Competitions and Olympiads
Конкурси, олимпиади, състезания

АНАЛИЗ НА ЗАДАЧИТЕ И ПРЕДСТАВЯНЕТО НА УЧЕНИЦИТЕ ОТ XII КЛАС НА ОБЛАСТНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР В КЪРДЖАЛИ – 2014 Г.

Росен Николаев, Йордан Петков
Икономически университет – Варна

Резюме. В настоящата статия се разглеждат задачите за XII клас от проведения на 29.11.2014 г. областен математически турнир в гр. Кърджали. Предлагат се различни подходи за тяхното решаване. На база на получените резултати се анализира нивото на подготовка на участниците в състезания от подобен тип и се правят някои предложения за усъвършенстване на бъдещата работа с изявени ученици в областта на математиката.
Keywords: education, mathematics competition

Едно от най-важните предизвикателства, на които трябва да отговори съвременното обучение по математика, е все по-пълното и точно откриване на учениците с изявени математически възможности[1], което е водеща идея при провеждането на математически състезания и турнири. В тази връзка целта на настоящата публикация е да се представят условията на задачите за XII клас от проведения на 29.11.2014 г. в гр. Кърджали четиринадесети областен математически турнир с международно участие за ученици от III до XII клас, възможните подходи за тяхното решаване и на база на получените резултати да се анализира нивото на подготовка на участниците за състезания от подобен тип.

От XII клас в състезанието взеха участие 109 ученици, в това число 55 от гр. Кърджали, 32 от гр. Хасково, 13 от гр. Смолян, 4 от гр. Димитровград, 2 от с. Чорбаджийско, 2 от с. Кирково и 1 от с. Бенковски.

Броят на задачите в темите за всички класове беше седем, като в първите шест трябва да се избере един верен отговор от общо пет, а последната задача е от отворен тип, като е необходимо не само да се отговори, но и да се направи обосновка на получения резултат. Времето за работа бе 120 минути.

Максималният брой точки, които можеха да съберат участниците, беше 23, като верен отговор на задачи от 1 до 6 се оценяваше с по 3 точки, а на седма задача можеха да се получат от 1 до 5 точки.

1. Условия на задачите

Темата за XII клас включваше следните задачи.

Задача 1. Да се реши неравенството $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}+\sqrt{x-5}\le 2$.

A) $x\in[1;5]$ **B)** $x\in[5;+\infty)$ **C)** $x\in[5;9]$ **D)** $x=5$ **E)** няма решение

Задача 2. Да се намери сборът от всички решения на уравнението $\sin 2x-3\cos 4x-4=0$ от интервала $[0;2\pi]$.

A) $\frac{5}{4}\pi$ **B)** 2π **C)** $\frac{3}{2}\pi$ **D)** π **E)** $\frac{1}{2}\pi$

Задача 3. Ако уравнението $x^4 - ax^2 + b = 0$ има четири различни реални корена, коя от зависимостите по-долу **НЕ Е** вярна?

A) $b<\frac{a^2}{4}$ **B)** $ab > 0$ **C)** $-a < 0$ **D)** $-b > 0$ **E)** $4ab < a^3$

Задача 4. Даден е правоъгълен ΔABC ($\angle ACB = 90^{\circ}$) с хипотенуза $AB = 4$ и височина към нея с дължина 2. Намерете разликата между радиусите на описаната и вписаната окръжност на триъгълника.

A) $6-2\sqrt{2}$ **B)** $4-2\sqrt{2}$ **C)** $2\sqrt{2}-1$ **D)** 2 **E)** 1

Задача 5. Основата на четириъгълна пирамида $ABCDM$ е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 4$, $BC = 3$, а височината на пирамидата е околният ръб CM. Ако лицето на ΔADM е $\frac{15}{2}$, да се намери тангенсът на ъгъла между стената (ABM) и основата на пирамидата.

A) 1 **B)** $\frac{3}{5}$ **C)** $\frac{4}{3}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\sqrt{3}$

Задача 6. Комисия от 5 души трябва да бъде сформирана измежду петима преподаватели от Кърджали, трима от Пловдив и двама от Хасково. Да се намери вероятността в комисията да няма повече от двама преподаватели от един и същи град.

A) $\frac{5}{12}$ **B)** $\frac{7}{12}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** $\frac{3}{4}$ **E)** $\frac{5}{252}$

Задача 7. Да се намери броят на естествените числа n, за които числото $n^2 + 5n$ е четирицифрено и се дели на 6. Обосновете отговора си!

