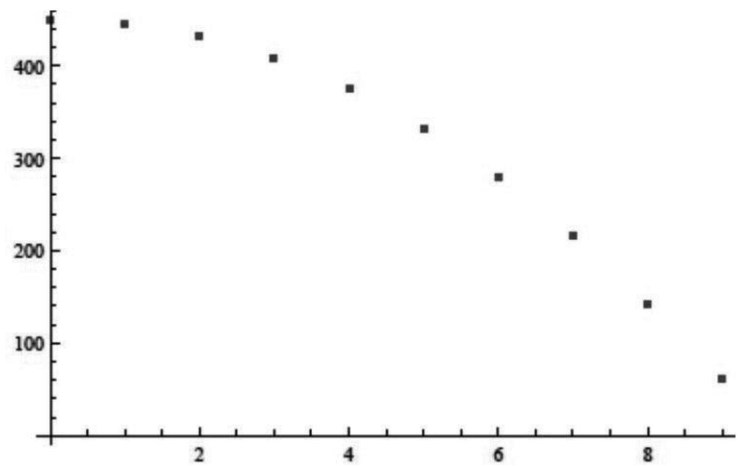
Резултатите от тези измервания записваме в следната таблица:

t, s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, m	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

Искаме да установим каква е зависимостта между t и h. Нека първо изобразим графично информацията от измерванията, които сме направили:

```
In[25]=  ListPlot [{{0, 450}, {1, 445}, {2, 431}, {3, 408}, {4, 375}, {5, 332},
{6, 279}, {7, 216}, {8, 143}, {9, 61}}]
```

Out[25]=



От математическа гледна точка, зависимостта между две величини представлява функция. В случая търсим функцията $h(t)$. И така, нека си зададем въпроса каква (по вид) функция би описала добре експерименталните данни. Гледайки фигурата, изглежда, че точките лежат много близо до парабола. С други думи, логично изглежда да търсим зависимостта във вида $h(t) = a_1 + a_2t + a_3t^2$, където a_1, a_2 и a_3 са някакви реални числа.

Нека сега определим коефициентите в квадратния тричлен, така че той да е възможно най-близо (в някакъв смисъл) до данните от таблицата. Няма да се спираме на теоретичните основи за решаването на тази задача, а ще използваме една вградена функция в Mathematica, която ще ни даде решението. Само ще отбележим, че методът, който ще използваме, за да определим коефициентите на полинома, е известен като метод на най-малките квадрати. Читателят би могъл лесно да намери информация за него. И така, ще използваме вградената функция *Fit*, която намира най-доброто приближение на дадени точки (в смисъла на метода на най-малките квадрати) от вида

$$\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t),$$

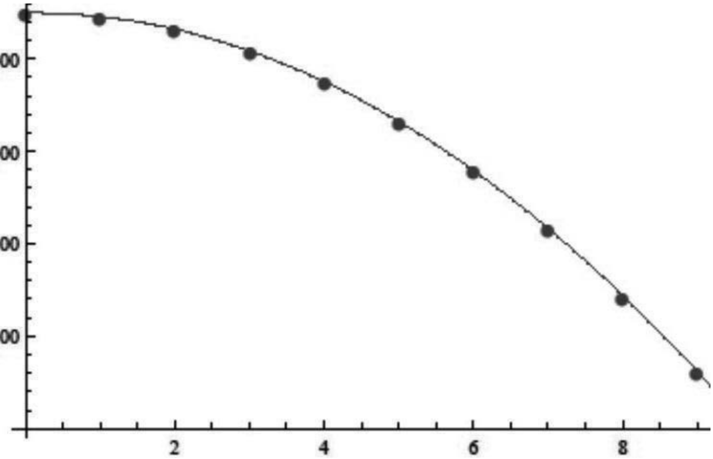
където $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ са известни функции. В нашия случай, тъй като търсим полином от втора степен, имаме $\varphi_1(t) = 1, \varphi_2(t) = t, \varphi_3(t) = t^2$. Функцията Fit приема три аргумента – списък с точките, които приближаваме, списък с функциите $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ и независимата променлива, по отношение на която да се намери резултатът. В конкретния случай имаме:

```
In[5]=  Fit [{{0, 450}, {1, 445}, {2, 431}, {3, 408}, {4, 375}, {5, 332}, {6, 279},
        {7, 216}, {8, 143}, {9, 61}}, {1, t, t²}, t]
Out[5]= 449.364 + 0.96212121t - 4.90152t²
```

Получихме зависимостта $h(t) = 449.364 + 0.962121t - 4.90152t^2$, която описва падането на тялото. Нека построим графиката на полинома, за да илюстрираме получения резултат.

```
In[5]=  plot 1 = ListPlot [{{0, 450}, {1, 445}, {2, 431}, {3, 408}, {4, 375},
        {5, 332}, {6, 279}, {7, 216}, {8, 143}, {9, 61}}, PlotMarkers→•];
        plot 2 = Plot [449.364 + 0.96212121t - 4.90152t² {t, 0, 10}];
        Show []plot1, plot2]
```

Out[11]=



Подобен на предходния проблем възниква и в още една твърде важна ситуация. Математическите модели, както видяхме дотук, зависят от параметри, които в конкретна ситуация трябва да имат някакви числени стойности. Определянето на тези стойности става отново чрез сравняването с експериментални данни. Например нека изследваме една конкретна екосистема и моделираме взаимоотношения от тип хищник – жертва между две популации в тази екосистема. Нека консумацията на хищника, дефинирана в предишния параграф, се описва с функцията на

Holling, тип-II, зависеща от два параметъра. За да определим стойностите на тези два параметъра, трябва да направим експерименти за това каква е консумацията при различни числености на жертвата. На база на тези експериментални данни трябва да определим двата параметъра, така че да получим възможно най-доброто приближение на експерименталните данни – същата идея, както и при задачата за падането на тялото.

Задача: Дадени са данни, отразяващи изменението на нивото на въглероден диоксид в атмосферата в периода 1980 – 2000:

Год.	1980	1982	1984	1986	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
CO_2, ppm	338.7	341.1	344.4	347.2	351.5	354.2	356.4	358.9	362.6	366.6	369.4

1) Да се изобразят графично данните от таблицата.
2) Да се намери зависимост, описваща процеса.
3) Да се построят в една координатна система точките и графиката на функцията, описваща процеса.
4) На база на съставения модел да се определи през коя година е преминато ниво на въглероден диоксид в атмосферата 400 ppm.

4. Заключение

Първата статия от поредицата „Математически модели на реални процеси и приложения на системите за компютърна алгебра за тяхното изследване“ се опита да даде отговор на въпроса **какво** представляват математическите модели. В настоящата статия потърсихме отговор на въпроса **как** се създава един математически модел. Видяхме, че за да опишем един сложен процес, е необходимо първо да започнем от по-прости модели, описващи части от проблема. За това, което не знаем как да опишем, можем да направим експерименти, на база на които да намерим емпирични закони. Разбира се, при моделирането на даден процес използваме и добре известни закони. Отново, изследвайки математическите модели, техническите пресмятания оставихме на СКА Mathematica.

Да отбележим, че разбирането и изследването на математически модели са често свързани със задълбочени познания в редица области на висшата математика. Изследването на модела от тип хищник – жертва, което пропуснахме, например е свързано с теорията на дискретните динамични системи – много богата и много интересна област, която обаче излиза доста извън рамките на училищния курс на образование. Това обаче не означава, че не могат да бъдат намерени достатъчно примери, с които да се илюстрират приложенията на математическите обекти, които учениците изучават в средния курс. Напротив, много важни процеси имат математически модели, които могат спокойно да бъдат възприети от учениците, стига те да бъдат поднесени по подходящ начин, съобразявайки се с тяхната подготовка, а по-сложните моменти от изследването им да бъдат представени само на интуитивно ниво, а някои – и пропуснати.

БЕЛЕЖКИ

1. Доста богата динамика впрочем притежава и дискретният логистичен модел, макар в (Иванов, 2, 2014) да се ограничихме само до разглеждането на две прости ситуации – при r=1 и (под формата на задача за самостоятелна работа) при r=2.

ЛИТЕРАТУРА

Brauer, F. & Castillo-Chávez (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Springer-Verlag, New York.

Иванов, Т. (2014). Кратко ръководство за системата за компютърна алгебра Wolfram Mathematica. *Математика и информатика,* том 57, кн. 4, 343 – 354.

Иванов, Т. 2 (2014). Математически модели на реални процеси и приложения на системите за компютърна алгебра за тяхното. *Mathematics and Informatics*, том 57, кн. 5, 462 – 471.

Rosenzweig, M. & R. MacArthur (1963). General Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interaction. *American Naturalist,* 209 – 223.

Skalski, G. & J. Gilliam (2001). Functional Responses with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *Ecology,* 82(11), 3083 – 3092.

REFERENCES

Brauer, F. & Castillo-Chávez (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer-Verlag, New York.

Ivanov, T. (2014). A Short Manual for the Computer Algebra System Wolfram Mathematica. *Mathematics and Informatics*, Vol. 57, Number 5, 343–354.

Ivanov, T. 2 (2014). Mathematical Models of Real Processes and Applications of Computer Algebra Systems to Their Study. *Mathematics and Informatics*, Vol. 57, Number 4, 462–471.

Rosenzweig, M. & R. MacArthur (1963). General Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interaction. *American Naturalist*, 209–223.

Skalski, G. & J. Gilliam (2001). Functional Responses with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Model. *Ecology,* 82(11), 3083 – 3092.

MATHEMATICAL MODELS OF REAL PROCESSES AND APPLICATIONS OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS TO THEIR STUDY: PART TWO

Abstract. This paper is a continuation of the topic we began in issue 5/2014 of the journal "Mathematics and Informatics". Using the discrete logistic model we talked about in Part 1, we construct a model, describing predator-prey interactions between two populations. Our goal is to show how a model can be used as a building block of another, more complicated model. Also, we illustrate another important technique in mathematical modeling—creating empirical models.

✉ **Mr. Tihomir Ivanov, Assist. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
Institute of Mathematics and Informatics
Bulgarian Academy of Sciences
Sofia, Bulgaria
E-mail: tbivanov@fmi.uni-sofia.bg