Educational Matters
Въпроси на преподаването

КОГНИТИВНИ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ МАТЕМАТИЦИТЕ С УВРЕДЕНО ЗРЕНИЕ

Милен Замфиров
Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Историята на математиката познава много слепи математици. Един зрящ математик обикновено работи седнал, драскайки върху лист хартия. Как работят слепите математици? Те не могат да разчитат на стенографирани мисли, хрумнали изведнъж и нахвърляни на листче хартия, или на аргументи, надраскани набързо на ръка, където „това“ се извежда от „там“ и „онова“ не пасва с „тук“. Въпреки всичко в много случаи слепите математици работят по почти същия начин както зрящите.

Keywords: blind mathematicians, cognitive process, Boy‘s surface

В днешно време, когато степента на увлечение на зрящите ученици и възрастни хора по математиката постепенно намалява, удивително е какви резултати са постигали, постигат и с пълна сигурност ще постигат и занапред онези слепи учени, посветили се на математиката.

През последните десетилетия много изследвания са посветени на проучванията на пространствените умения и способности на слепите хора. Преобладаващото мнение е, че те имат по-слаби и по-малко ефективни пространствени възможности от зрящите. Въпреки това в много случаи се отчитат и доста силни страни на този процес.

В статията се разглеждат някои когнитивни особености в мисловния процеси при слепи математици. Описани са някои трудности в процеса на разбиране, както и силните страни в когнитивните процеси при слепите математици.

Традиционно се смята, че природо-математическите дисциплини са едни от най-трудните за хората с нарушено зрение, понеже в условията на нарушеното зрение са нарушени и представите за форма и пространство. Освен това математическите текстове са трудни за записване на брайловото писмо и ориентирането в тях е по-сложно.

В настоящата статия ще се спрем именно на тези предимства и ще се опитаме да дадем примери, които би могло да се използват за развиването на математическото мислене при слепи ученици.

Слепият математик Б. Морен[1] отбелязва, че на зрящите студенти обикновено се преподава по такъв начин, че когато те мислят за пресичането на две равнини, те виждат равнините като двумерни образи, нарисувани върху лист хартия. За тях геометрията са тези образи. Те нямат никаква идея за равнини, съществуващи в естественото им пространство, казва Морен (Sossinski 1999). Тъй като незрящите студенти не използват чертежи, то за тях е естествено да мислят за равнините по абстрактен начин (Гроздев & Петрова 2014).

Б. Морен смята, че има два вида математическо въображение. Единият вид, който той нарича „подобен на времето", се занимава с информацията чрез преминаване през поредица от стъпки. Това е видът въображение, което позволява да се извършват дълги изчисления. *Никога не съм бил добър в изчисленията*, отбелязва Морен, *а слепотата задълбочава тази трудност* (Sossinski, 1999). Това, в което той изпъква, е друг вид въображение, което нарича *подобие на пространство* и което дава възможност на човека да разбере цялата информация наведнъж.

Трудното при визуализирането на геометрични обекти е, че човек има тенденцията да вижда обектите само отвън, а не отвътре, което може да бъде много сложно. Този вид пространствено въображение изглежда по-малко зависимо от визуалните преживявания, отколкото от тактилните. *Нашето пространствено въображение е предопределено от манипулирането с обектите*, смята Морен. *Извършвате движения с обекти чрез ръцете си, а не с очите си. Така че дали сте отвън, или отвътре, е нещо, което наистина е свързано с действията ви върху обекта* (Sossinski, 1999). Тъй като е свикнал много с тактилната информация, Морен може за години напред да запамети формата на даден модел, с който е работил и е държал в ръцете си. Това не е чудно, понеже слепият човек не получава основната си информация за околния свят чрез зрението. За разлика от зрящия, който използва зрението си за опознаване на формата, големината, положението на обкръжаващите го предмети и по този начин не развива способностите ръцете му да дават тези познания, то за слепия тяхното развиване е абсолютна необходимост. Е. Петрова също подчертава, че зрителното четене на графики при зрително затруднени ученици трябва да се замени с тактилно разчитане на релефни изображения (Петрова, 2014).

Разбира се, тактилната информация не е толкова прецизна, колкото визуалната, но пък е по-сигурна, понеже се получава чрез пряк телесен контакт, а не от разстояние, както е при зрението и слуха.