2. Възможни подходи за решаване на задачите[1]

Задача 1. Отг. E) няма решение. *Първи начин*. Повечето от учениците, които са решавали тази задача, са прехвърляли един от радикалите в дясната страна на неравенството и са повдигали двете страни на втора степен. Ако се пробват различни варианти, се установява, че е най-подходящо да се прехвърли вдясно първият радикал. Получава се:

$$\text{Д.М.}\ \left|\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \ge 4 \Rightarrow x \ge 5 \text{ или } x \in [5;+\infty). \\ x \ge 5 \end{array}\right.$$

$\sqrt{x-4}+\sqrt{x-5} \le 2-\sqrt{x-1}$ и $2 \ge \sqrt{x-1}$, откъдето се намира $x \le 5$.

Остава да се направи проверка дали $x = 5$ е решение на неравенството. След заместване се достига до противоречие: $3 \le 2$, следователно неравенството няма решение.

<u>*Втори начин*</u>. Нека $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}+\sqrt{x-5}$. Дефиниционното множество на $f(x)$ е $x \in [5, +\infty)$. Ясно е, че $f(x)$ е растяща функция и следователно $f(x) \ge f(5)=\sqrt{4}+\sqrt{1}=3>2$. Заключаваме, че неравенството няма решение.

<u>*Трети начин*</u>. Може да се изходи непосредствено от предложените отговори. Забелязва се, че $x = 5$ е включено във всички отговори от A) до D). Затова проверяваме дали неравенството е изпълнено за $x = 5$. Тъй като се получава противоречие: $3 \le 2$, то отговори от A) до D) отпадат и единственият отговор, който остава да е верен, е E).

Задача 2. Отг. C) $\frac{3}{2}\pi$. <u>*Първи начин*</u>. Лесно се забелязва, че след някои елементарни преобразувания и полагане, даденото уравнение може да се сведе до квадратно. Ако x е решение, то $\sin 2x-3\cos 4x-4=\sin 2x-3(1-2\sin^2 2x)-4=0$. Полага се $\sin 2x=t$ и се стига до уравнението $6t^2+t-7=0$, чиито корени са $t_1=-\frac{7}{6}$ и $t_2=1$. Тъй като $\sin 2x \in [-1,1]$, единствената възможност е $\sin 2x=1$, откъдето $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, т.е. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Тъй като $x \in [0;2\pi]$, то корените са $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{5\pi}{4}$. Тогава $x_1+x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$.

<u>*Втори начин*</u>. Използва се ограничеността на функциите $\sin x$ и $\cos x$: $\sin 2x \le 1$ и $-3\cos 4x \le 3$ за $\forall x \in (-\infty;+\infty)$. Тогава $\sin 2x-3\cos 4x-4 \le 0$ за $\forall x \in (-\infty;+\infty)$ и равенство се достига, когато $\left|\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \cos 4x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ 1-2\sin^2 2x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=\pm1\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \sin 2x=1$, откъдето $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, т.е. $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Тъй като $x \in [0;2\pi]$, то корените са $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{5\pi}{4}$. Тогава $x_1+x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$.

Тук третият начин от предходната задача (непосредствена проверка с предложените отговори) е неприложим, тъй като се търсят не корените на уравнението, а тяхната сума.

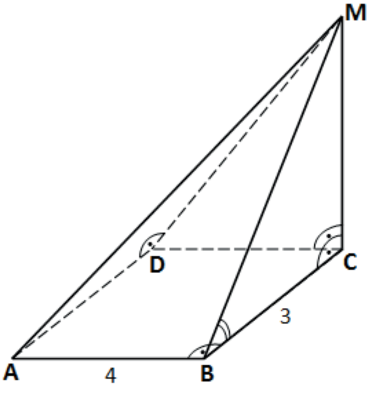
Задача 3. Отг. D) $-b > 0$. Полага се $x^2 = t$. За да има четири различни реални корена за x, необходимо и достатъчно е квадратното уравнение $t^2 - at + b = 0$ да има два различни положителни реални корена. Следователно $D = a^2 - 4b > 0$, $x_1 + x_2 = a > 0$, $x_1.x_2 = b > 0$ и верният отговор е **D)**.

В тази задача да се изходи от предложените отговори, е равносилно на това, да се приложат направените по-горе разсъждения.

