Educational Research
Научно-методически статии

ГЕОМЕТРИЧНА КОНСТРУКЦИЯ НА КРИВА НА ЧЕВА

[1]Сава Гроздев, [2]Веселин Ненков
[1]*Институт по математика и информатика – БАН*
[2]*Технически колеж, Ловеч*

Резюме. В настоящата статия е описана геометрична конструкция на кривата на Чева, получена в (Гроздев & Ненков, 2014) чрез аналитични средства.
Keywords: triangle, conic, Ceva circle, Ceva curve, conjugate lines, GSP.

За произволна точка P от равнината на даден ΔABC петите A_1, B_1 и C_1 на Чевианите през P съответно върху правите BC, CA и AB лежат на една окръжност, която наричаме окръжност на Чева за точката P. В (Гроздев & Ненков, 2014) е описан един начин за получаване на конично сечение, минаващо през точките A_1, B_1 и C_1, което обобщава окръжността на Чева в зависимост от произволно описано за ΔABC конично сечение $\overline{k}(O)$ с център O. Това обобщение е наречено крива на Чева за точката P спрямо кривата $\overline{k}(O)$. Кривата на Чева в (Гроздев & Ненков, 2014) е определена с аналитични средства. Обобщават се уравнението и координатите на центъра на окръжността на Чева, така че да зависят само от координатите на центъра O на $\overline{k}(O)$ (по-точно от коефициентите на уравнението на $\overline{k}(O)$). Центърът на кривата на Чева може да се построи, когато са известни координатите му, а след това и самата крива на Чева. Обаче центърът на окръжността на Чева (както на произволна друга окръжност, минаваща през три точки) може да се построи само с геометрични средства (като пресечна точка на симетрали). Такъв геометричен подход към построяването на центъра на кривата на Чева (некоординатен) по никакъв начин не следва от аналитичните изрази, получени в (Гроздев & Ненков, 2014). Затова целта на настоящата статия е да определим центъра на крива на Чева само чрез геометрични построения.

Оказва се, че не е много лесно да се забележи чисто геометричното построение на центъра на кривата на Чева. Затова ще обърнем специално внимание на едно основно понятие от теорията на коничните сечения. Освен това ще използваме конструктивните и динамични възможности на софтуерния продукт “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP), за да проверим състоятелността на нашите разсъждения.

Първо построяваме центъра на кривата на Чева за точката P спрямо кривата $\overline{k}(O)$ по координатите, които са ни известни от (Гроздев & Ненков, 2014). Центърът на окръжността, описана около $\Delta A_1B_1C_1$, лежи върху симетралата на всяка своя хорда – например страната B_1C_1. В геометрията на коничните сечения е определено понятието спрегнати прави спрямо конично сечение. В частния случай, когато коничното сечение е окръжност, всеки две перпендикулярни прави са спрегнати. По-специално правата B_1C_1 и нейната симетрала са спрегнати спрямо описаната за ΔABC окръжност. Затова можем да предположим, че правата s_a, минаваща през средата на B_1C_1 и спрегната с правата B_1C_1 спрямо описаната крива $\overline{k}(O)$, минава през центъра на кривата на Чева за точката P. Аналогично можем да очакваме, че центърът на кривата на Чева лежи върху правите s_b и s_c, които минават съответно през средите на отсечките C_1A_1 и A_1B_1, така че да са спрегнати със същите прави спрямо $\overline{k}(O)$. Построенията с GSP оправдават нашите очаквания. Затова следващата стъпка е да докажем валидността на наблюдаваното съвпадение на резултатите за центъра на кривата на Чева, получени в (Гроздев & Ненков, 2014), с резултата от извършената конструкция на конкурентни прави (ако са такива). За да извършим това доказателство, ще използваме барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985).

Тъй като описаната конструкция съдържа спрегнати прави, в началото ще определим барицентричните координати на вектор, който е спрегнат с даден вектор.