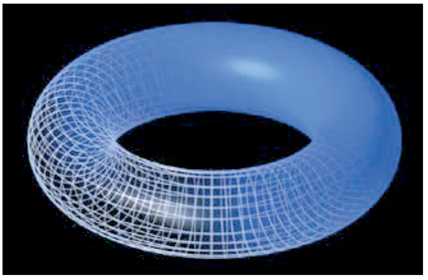
Топология и слепота

Като се замислим, не е толкова изненадващо, че много слепи математици работят в областта не само на геометрията, но и на топологията. Това е така основно заради специфичната връзка, която се отчита при възприемането на света от слепия, и характеристиките на топологично неразличимите фигури. Например миризмата не може да се изрази количествено, не се дава с число външния облик на тялото, но топологията е намерила начини за количествено изучаване на някои качествени понятия – като например формите на различните тела. Преди всичко телата трябва да се класифицират по своите конфигурации, т.е. кои фигури смятаме за топологично еднакви. Ако чрез деформация една фигура се свежда към друга без каквито и да е разкъсвания, разрези и слепвания, двете фигури са топологично неразличими. Една топка сурова глина може да претърпи на грънчарското колело редица изменения, в които топологът не би видял смяна на формата. Ако натиснем с длан глинената топка отгоре, ще получим елипсоид вместо кълбо. Ако пък натиснем в средата с пръсти и разширим постепенно оформилата се вдлъбнатина, можем да направим чаша. Изтегляйки стените ѝ, ще я превърнем в кана, на която дори можем да издърпаме чучурче. За тополозите всичко това е една и съща фигура. Но ако сега откъснем парченце глина и я залепим за каната като дръжка, ще получим абсолютно нова топологична фигура. Всъщност направили сме наведнъж две забранени операции – откъснали сме материал, а след това сме го залепили на друго място (Тяпкин & Шибанов, 1984).

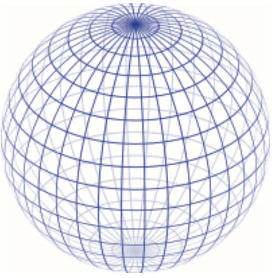
Топологията характеризира геометричните тела само чрез свойства, които не се изменят при произволни преобразувания, с единственото условие да не се извършват разкъсвания и слепвания. Ето защо нито ъгловите, нито линейните размери на телата спадат към топологичните свойства. Затова пък свойството на фигурата да бъде едно цяло или пък да се състои от определен брой отделни парчета е топологично. Например, за да направим от „осмицата“ „две нули“ или обратно, ще ни се наложи или да разкъсаме едната фигура, или да слепим другите две. Размерността на фигурата е също топологичен признак. Без едновременното слепване на много точки тримерният куб няма как да се превърне в двумерен квадрат.

Точно тук се намира и предимството на един сляп математик – пространствените способности на слепия човек се основават на мозъка, който анализира информацията, получена чрез усещането за допир и чрез слуха, докато пространствените способности на зрящия човек се основават на мозъка, който анализира двумерно изображение, което се проектира върху ретината от триизмерния ни свят.

И в двата случая мозъкът създава гъвкави методи на пространствено представяне на базата на информация от сетивата. Сосински (Sossinski, 1999) отбелязва, че проучванията на слепи хора, които са възвърнали зрението си, показват, че способността да се възприемат някои основни топологични структури, като например колко дупки има даден предмет, е вероятно вродена. *Така че един сляп човек, който е възстановил зрението си, в началото не може да направи разлика между квадрат и кръг*, пише Сосински. *Той просто вижда тяхната топологична* *равностойност. От друга страна, той веднага забелязва, че торът* (фиг. 1) *не е сфера* (фиг. 2) (Sossinski, 1999).



Фигура 1. Тор[2]



Фигура 2. Сфера [3]

Сферата и торът са добър пример на съществено различни топологични повърхнини. И има топологично свойство, по което те се различават: ако по повърхността на сферата – например по повърхността на топка, нанесем произволна затворена линия и срежем по нея тялото, то неизбежно ще се разпадне на две части. Но направим ли затворен разрез (дори по „екватора“) на един надуваем спасителен пояс, неговата тороидна повърхнина ще си остане цяла (Тяпкин & Шибанов, 1984).

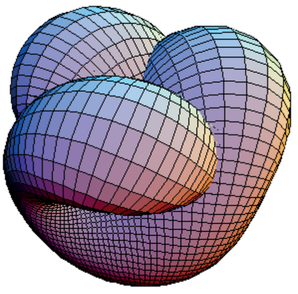
С точно този вид математически дейности, обикновено затрудняващи виждащите хора, един сляп математик добива предимство пред зрящия – успешното търсене на характеристики на геометричните форми, които не се менят при разрешените в топологията преобразувания и които по тази причина се наричат топологични инварианти.