Задача 4. Отг. B) $4-2\sqrt{2}$. <u>*Първи начин*</u>. Ако h_C е височината към хипотенузата в триъгълника, то $2S_{ABC} = AB.h_C = 8 = AC.BC$. Освен това $AC^2 + BC^2 = 16$. От системата $\left| \begin{array}{l} AC^2+BC^2=16 \\ AC.BC=8 \end{array} \right.$ се намира $AC = BC = 2\sqrt{2}$. За радиусите на вписаната и описаната окръжности се получава съответно $r=\frac{AC+BC-AB}{2}=2\sqrt{2}-2$, $R=\frac{AB}{2}=2$. Тогава $R-r=4-2\sqrt{2}$.

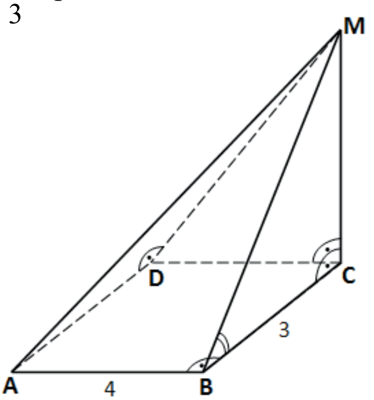
<u>*Втори начин*</u>. Ако h_C е височината към хипотенузата в триъгълника, то от условието следва, че $h_C=\frac{1}{2}AB=m_C$ (m_C - медианата към хипотенузата в триъгълника). Тогава правоъгълният ΔABC е равнобедрен с бедра $AC=BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$. Оттук нататък разсъжденията са аналогични на предходния начин за решаване на задачата.

Задача 5. Отг. А) 1. Тъй като BC е ортогоналната проекция на BM върху основата, то от $BC \perp AB$ и от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $BM \perp AB$ (фиг. 1). Следователно двустенният ъгъл между (ABM) и основата е $\angle MBC$. От правоъгълния ΔBCM следва, че търсеният тангенс е равен на отношението $\frac{CM}{BC}$. Задачата се свежда до намиране на ръба CM. Както по-горе, DC е ортогоналната проекция на DM върху основата и $CD \perp AD$. Отново от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $\angle MBC = 90^o$. Сега $\frac{15}{2}=S_{ADM}=\frac{AD.DM}{2}=\frac{3.DM}{2}$, откъдето $DM=$



Фигура 1

5. От правоъгълния ΔDCM, по теоремата на Питагор, следва, че $CM = 3$. Окончателно, търсеният тангенс е $\frac{3}{3} = 1$.



Фигура 1

Задача 6. Отг. А) $\frac{5}{12}$. Всички възможности за избор на 5 души от общо 10 са $C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = 252$. Благоприятните възможности са:

1) Двама от Кърджали, двама от Пловдив и един от Хасково, т.е. $C_5^2.C_3^2.C_2^1 = 10.3.2 = 60;$

2) Двама от Кърджали, един от Пловдив и двама от Хасково, т.е. $C_5^2.C_3^1.C_2^2 = 10.3.1 = 30;$

3) Един от Кърджали, двама от Пловдив и двама от Хасково, т.е. $C_5^1.C_3^2.C_2^2 = 5.3.1 = 15.$

Тогава всички благоприятни възможности са 60 + 30 + 15 = 105. Вероятността с едно-единствено случайно избиране да бъде сформирана комисия, в която няма повече от двама преподаватели от един и същи град, е $\frac{105}{252} = \frac{5}{12}$.

Забележка. При решаването на задачи от подобен тип в редица случаи се прилага и друг подход, който може да доведе до улесняване на изчисленията – пресмята се вероятността на противоположното на разглежданото събитие и тя се изважда от единица, т.е. P (в комисията няма повече от двама души от един град) = 1–P (в комисията има повече от двама души от един град). Според нас използването на този подход в конкретната задача не е удачно, тъй като вариантите, благоприятстващи събитието „в комисията има повече от двама души от един град", са повече от вариантите, благоприятстващи събитието „в комисията няма повече от двама души от един град".