1. Спрегнати вектори в барицентрични координати. Нека в равнината на ΔABC е дадена крива с уравнение

(1) $$k: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 0.$$

В последното уравнение заместваме $z = 1 - x - y$. Получаваме

(2) $$k: \begin{aligned} &(a_{11} + a_{33} - 2a_{31})x^2 + (a_{22} + a_{33} - 2a_{23})y^2 + 2(a_{12} - a_{31} - a_{23} + a_{33})xy + \\ &+2(a_{31} - a_{33})x + 2(a_{23} - a_{33})y + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Разглеждаме това равенство като уравнение на k спрямо афинна координатна система. От аналитичната геометрия (Мартинов, 1989) е известно, че векторите $\vec{u}(u_1, u_2)$ и $\vec{v}(v_1, v_2)$, координатите на които са определени спрямо същата афинна координатна система, спрямо която е зададена кривата k' с уравнение $k': a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + 2a'_{12}xy + 2a'_{31}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0$, са спрегнати спрямо k' тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството

(3) $$a'_{11}u_1v_1 + a'_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + a'_{22}u_2v_2 = 0.$$

От (2) и (3) получаваме равенството

$$\left[(a_{11}+a_{33}-a_{31})u_1+(a_{12}-a_{31}-a_{23}+a_{33})u_2\right]v_1+$$
$$+\left[(a_{12}-a_{31}-a_{23}+a_{33})u_1+(a_{22}+a_{33}-2a_{23})u_2\right]v_2=0.$$

Последното равенство е изпълнено при

$$v_1=(a_{12}-a_{31}-a_{23}+a_{33})u_1+(a_{22}+a_{33}-2a_{23})u_2 \text{ и}$$
$$v_2=-(a_{11}+a_{33}-a_{31})u_1-(a_{12}-a_{31}-a_{23}+a_{33})u_2\,.$$

Спрямо ΔABC векторите $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имат следните барицентрични координати $\vec{u}(u_1,u_2,u_3=-u_1-u_2)$ и $\vec{v}(v_1,v_2,v_3=-v_1-v_2)$. Сега от последните равенства намираме, че барицентричните координати на вектора $\vec{v}$ спрямо ΔABC се изразяват със следните формули:

$$\begin{aligned} v_1&=(a_{12}-a_{13})u_1+(a_{22}-a_{23})u_2+(a_{32}-a_{33})v_3,\\ v_2&=(a_{13}-a_{11})u_1+(a_{23}-a_{21})u_2+(a_{33}-a_{31})v_3,\\ v_3&=(a_{11}-a_{12})u_1+(a_{21}-a_{22})u_2+(a_{33}-a_{32})v_3.\end{aligned} \tag{4}$$

По този начин получихме, че векторът $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ е спрегнат с вектора $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ спрямо k, ако координатите му се изразяват с равенствата (4).

Точките на произволно описано за ΔABC конично сечение $\overline{k}(O)$ удовлетворяват уравнението:

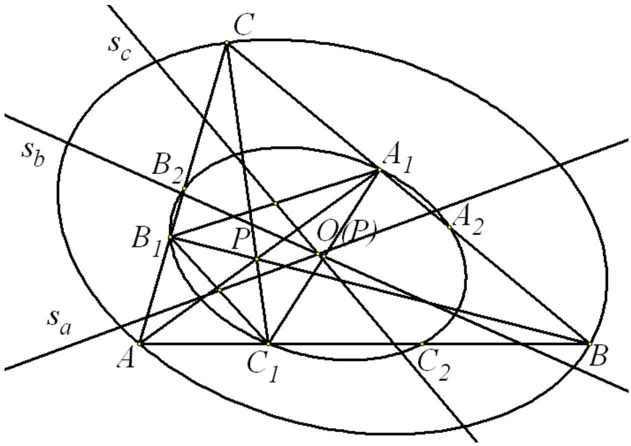
$$\overline{k}(O): x_I^2yz+y_I^2zx+z_I^2xy=0\,, \tag{5}$$

