*Contest Problems*
*Конкурсни задачи*
*Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков*

# КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

**Задача 1.** Параметрите $a$ и $b$ са такива, че уравнението

$$5x^5 + 2x^4 + 4ax^3 - x^2 + 2bx + 4b - a = 0$$

има за корени числата $-1$ и 2. Да се намерят останалите корени на уравнението.

*Сава Гроздев, София*
*Веселин Ненков, Бели Осъм*

**Задача 2.** Трапец е разделен от единия си диагонал на два триъгълника с лица 1 и $1+\frac{1}{a}$. Да се намерят стойностите на $a$, при които лицето на триъгълника, образуван от малката основа на трапеца и продълженията на бедрата му, е точен квадрат.

*Милен Найденов, Варна*

**Задача 3.** Точките $O$ и $H$ са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник $ABC$ ($BC < AB < AC$). Точката $C_1$ е симетрична на $C$ относно правата $OH$. Да се докаже, че ортогоналните проекции на $C_1$ върху правите, определящи страните на четириъгълника $ABHO$, са върхове на успоредник.

*Хаим Хаимов, Варна*

**Краен срок за изпращане на решения – 31 юли 2015 г.**

Първенец за 2014 г. в решаването на конкурсни задачи е *д-р* ***Ирина Вутова*** – гл. асистент от Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Кл. Охридски“. Тя се награждава с годишен абонамент на сп. „Математика и информатика“ за 2015 г. С годишни абонаменти за 2015 г. се награждават още: ***Хаим Хаимов*** и ***Милен Найденов*** – преподаватели от Варна, както и ***Христо Лесов*** – учител от Казанлък, за активното им участие в предлагането на нови авторски задачи за рубриката. Наградата за оригинална статия (също абонамент) получава ***Пламен Пенев*** – учител по информатика в СОУ „П. Волов“ – Шумен, за статията „Евристика с Excel” от бр. 1, 2014 г., а така също и за нейното продължение „Още евристики с Excel“ от бр. 5, 2014 г.

*Конкурсът продължава и през настоящата година. В края на 2015 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2016 г. .*

*Решенията трябват да бъдат представяни ясно, като всяка задача е задължително да бъде на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на* mathinfo@azbuki.bg *и* vnenkov@mail.bg

*Contest Problems*
*Конкурсни задачи*

# РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2014

**Задача 1.** Ако $a \geq 3$ е нечетно число и $k \geq 2$ е естествено число, да се намери остатъкът от делението на $a^k$ с $\frac{a^2+1}{2}$.

*Лучиан Туцеску, Крайова, Димитру Савулеску, Букурещ, Румъния*

*Решение*: Означаваме с $r$ търсения остатък. При $k = 2$ е изпълнено равенството $a^2 = \frac{a^2+1}{2} + \frac{a^2-1}{2}$. Тъй като $\frac{a^2-1}{2} < \frac{a^2+1}{2}$, то $r = \frac{a^2-1}{2}$. Сега от равенството $a^2 = 2.\frac{a^2+1}{2} - 1$ се получава $a^{2k} = M.\left(\frac{a^2+1}{2}\right) + (-1)^k$, където $M$ е цяло число. Ако $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$, търсеният остатък е $r = 1$. Ако $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, то $a^{2(2l+1)} \equiv -1 \equiv \frac{a^2+1}{2} - 1 \equiv \frac{a^2-1}{2}\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$. В този случай получаваме, че $r = \frac{a^2-1}{2}$. Разглеждаме случая, при който $k = 3$. От релациите $a^3 = 2a\frac{a^2+1}{2} - a = (2a-1)\frac{a^2+1}{2} + \frac{a^2+1}{2} - a = (2a-1)\frac{a^2+1}{2} + \frac{(a-1)^2}{2}$ и $\frac{(a-1)^2}{2} < \frac{a^2+1}{2}$ следва, че $r = \frac{(a-1)^2}{2}$. Като използваме, че $a^{4l} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$, получаваме $a^{4l+3} \equiv a^3 \equiv \frac{(a-1)^2}{2}\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$ и $a^{4l+1} \equiv a^{4l}.a \equiv a\left(\mathrm{mod}\,\frac{a^2+1}{2}\right)$. Сега, като обобщим получените резултати, имаме: При $k = 4l$, $k = 4l + 2$, $k = 4l + 3$ и $k = 4l + 3$ ($l \in \mathbb{N}$) е изпълнено съответно $r = 1$, $r = a$, $r = \frac{a^2-1}{2}$ и $r = \frac{(a-1)^2}{2}$.