Сосински отбелязва също, че зрящите хора понякога имат и погрешни схващания за триизмерното пространство поради несъответстващата и подвеждаща двумерна проекция върху ретината. *Слепият човек (чрез другите си сетива) има недоформирана тримерна интуиция за пространство,* казва той (Sossinski, 1999). Затова не е чудно, че именно сляп математик – Б. Морен – за пръв път параметризира повърхнината на Бой (фиг. 3).

Повърхнината на Бой

В началото на 1960 г. Арнолд Шапиро създава начин за обръщане на сфера, но никога не го публикува (George & Morin, 1980). Той обяснява метода си на Морен, който вече бил започнал разработването на собствени подобни идеи.

Физикът Марсел Фройсарт също се интересува от проблема и предлага ключово улеснение за Морен – благодарение на сътрудничеството си с Фройсарт през



Фигура 3. Повърхнина на Бой[4]

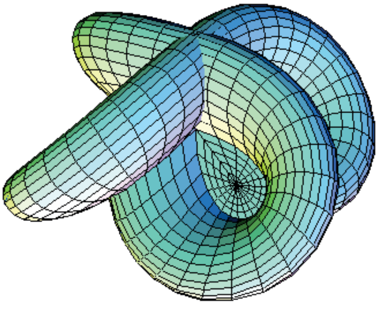
Фигура 4. Б. Морен и модели на повърхнината на Бой[5]

1967 г. той първи показва хомотопия, която извършва обръщане на сфера (фиг. 5) (Phillips, 1966).

Самото понятие *хомотопия* произлиза от гръцки език (*homós* – еднакъв, подобен, и *tópos* – място) и се ползва в топологията за означаване на фамилия изображения, при които едно топологично пространство чрез деформация се изобразява в друго, като е налице изискването всяко следващо пространство да е в някаква степен подпространство на предходното.

Но нека се върнем на повърхнината на Бой. Да си представим, че ходим по права линия от едно до безкрайност по равна повърхност. Ако поставим по една точка в двата края на линията и съберем двете точки в една, линията се превръща в кръг.

Вселената може да наподоби това: ако разпръснеш светлина в безкрая, тя може, в крайна сметка, да свети зад теб. Този тип пространство се нарича проективно пространство (и може да е доста трудно човек да си го представи!).

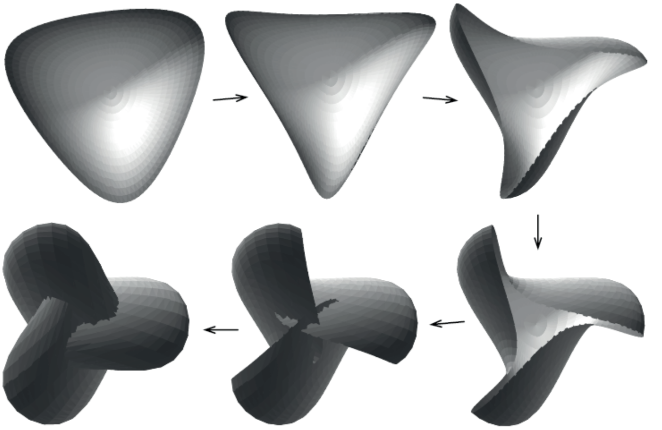


Фигура 5. Хомотопия, която извършва обръщане на сфера[6]

Що се отнася до добавените точки в безкрайността, колко са те и как се свързват помежду си? Всяка прави линия се довършва (за да образува кръг) чрез добавяне на една точка. Учудващо, повече от една линия може да поделят една и съща добавена точка. За да придобием по-ясна представа, нека да „приближим безкрайността“, за да можем да я разгледаме по-обстойно. За целта ние ще конструираме *биекция*[7] (хомеоморфизъм) от равнината до вътрешността на диска.