7. Отг. 46. _Първи начин_. Тъй като $29^2 + 5.29 = 986$ (трицифрено число) и $30^2 + 5.30 = 1050 = 6.175$ (четирицифрено число), то $n \geq 30$. Аналогично, $97^2 + 5.97 = 9894 = 6.1649$ (четирицифрено число) и $98^2 + 5.98 = 10094$ (петцифрено число), т.е. $n \leq 97$. Заключаваме, че $n \in [30;97]$. Числата n могат да се запишат във вида $6l$, $6l+1$, $6l+2$, $6l+3$, $6l+4$ или $6l+5$. Лесно се вижда, че числата от вида $6l+2$ и $6l+5$ не изпълняват условието $n(n+5)$ да се дели на 6. Следователно n е от вида $6l$, $6l+1$, $6l+3$ или $6l+4$. Числата 96 и 97 са от такъв вид. От друга страна, всички естествени числа в интервала $[30;95]$ са 66 на брой и 44 от тях са от вида $6l$, $6l+1$, $6l+3$ или $6l+4$. Следователно броят на естествените числа n, за които числото $n^2 + 5n$ е четирицифрено и се дели на 6, е 44+2 = 46.

Втори начин. Аналогично на първия начин се установява, че $n \in [30;97]$. Освен това лесно се вижда, че числата $n^2 + 5n = n(n+5)$ са четни, т.е. се делят на 2. Затова остава да се изследва възможността да се делят на 3. Числата n могат да се представят във вида $3k, 3k+1$ и $3k+2$, като $n(n+5)$ се дели на 3 в случаите $n = 3k$ и $n = 3k+1$ и не се дели на 3, когато $n = 3k+2$. Числото 30 е от вида $3k$, а числото 98 е от вида $3k + 2$. Естествените числа в интервала [30;98] са 69 на брой, като точно $\frac{2}{3}$ от тях (т.е. 46) са от вида $3k$ или $3k + 1$.

3. Анализ на резултатите в XII клас

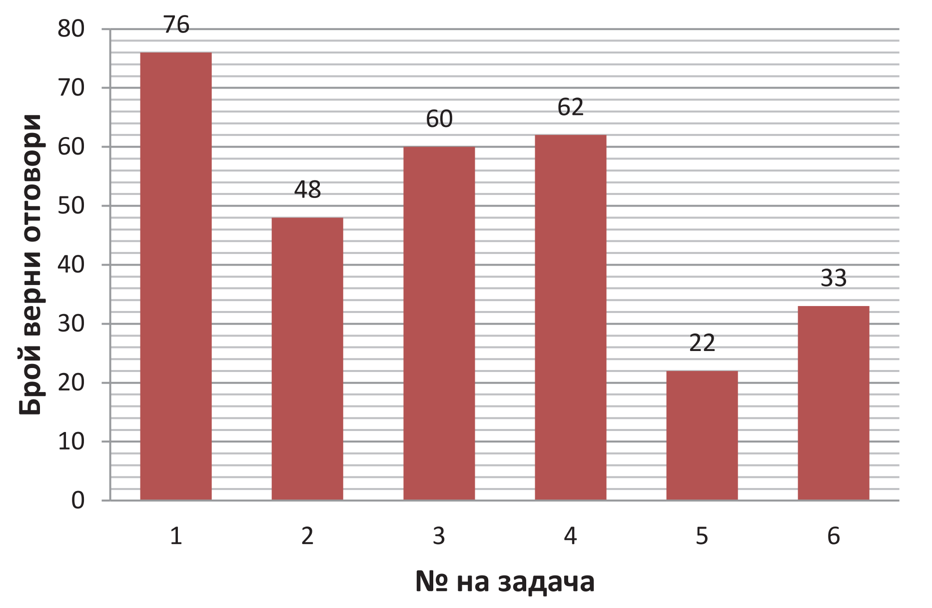
На първо място сред дванадесетокласниците се класира Димитър Ряпов от ПМГ „Акад. Боян Петканчин“ – Хасково, с 20 точки. Второ и трето място заеха съответно Лилия Петрова от ПМГ „Акад. Боян Петканчин“ – Хасково, с 19 точки и Джем Неджиб от ПГДС „Цар Иван Асен II” – Хасково, с 18 точки. От всички 109 участници 31 са събрали 50% и повече от максималния брой точки, а само двама имат 0 точки. Това показва, че задачите в предложената тема са балансирани и дават възможност участниците в състезанието да покажат своите знания, като се имат предвид и разнообразните сфери на математиката, от които са задачите.

На фиг. 2 е показано представянето на участниците (брой верни отговори) по задачи от 1 до 6.

Анализът показва, че 69,7% от участниците са решили вярно първа задача, 44% – втора задача, 55,1% – трета задача, 56,9% – четвърта задача, 20,2% – пета задача и 30,3% – шеста задача. Успеваемостта за седма задача е 17%, а общият брой събрани точки от всички задачи е 995,5 от общо 2507 възможни, което означава 39,7% успеваемост върху темата на всички участници.

Изводите, които могат да се направят на база тези резултати, са няколко.

- Въпреки че последната задача не бе толкова трудна, успеваемостта при нея е



Фигура 2

най-малка. Това според нас се дължи не толкова на самото условие, а на факта, че участниците нямат ориентация за отговор, за разлика от останалите задачи.

- Сред тестовите задачи от затворен тип най-слабо е представянето на пета задача. Това показва недостатъчна подготовка на учениците от XII клас в региона в областта на стереометрията.
- Задача 6 е решена от едва 30% от участниците, което показва затруднения на учениците да се справят със задачи от комбинаторика и вероятности, независимо че задачата, включена в теста, е близка по трудност на задачи, предлагани на държавни зрелостни изпити по математика.
- По първа задача, в която лесно може да се изходи само от предложените отговори, по трета задача (върху подобни задачи учениците задължително се подготвят в часовете по СИП и в школите) и по четвърта задача, която е стандартна и по наше мнение, най-лесна в темата, резултатите са най-високи.
- Като цяло успеваемостта е значително под 50%, причина за което може да се търси както в самата тема, така и в нивото на подготовка на участниците в математическия турнир.

4. Заключение

В заключение ще си позволим да изтъкнем някои насоки за бъдещата работа с изявени ученици, които според нас ще доведат до подобряване на тяхното представяне в подобни математически състезания.

- Наложително е да бъдат завишени часовете по математика в началното, основното и средното образование. Сходни идеи застъпват и други автори, според които малкото време, отделено за математика, не може да доведе учениците до сериозни постижения[3].
- Темите, предлагани на подобни състезания, следва да бъдат задълбочено прецизирани, за да няма възможност по метода на изключването да се определи верният отговор. До вярно съждение състезателят трябва да достигне след решаване на съответната задача, основавайки се на нейната специфика.
- Крайно време е нивото, което се създава в училище, да бъде такова, че вместо да се намалява трудността на задачите с всяка следваща година, тя да се увеличава. Това се обосновава предвид основополагащата същност на математиката за подготовката на един млад човек, поради което училището следва да осигурява не само математическите познания и умения, необходими за успешната реализация на своите ученици в бъдеще, но и да формира у тях интерес и мотивация да изучават и използват математиката[4].
- Не на последно място, искаме да изразим нашето собствено мнение, без да ангажираме други с него, а именно, че тестовите задачи (от затворен тип) са подходящи за матури, външно оценяване или конкурсни изпити за прием в средните и висшите училища. При математически състезания темата следва да се състои от три-четири задачи (със или без подточки), при решаването на които учениците да имат възможност да покажат изцяло последователността от разсъжденията, които осъществяват.

БЕЛЕЖКИ

1. Гроздев С., С. Дойчев. „Математическите игри като средство за откриване на математически таланти“. Сборник с доклади от 38. пролетна конференция на СМБ „Математика и математическо образование“, 2009 г., стр. 237–244.
2. Авторите не претендират, че изложените начини за решаване на задачите изчерпват всички възможни.
3. Банков, К. Постиженията на учениците по математика в средното училище в края на XX век. Резултати от международното изследване TIMSS-R. „Математика и информатика“, 3–4, 2001.
4. „Предизвикателства пред училищното образование“, резултати от участието на България в Програмата за международно оценяване на учениците PISA 2012,

доклад, достъпен на http://www.ckoko.bg/upload/docs/2013-12/PISA_2012.pdf към 10.12.2014 г.

ANALYSIS OF THE PROBLEMS AND PERFORMANCE OF THE STUDENTS FROM 12TH GRADE ON THE REGIONAL MATHEMATICS TOURNAMENT IN KARDZHALI – 2014

Abstract. The present paper discusses the tasks for the 12th grade in the Regional Mathematics Tournament in Kardzhali, held on 11.29.2014. Different approaches to their solutions are proposed. On the basis of the obtained results the authors analyze the level of preparation of participants in events of a similar type and make some suggestions for the improvement of the future work with outstanding students in mathematics.

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.**
University of Economics
77, “Kniaz Boris I” Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg

✉ **Dr. Jordan Petkov, Assist. Prof.**
University of Economics
77, “Kniaz Boris I” **B**lvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: jr_petkov@ue-varna.bg