**Задача 2.** В окръжност с център $O$ е вписан триъгълник $ABC$ с ортоцентър $H$. Точките $M$ и $N$ са средите съответно на страните $BC$ и $AC$, точката $I$ е център на вписаната в $\Delta ABC$ окръжност, а $O_9$ е центърът на Ойлеровата окръжност за $\Delta ABC$. Да се докаже, че следващите твърдения са равносилни.

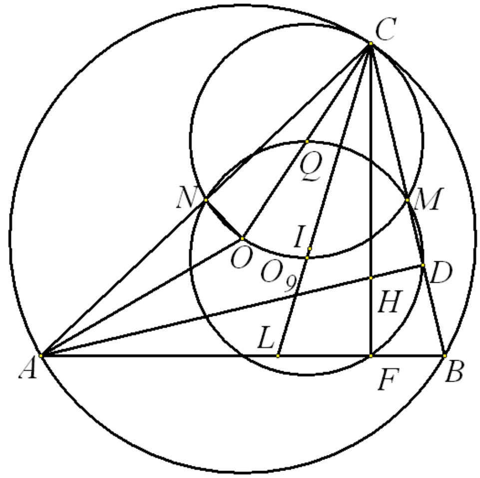
$T_1$. Мерките на ъглите при върховете $A$, $C$ и $B$ образуват в този ред аритметична прогресия.

$T_2$. Изпълнено е равенството $OI = IH$.

$T_3$. Точките $C$, $O$, $M$, $N$ и $O_9$ лежат на една окръжност.

*Христо Лесов, Казанлък*

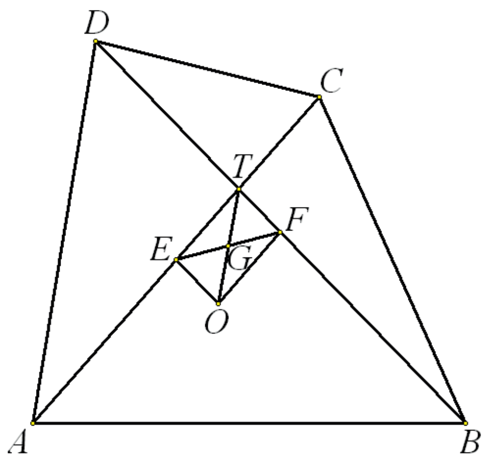
*Решение*: В началото ще отбележим, че за равностранен триъгълник $ABC$ точките $O$, $H$, $I$ и $O_9$ съвпадат и условието на задачата е изпълнено. Ще разгледаме общия случай на разностранен остроъгълен триъгълник $ABC$, вписан в окръжност $k$ с център $O$ и радиус $R$. Означаваме с $\alpha$, $\gamma$ и $\beta$ мерките на ъглите съответно при върховете $A$, $C$ и $B$. Те образуват в този ред аритметична прогресия тогава и само тогава, когато $\alpha + \beta = 2\gamma$ или $\alpha + \beta + \gamma = 3\gamma$. Оттук следва $\gamma = 60^\circ$. Затова твърдение $T_1$ е равносилно с твърдение $T_4$: Изпълнено е равенството $ACB = 60^\circ$ .




Тъй като $\Delta ABC$ е остроъгълен, точките $O$ и $H$ са вътрешни за него, като $ON \perp AC$, $AON = \beta$. Ако правите $AH$ и $CH$ пресичат $BC$ и $AB$ съответно в точките $D$ и $F$, то $AD \perp BC$ и $CF \perp AB$. От правоъгълните триъгълници $CON$ и $CBF$ намираме $OCN = 90^\circ - \beta = BCF = HCD$. Ако CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $ACB$, то $OCL = ACL - OCN = BCL - HCD = HCL$, което показва, че $CL$ е ъглополовяща на OCN. В правоъгълния триъгълник $ACD$ имаме $CAD = 90^\circ - ACB$ откъдето равенството $ACB = 60^\circ$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $CAD = 30^\circ$, т.е. $CD = \frac{1}{2} AC = CN$ . Последното е равносилно с еднаквост на правоъгълните триъгълници $CHD$ и $CON$. Следователно твърдение $T_4$ е равносилно с твърдение $T_5$: Изпълнено е равенството $CH = CO$ и $CL$ е ъглополовяща на $OH$. Тъй като $I \in CL$, твърдения $T_5$ и $T_2$ са равносилни. Както е известно, центърът $O_9$ на Ойлеровата окръжност за $ABC$ е средата на отсечката $OH$ (вж. Права на Ойлер и окръжност на деветте точки за триъгълник, МИ, 2008, 1). Затова твърдение $T_5$ е равносилно с $CO_9O = 90^{\circ}$ и $CO$ се вижда от точките $M$, $N$ и $O_9$ под ъгъл $90^{\circ}$. Това показва, че точките $C$, $O$, $M$, $N$ и $O_9$ лежат на окръжност с диаметър $CO = R$. При това центърът $Q$ на тази окръжност лежи върху Ойлеровата окръжност на $\Delta ABC$.

**Задача 3**. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който $T = AC \cap BD$ е пресечната точка на диагоналите и $S_{ADT} = \frac{1}{2}(S_{ABT} + S_{CDT})$. Ако $G$ е медицентърът на $ABCD$, да се докаже, че: а) $GT \parallel AD$; б) $GT < \frac{AD}{4}$.

*Хаим Хаимов, Варна*




*Решение*: а) Без ограничение можем да считаме, че $S_{ABT} \geq S_{CDT}$. От условието на задачата следва, че $S_{ABT} \geq S_{ADT} \geq S_{CDT}$, откъдето $BT \geq DT$ и $AT \geq CT$. Следователно средите $E$ и $F$ съответно на $AC$ и $BD$ лежат съответно на отсечките $AT$ и $BT$. Означаваме мярката на $\sphericalangle ATD$ с $\phi$. Изпълнени са равенствата $S_{ADT} = \frac{1}{2} AT.DT.\sin\varphi$, $S_{ABT} = \frac{1}{2} AT.BT.\sin\varphi$ и $S_{CDT} = \frac{1}{2} CT.DT.\sin\varphi$. Сега от условието получаваме $2.AT.DT = AT.BT + CT.DT$, което води до равенството (*) $\rightarrow \frac{BT - DT}{DT} = \frac{AT - CT}{AT}$. Медицентърът на $ABCD$ е средата на $EF$. Нека $O$ е симетричната точка на $T$ спрямо $G$. Четириъгълникът $EOFT$ е успоредник, откъдето следват равенствата $EO = FT = BT - BF = BT - \frac{BT + DT}{2} = \frac{BT - DT}{2}$. Аналогично се показва, че $ET = \frac{AT - CT}{2}$. Сега от равенството (*) получаваме $\frac{EO}{DT} = \frac{ET}{AT}$. От $EO \| BD$ следва $\sphericalangle OET = \sphericalangle ATD$. Следователно $\Delta EOT \sim \Delta TDA$. Оттук заключаваме, че $\sphericalangle OTE = \sphericalangle TAD$, т.е. $GT \| AD$.

б) От $\Delta EOT \sim \Delta TDA$ следва още, че $\frac{TO}{AD} = \frac{EO}{DT}$. Оттук $TO = AD.\frac{EO}{DT} = AD.\frac{BT - DT}{2DT}$. Следователно $GT = \frac{TO}{2} = \frac{AD}{4}.\left(\frac{BT}{DT} - 1\right)$. За да докажем, че $GT < \frac{AD}{4}$, остава да проверим неравенството $\frac{BT}{DT} - 1 < 1$, което е еквивалентно с $BT < 2DT$, т.е. $S_{ABT} < 2S_{ADT}$. Тъй като по условие $2S_{ADT} = S_{ABT} + S_{CDT}$, то $S_{ABT} < 2S_{ADT}$. С това задачата е решена.