където x_I, y_I и z_I са координатите на центъра на специално конично сечение, което е вписано в ΔABC (Ненков, 2008). От (4) и (5) за координатите на вектор $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$, който е спрегнат с даден вектор $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ спрямо $\overline{k}(O)$, определяме равенствата:

$$v_1=(z_I^2-y_I^2)u_1-x_I^2u_2+x_I^2u_3\,,\ v_2=y_I^2u_1+(x_I^2-z_I^2)u_2-y_I^2u_3\,, \tag{6}$$
$$v_3=-z_I^2u_1+z_I^2u_2+(y_I^2-x_I^2)u_3\,.$$

2. Центърът на крива на Чева като пресечна точка на три прави. Нека $\overline{k}(O)$ е описано конично сечение за ΔABC с център O, а $P(\lambda, \mu, \nu)$ е произволна точка от равнината на ΔABC. Координатите на точките $A_1=AP\cap BC$, $B_1=BP\cap C_1A_1$, $C_1=CP\cap AB$ се представят по следния начин:

$$A_1\left(0,\frac{\mu}{\mu+\nu},\frac{\nu}{\mu+\nu}\right),\ B_1\left(\frac{\lambda}{\nu+\lambda},0,\frac{\nu}{\nu+\lambda}\right),\ C_1\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu},\frac{\mu}{\lambda+\mu},0\right). \tag{7}$$



Сега на базата на разсъжденията и наблюденията, извършени по-рано, ще определим центъра на едно специално конично сечение $\overline{c}_P$, минаващо през точките A_1, B_1 и C_1. За целта с s_a, s_b и s_c означаваме правите, които минават съответно през средите на отсечките B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, така че да са спрегнати съответно с правите B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 спрямо $\overline{k}(O)$.

Първо да отбележим, че, ако $\overline{k}(O)$ е парабола (точката O е безкрайна), правите s_a, s_b и s_c са успоредни на оста на параболата. Следователно минават през безкрайния център O на параболата. Затова е определена единствена парабола $\overline{c}_P$, която е описана за $\Delta A_1B_1C_1$ с ос, успоредна на оста на $\overline{k}(O)$. Това заключение съвпада с резултата, получен в (Гроздев & Ненков, 2014).

Нека сега $\overline{k}(O)$ е централно конично сечение (точката O е крайна). Параметричните уравнения на правите s_a, s_b и s_c са следните:

$$s_a:\begin{cases} x=\dfrac{\lambda(2\lambda+\mu+\nu)}{2(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)}+\left[\lambda(\nu-\mu)\left(z_I^2-y_I^2\right)-(2\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)\,x_I^2\right]t_a,\\ y=\dfrac{\mu}{2(\lambda+\mu)}+\left[\mu(\nu+\lambda)\left(x_I^2-z_I^2\right)+(\mu\nu+2\nu\lambda-\lambda\mu)\,y_I^2\right]t_a,\\ z=\dfrac{\nu}{2(\nu+\lambda)}+\left[\nu(\lambda+\mu)\left(x_I^2-y_I^2\right)+(\mu\nu-\nu\lambda+2\lambda\mu)\,z_I^2\right]t_a,\end{cases}$$

$$s_b : \begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} + \left[\lambda(\mu+\nu)\left(y_I^2 - z_I^2\right) + (2\mu\nu + \nu\lambda - \lambda\mu)\, x_I^2\right] t_b, \\ y = \dfrac{\mu(\lambda+2\mu+\nu)}{2(\lambda+\mu)(\mu+\nu)} + \left[\mu(\lambda-\nu)\left(x_I^2 - z_I^2\right) - (\mu\nu + 2\nu\lambda + \lambda\mu)\, y_I^2\right] t_b, \\ z = \dfrac{\nu}{2(\mu+\nu)} + \left[\nu(\lambda+\mu)\left(y_I^2 - x_I^2\right) + (-\mu\nu + \nu\lambda + 2\lambda\mu)\, z_I^2\right] t_b, \end{cases}$$

$$s_c : \begin{cases} x = \dfrac{\lambda}{2(\nu+\lambda)} + \left[\lambda(\lambda+\mu)\left(z_I^2 - y_I^2\right) + (2\mu\nu - \nu\lambda + \lambda\mu)\, x_I^2\right] t_c, \\ y = \dfrac{\mu}{2(\mu+\nu)} + \left[\mu(\nu+\lambda)\left(z_I^2 - x_I^2\right) + (-\mu\nu + 2\nu\lambda + \lambda\mu)\, y_I^2\right] t_c, \\ z = \dfrac{\nu}{2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)} + \left[\nu(\mu-\lambda)\left(y_I^2 - x_I^2\right) - (\mu\nu + \nu\lambda + 2\lambda\mu)\, z_I^2\right] t_c. \end{cases}$$