И така, моделирали сме равнина от вътрешната страна на диска. Къде да поставим точките на безкрайността? Отговорът е очевиден – ще ги сложим на границата на диска. Но тук има уловка. Знаем, че точките от двата края на линията трябва да са разпознаваеми. Затова, като си припомним двете точки на първоначалното им място – равнината, виждаме, че противоположните точки на границата на диска са всъщност една и съща точка в проективното пространство и трябва да бъдат идентични. За да онагледим точките в края на диска, ще използваме конец. Допираме двата края на конеца един до друг и после усукваме получения кръг така, че да се образува цифрата 8. След това прегъваме по средата така, че двете примки на осмицата да застанат една върху друга. Резултатът отново е кръг – кръгът на безкрайността. Сега нашата конструкция е завършена: всяка първоначална линия сега е кръг, а с добавения в безкрайността кръг създадохме *проективна плоскост*.

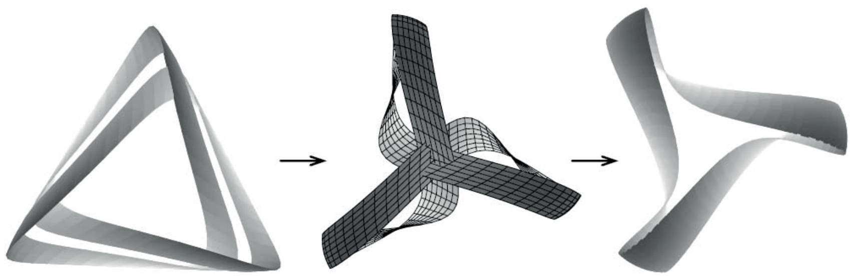
За да направим модел на проективната плоскост, трябва да вземем гумен диск и да свържем по някакъв начин противоположните точки на краищата на диска. Факт е, че това не може да се направи (в триизмерното пространство) без наличието на собствени точки на пресичане; дискът трябва да премине през себе си на някое място. Ето шест етапа на диск, който допира своите краища с цел да направи проективна плоскост (фиг. 6).



Фигура 6. Шестте етапа на диск, който допира своите краища[8]

В модела, постигнат като резултат от действията, всяко малко парче на диска прилича на леко сгънато парче от повърхност; в резултата няма гънки. Това състояние е познато като *имерсия*. Така създадохме конкретна имерсия, известна като *повърхнината на Бой (Boy's surface).*

Все още не е достатъчно ясно какво се случва на последните три картинки, затова да погледнем съответните връзки на ръба на диска (фиг. 7).



Фигура 7. Връзки на ръба на диска[8]

Нека сега погледнем по-отблизо тези точки на безкрайност. Според нашата конструкция има биекция между кръга с противоположни точки, идентифицирани (това е краят на диска) и прави линии през целия източник.

Изниква въпросът: къде са разположени точките на безкрайността, които са в края на правите линии и не преминават през източника? До коя от тези точки стигаме, ако тръгнем от някоя точка, далеч от източника?

Отговорът е, че успоредните линии имат еднакви крайни точки в безкрайността.

Този начин на мислене за проективната плоскост скрива нейната симетрия и хомогенност. Например кръгът в безкрайността произлиза от всички останали кръгове. За да избегнем объркване (или за да създадем такова), правите линии заедно със своите добавени точки и кръгът на безкрайността се наричат просто линии в проективната геометрия. Сега можем да кажем, че „всеки две различни линии се срещат в абсолютно една и съща точка“. По някакъв начин това прави проективната геометрия по-лесна от Евклидовата геометрия, където две линии могат или не могат да се срещнат.

Заключение

В заключение ще изтъкнем, че независимо от трудностите, пред които се изправят незрящите хора у нас, в частност и по отношение на навлизането в света на математиката, в нашата страна също се срещат слепи математици. Например н.с. Пенка Атанасова години е работила в Института по механика на БАН, учителите по математика в двете училища за деца с нарушено зрение във Варна и София д-р Елиза Петрова и Етиен Тодоров, които също са хора с нарушено зрение. Всичко това показва, че не съществуват реални ограничения за човешките възможности. Границите се намират само в съзнанието ни и те, а не физическите или менталните нарушения, поставят непреодолими бариери пред хора, които са талантливи, могат да реализират изумителни постижения и имат дарба в трудни и абстрактни области на познанието като математиката, която за мнозина от „нормалните“ и „здравите“ хора е недостижима.

БЕЛЕЖКИ

1. Историята за личния живот на Б. Морен е доста завладяваща. Роден през 1931 г. в Шанхай, където баща му работи в банка, Морен се разболява от глаукома в ранна възраст и е заведен във Франция за лечение. Завръща се в Шанхай, където на шестгодишна възраст ослепява напълно. И все пак той пази свои снимки от годините, в които е все още зрящ, и си припомня, че като дете е имал силен интерес към оптичните явления. Ранните му визуални спомени са особено живи, защото, докато расте, те не се заменят с други изображения.

   След като ослепява, Морен напуска Шанхай и се връща във Франция за постоянно. Там той се обучава в училище за слепи до петнайсетгодишна възраст, когато постъпва в общообразователно учебно заведение. Интересува се от математика и философия, но баща му, мислейки, че синът му няма да се справи с математиката, го насочва към философията. След като няколко години учи в École Normale Supérieure, Морен се разочарова от философията и се премества да учи математика. Учи при Анри Картан и се присъединява към Националния център за научни изследвания като изследовател през 1957 г.
2. http://bg.wikipedia.org/wiki/Тор_%28геометрия%29
3. http://bg.wikipedia.org/wiki/Сфера
4. http://en.wikipedia.org/wiki/Boy%27s_surface
5. http://torus.math.uiuc.edu/jms/Photos/MathArt/Maubeuge/dickson-morin/)
6. http://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Morin
7. Биекция е всяко изображение, което е едновременно сюрективно и инективно. С други думи, това е всяко съответствие между две множества A и B, при което на всеки елемент от множеството A съответства един и само един елемент от множеството B, като всеки елемент от множеството B е образ на точно един елемент от множеството A.
8. http://homepages.warwick.ac.uk/~maaac/proj.pdf

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С., Петрова, Е. (2013). Върху преподаването на математика на ученици със зрителни увреждания, *Математика и информатика*, т. 56, 4, 314 – 316.

Замфиров, М. (2012). Приносът на слепите математици в алгебрата и геометрията, *Годишник на Софийския университет „Св. Климент Охридски“*, Факултет по начална и предучилищна педагогика, т. 104, 57 – 66.

Петрова, Е (2014). *Формиране на математически умения у ученици 1. – 4. клас с увредено зрение*. Автореферат на дисертационен труд: Пловдив.
Тяпкин, А., А. Шибанов (1984). *Поанкаре.* София: Наука и изкуство.
George, K., B. Morin (1979). Arnold Shapiro's eversion of the sphere. *Mathematical Intelligencer*, 4, 145 – 147.
Phillips, A. (1966) Turning a surface inside out. *Scientific American,* v. 214, 5, 30 – 45.
Sossinski, A. (1999) *Noeuds*: *Genese d'une Theorie Mathematique.* Paris: Editions du Seuil.

REFERENCES

Grozdev, S., Petrova, E. (2013). Varhu prepodavaneto na matematika na uchenitsi sas zritelni uvrezhdaniya, *Matematika i informatika*, t. 56, 4, 314 – 316.
Zamfirov, M. (2012) Prinosat na slepite matematitsi v algebrata i geometriyata, *Godishnik na Sofiyskiya universitet „Sv. Kliment Ohridski", Fakultet po nachalna i preduchilishtna pedagogika*, t. 104, 57 – 66.
Petrova, E (2014). *Formirane na matematicheski umeniya u uchenitsi 1. – 4. klas s uvredeno zrenie. Avtoreferat na disertatsionen trud*: Plovdiv
Tyapkin, A., A. Shibanov (1984). *Poankare.* Sofiya: Nauka i izkustvo
George, K., B. Morin (1979). Arnold Shapiro's eversion of the sphere. *Mathematical Intelligencer*, 4, 145 – 147.
Phillips, A. (1966) Turning a surface inside out. *Scientific American*, v. 214, 5, 30 – 45.
Sossinski, A. (1999) *Noeuds: Genese d'une Theorie Mathematique.* Paris: Editions du Seuil.

COGNITIVE DIMENSIONS TO BLIND MATHEMATICIANS

Abstract. The history of mathematics includes a number of blind mathematicians. A sighted mathematician generally works by sitting around scribbling on paper. So how do blind mathematicians work? They cannot rely on backof-the-envelope calculations, half-baked thoughts scribbled on restaurant napkins, or hand-waving arguments in which "this" attaches "there" and "that" intersects "here". Still, in many ways, blind mathematicians work in much the same way as sighted mathematicians do.

✉ **Dr. Milen Zamfirov, Assoc. Prof.**
Department of Special Education and Speech Therapy
Sofia University "St. Kliment Ohridski"
15, Tsar Osvoboditel Blvd.
1504 Sofia, Bulgaria
E-mail: milen_zamphirov@abv.bg