След несложни пресмятания се вижда, че двойките прави s_a, s_b и s_a и s_c се пресичат в точка $O(P)$, чиито координати се представят с формулите:

$$x_{O(P)} = \frac{\lambda\left(\overline{b}.\overline{\overline{b}} + \overline{c}.\overline{\overline{c}}\right)}{2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)},$$

$$y_{O(P)} = \frac{\mu\left(\overline{c}.\overline{\overline{c}} + \overline{a}.\overline{\overline{a}}\right)}{2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)},$$

$$z_{O(P)} = \frac{\nu\left(\overline{a}.\overline{\overline{a}} + \overline{b}.\overline{\overline{b}}\right)}{2\lambda^2\mu^2\nu^2(\mu+\nu)(\nu+\lambda)(\lambda+\mu)(1-2x_I)(1-2y_I)(1-2z_I)},$$

където

$$\overline{a} = (\nu+\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 + (\nu-\mu)(\lambda+\mu)\nu\lambda b^2 + (\mu-\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2,$$

$$\overline{b} = (\nu-\lambda)(\lambda+\mu)\mu\nu a^2 + (\lambda+\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 + (\lambda-\nu)(\mu+\nu)\lambda\mu c^2,$$

$$\overline{c} = (\mu-\lambda)(\nu+\lambda)\mu\nu a^2 + (\lambda-\mu)(\mu+\nu)\nu\lambda b^2 + (\mu+\nu)(\nu+\lambda)\lambda\mu c^2,$$

$$\overline{\overline{a}} = -\left(\lambda^2 + \mu\nu\right)\mu\nu a^2 + (\mu+\nu)\nu\lambda^2 b^2 + (\mu+\nu)\mu\lambda^2 c^2,$$

$$\overline{\overline{b}} = (\nu+\lambda)\nu\mu^2 a^2 - \left(\mu^2 + \nu\lambda\right)\nu\lambda b^2 + (\nu+\lambda)\lambda\mu^2 c^2,$$

$$\overline{\overline{c}} = (\lambda+\mu)\mu\nu^2 a^2 + (\lambda+\mu)\lambda\nu^2 b^2 - \left(\nu^2 + \lambda\mu\right)\lambda\mu c^2.$$

Този резултат съвпада със съответния, получен в (Гроздев &Ненков, 2014). По този начин показахме, че описаното за $A_1 B_1 C_1$ конично сечение чрез разгледаната конструкция съвпада с коничното сечение, получено в (Гроздев & Ненков, 2014) чрез аналитични средства. Затова вече имаме чисто геометричен метод за построяване на кривата на Чева за произволна точка от равнината на ΔABC.

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Крива на Чева за точка от равнината на триъгълник. *Математика и информатика,* 57 (3), 285-298.

Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия*. София: Наука и изкуство.

Ненков, В. (2008) Обобщение на теоремата на Фойербах. *Математика и информатика,* 51 (2), 35 – 42.

Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.

REFERENCES

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Ceva curve for a point from the plane of a triangle. Mathematics and Informatics*,* 57 (3), 285 – 298.

Martinov, N. (1989). *Analytical Geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo.

Nenkov, V. (2008). A generalization of the Feuerbach theorem. *Mathematics and Informatics,* 51 (2), 35 – 42.

Paskalev, G. & Chobanov, G. (1985). *Zabelezhitelni tochki v* tri'g'lnika. Sofia: Narodna prosveta.

A GEOMETRICAL CONSTRUCTION OF A CEVA CURVE

Abstract. The present paper describes a geometrical construction of the Ceva curve, which is obtained in by analytical means.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
Institute of Mathematics and Informatics – BAS
Acad. G. Bonchev Street, bl. 8
1113 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Street
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg