Educational Technology
Образователни технологии

САМОСТОЯТЕЛНО РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ С EXCEL

[1)]**Пламен Пенев,** [2)]**Диана Стефанова**
[1)]*СОУ „Панайот Волов" – Шумен*
[2)]*ОУ „Никола Йонков Вапцаров" – Асеновград*

Резюме. В статията експерименталната среда на Excel се използва за проверка на идеи, хрумвания, догадки, обуславящи процеса на решаване на по-трудни математически задачи. Описана е методика, по която ученикът, разчитайки на „интелигентната" помощ на Excel, самостоятелно може да стигне до решението на нестандартна задача.
Keywords: problem solving, equation, numbers, tables, macros

1. Увод

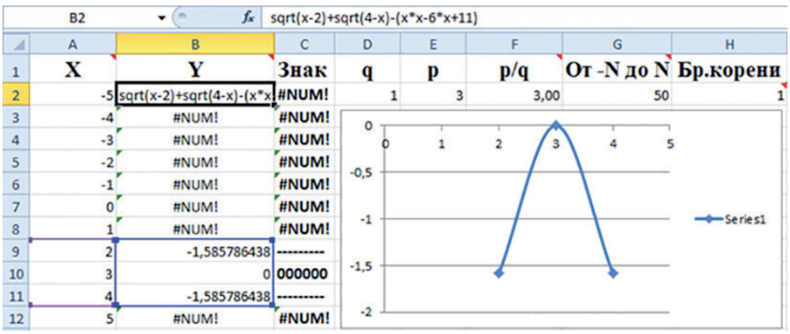
Настоящата статия е продължение на „Евристика с Excel" от бр.1 и „Още евристики с Excel" от бр.5 на 2014 г. Считаме, че читателят е запознат с описаните в тях техники и модели за решаване на задачи от училищния курс по математика. В предишните статии средата на Excel се използва предимно за таблично представяне на математическа задача и проверка на крайните резултати. Но за организиране на самостоятелната работа на ученика интерес представляват възможностите на Excel за проверка на хрумвания, догадки, стратегии за решаване. Това е особено важно при по-трудните задачи, изискващи съобразителност и досетливост. Тук, в рамките на рубрика „Математика с компютър", използваме потенциала на моделите за поддържане на логическите разсъждения, съпровождащи етапите на решаване. Експериментите провеждаме върху задачи и обяснения към тях по два от нестандартните методи, описани в книгата *Как да решаваме лесно трудни задачи* (Запрянов & Райков 2012).

2. Метод на ограниченията (мини-макса) с отделяне на точен квадрат

Методът на ограниченията се използва в уравнения, в които участват функции, проявяващи различни тенденции. Ако в общата дефиниционна област едната страна на уравнението, разглеждана като функция, има минимум, а другата – максимум, и двете функции имат обща екстремална точка, то *x* координатата на тази точка е решение.

Пример 1. Решете уравнението: $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$ (Запрянов & Райков 2012, *Как да решаваме лесно трудни задачи*, стр. 16, зад. 1).

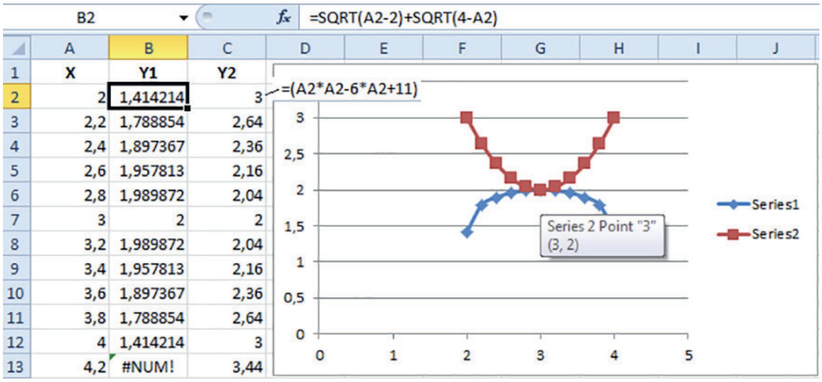
Първо, нека потърсим корените на уравнението с модела ForFor. В клетка B2 въвеждаме: $sqrt(x-2)+sqrt(4-x)-(x*x-6*x+11)$ и натискаме Start. Получаваме следния екран:



Фиг. 1

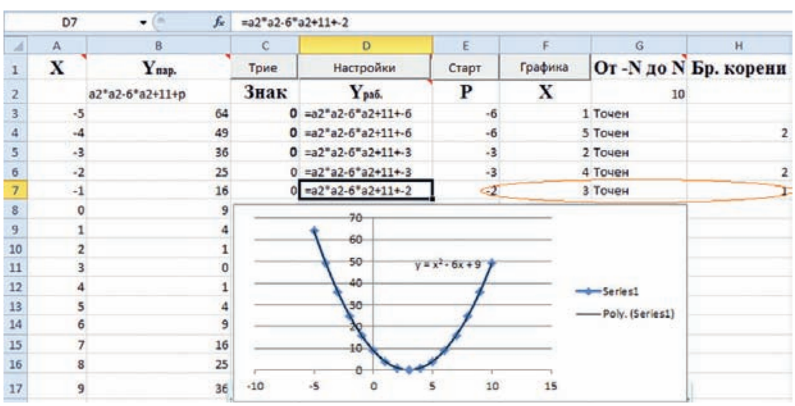
В колони *X* и *Y* различаваме дефиниционната област на $x : x \in [2; 4]$. Макросът намира един рационален корен $x = 3$. За да докажем резултата, ще се придържаме към логическата схема, предложена от авторите на задачата, ползвайки подсказки от Excel. Повдигането на двете страни на квадрат води до уравнение от осма степен. Принудени сме да търсим друг начин за решаване. Тъй като лявата и дясната страна на равенството са съответно ирационална и квадратна функция, привлекателна изглежда идеята за прилагане на метода на мини-макса. С *Y*1 обозначаваме лявата страна на уравнението, а с *Y*2 – дясната. В обикновена таблица в колони *Y*1 и *Y*2 прехвърляме от ForFor транслирания вид на двете части. В колона *X* разбиваме дефиниционната област на подинтервали с големина 0,2. Извеждаме *XY* графика от колони *X*, *Y*1 и *Y*2.

На чертежа забелязваме, че *Y*1 и *Y*2 са съответно затворена и отворена парабола, които се допират в една екстремална точка с координати (3, 2). Извод: даденото уравнение има единствено решение $x = 3$ и това твърдение може да се докаже чрез прилагане на метода на мини-макса. Но Excel ще ни помогне да решим задачата и алгебрично. За опростяване на изразите често използван в практиката метод е отделянето на точен квадрат. Проверяваме тази възможност. Започваме с



Фиг. 2

дясната страна. С параметъра p обозначаваме стойността на коефициента, с който трябва да коригираме свободния член, т.е. решаваме параметричното уравнение $x^2 - 6x + 11 + p = 0$. В клетка B2 на модел Param въвеждаме: $x * x - 6 * x + 11 + p$. След изпълнение получаваме:

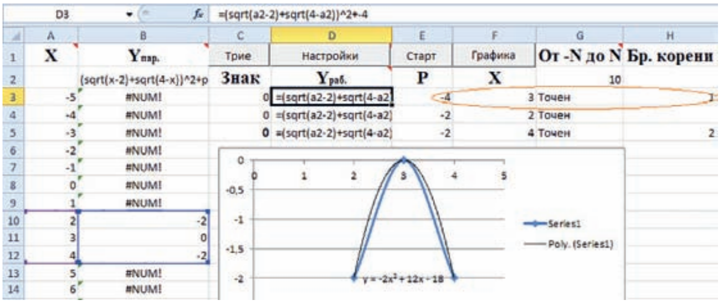


Фиг. 3

Оценка на резултатите: линията на тренда, изведена от частното уравнение с един корен (нулева дискриминанта), показва, че отделеният точен квадрат е $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$. $p = -2$ означава, че за тази цел 11 се представя като 9 (от тренда) минус (-2). С изваждането на p възстановяваме първоначалната функционалност на израза, който преобразуваме.

Извод: $Y2 = x^2 - 6x + 11 = x^2 - 6x + 9 - (-2) = (x-3)^2 + 2 \geq 2$, т.е. $Y2$ има минимум равен на 2 при $x = 3$.

За опростяване на лявата страна е удобно същата да се повдигне на квадрат: $Y1^2 = \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2$. Разглеждаме по-общия случай: $Y1^2 = \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2 + p$. Решаваме с модел Param:



Фиг. 4

От линията на тренда и от $p = -4$ следва:

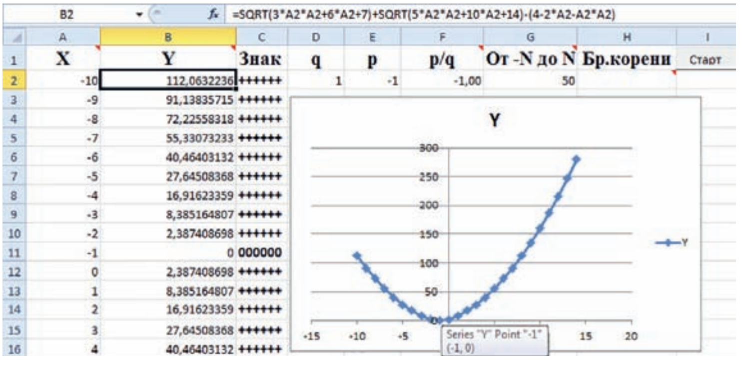
$Y1^2 = -(-4) - 2(x^2 - 6x + 9) = 4 - 2(x-3)^2 \leq 4$, т.е. $Y1$ има максимум равен на 2 при $x = 3$.

Окончателен извод от анализа на двете страни: $x = 3$.

Ползата от Excel нараства при задачи, в които участват по-сложни изрази.

Пример 2. Решете уравнението: $\sqrt{3x^2 + 6x + 7} + \sqrt{5x^2 + 10x + 14} = 4 - 2x - x^2$ (Запрянов & Райков 2012, *Как да решаваме лесно трудни задачи*, стр. 74, зад. 11).

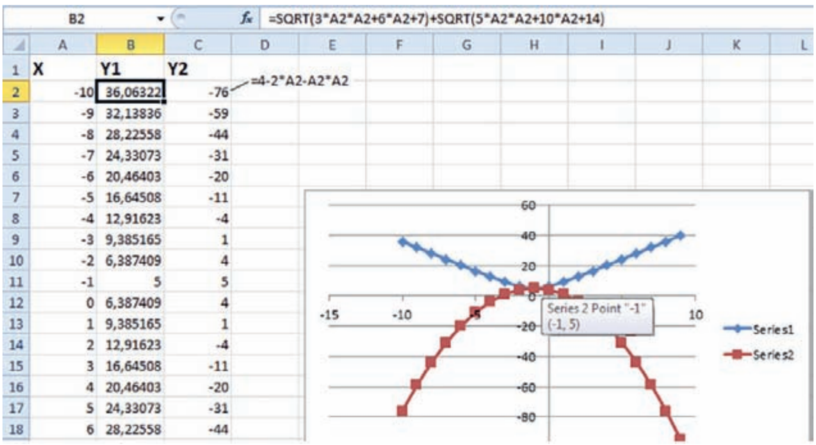
1. Има ли уравнението рационални корени?



Фиг. 5

Открит е един рационален корен $x = -1$.

2. Проверка на предположение за прилагане на метода на мини-макса.



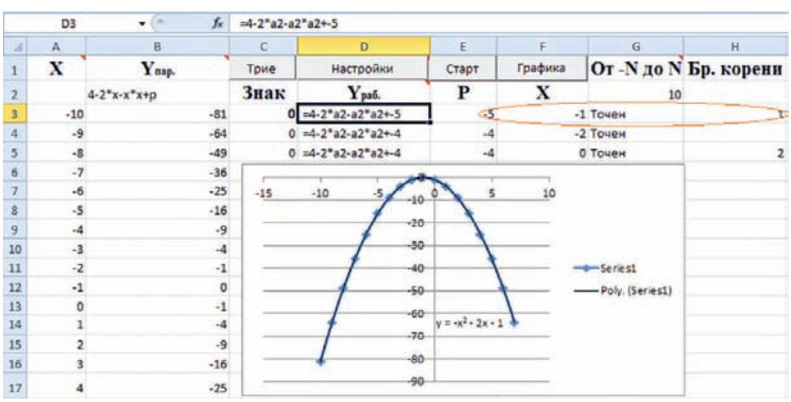
Фиг. 6

Извод: Лявата страна на уравнението е ограничена с минимум отдолу, а дясната – с максимум отгоре. Координати на общата екстремална точка: $(-1, 5)$. Потвърждава се отговорът $x = -1$. Методът на мини-макса е приложим.

Алгебрично решение:

3. Опит за отделяне на точен квадрат от квадратните тричлени с Param.

3.1. Дясна страна: Решаваме параметричното уравнение $4 - 2x - x^2 + p = 0$.

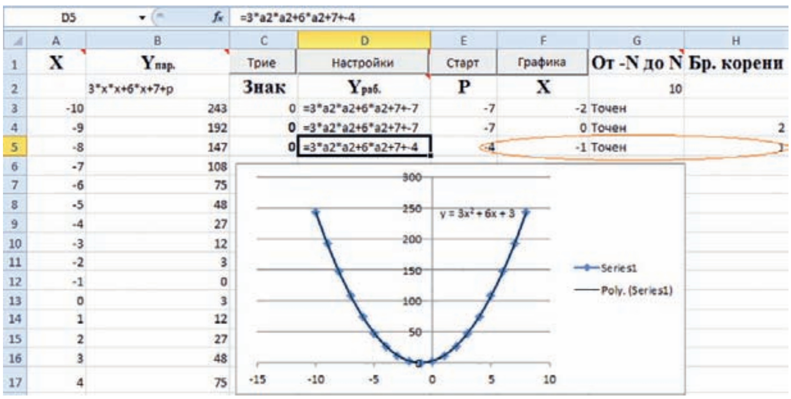


Фиг. 7

Извод: $4-2x-x^2=-(-5)-\left(x^2+2x+1\right)=5-\left(x+1\right)^2$. От изискването за неотрицателност на дясната страна следва условието $5-\left(x+1\right)^2\le 5$

3.2. Лява страна:

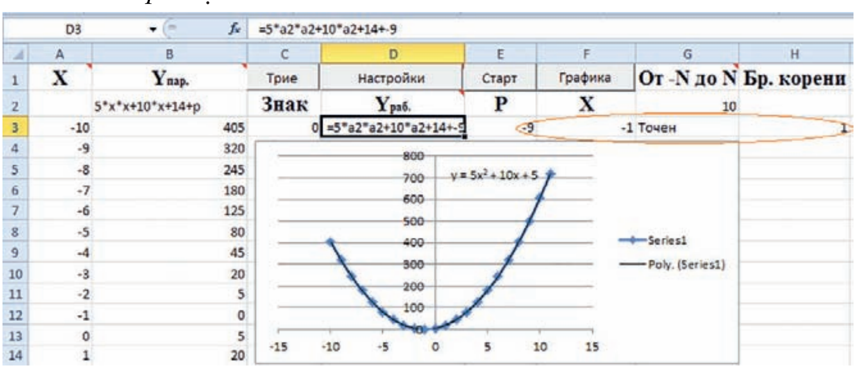
3.2.1. За първата подкоренна величина решаваме параметричното уравнение $3x^2+6x+7+p=0$.



Фиг. 8

От линията на тренда и от $p=-4$ следва, че $3x^2+6x+7=3\left(x+1\right)^2+2^2$.

3.2.2. За втората подкоренна величина решаваме параметричното уравнение: $5x^2+10x+14+p=0$.



Фиг. 9.

От линията на тренда и от $p=-9$ следва, че $5x^2+10x+14=5\left(x+1\right)^2+3^2$.

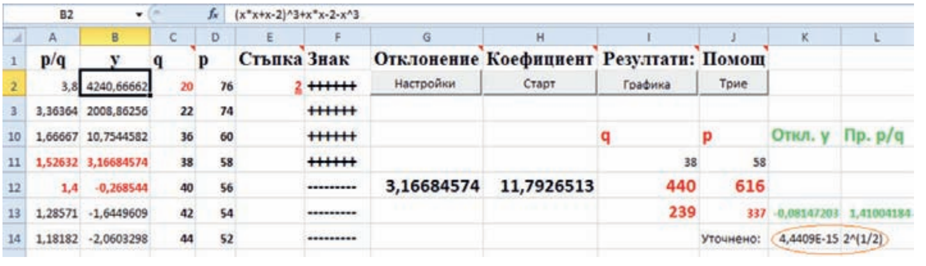
Общо за лявата страна получаваме:

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=\sqrt{3(x+1)^2+2^2}+\sqrt{5(x+1)^2+3^2}\geq 5.$$

Окончателен извод: Двете страни на уравнението са равни на 5 при $x=-1$.

3. Вместо заключение

Предлаганите автоматизации са приложими в задачи, в които се търсят рационални корени. Слабо място на моделите в сегашния им вид е получаване и анализ на резултати, съдържащи радикали. Но доработка в това направление е възможна. Ето пример, при който макрос Irra намира корен √2, в уравнението $\left(x^2+x-2\right)^3+x^2-2-x^3=0$ (Запрянов & Райков 2012, *Как да решаваме лесно трудни задачи*, стр. 67, зад. 16), чрез сравняване на резултата с приближени десетични стойности. Работата на макроса е описана в [3].



B2 | f_x (x*x+x-2)^3+x*x-2-x^3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p/q	y	q	p	Стъпка	Знак	Отклонение	Коефициент	Резултати:	Помощ		
2	3,8	4240,66662	20	76	2	++++++	Настройки	Старт	Графика	Трие		
3	3,36364	2008,86256	22	74		++++++						
10	1,66667	10,7544582	36	60		++++++			q	p	Откл. y	Пр. p/q
11	1,52632	3,16684574	38	58		++++++			38	58		
12	1,4	-0,268544	40	56		---------	3,16684574	11,7926513	440	616		
13	1,28571	-1,6449609	42	54		---------			239	337	-0,08147203	1,41004184
14	1,18182	-2,0603298	44	52		---------				Уточнено:	4,4409E-15	2^(1/2)

Фиг. 10

Изразяването на намерен корен с радикали би разширило значително кръга на решаваните задачи. В тази насока виждаме пътищата за усъвършенстване на експерименталната среда на Excel.

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С., Деков Д. (2013). Математика с компютър. *Математика и информатика*, 56, 2, 123 – 132.

Гроздев, С., Деков Д. (2013). Екстремални задачи в средното училище с помощта на компютърни таблици. *Математика и информатика*, 56, 4 , 351 – 367.

Запрянов, З., Райков, Н. (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи.* София: Просвета.

Запрянов, З., Райков Н. (2012). Някои нестандартни методи за решаване на уравнения, неравенства и системи. *Математика и информатика*, 55, 6, 526 – 535.

Князева, Е., Гроздев С., Георгиева М., Гълъбова Д. (2013). *Синергетичният подход във висшето педагогическо образование (Върху примери от дидактиката на математиката)*. В. Търново: СЛОВО (ISBN 978-954-439-986-3).

Пенев, П. (2014). Евристика с Excel. *Математика и информатика*, 57, 1, 18 – 33.
Пенев, П. (2014). Още евристики с Excel. *Математика и информатика*, 57, 5, 472 – 479.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

REFERENCES:

Grozdev, S., Dekov D. (2013). Matematika s kompyutar. Matematika i informatika, 56, 2 , 123 – 132.
Grozdev, S., Dekov D. (2013). Ekstremalni zadachi v srednoto uchilishte s pomoshtta na kompyutarni tablitsi. Matematika i informatika, 56, 4 , 351 – 367.
Zapryanov, Z., Raykov, N. (2012). Kak da reshavame lesno trudni zadachi. Sofiya: Prosveta.
Zapryanov, Z., Raykov N. (2012). Nyakoi nestandartni metodi za reshavane na uravneniya, neravenstva i sistemi. Matematika i informatika, 55, 6, 526 – 535.
Knyazeva, E., Grozdev S., Georgieva M., Galabova D. (2013). Sinergetichniyat podhod vav vissheto pedagogichesko obrazovanie (Varhu primeri ot didaktikata na matematikata). V. Tarnovo: SLOVO (ISBN 978-954-439-986-3).
Penev, P. (2014). Evristika s Excel. Matematika i informatika, 57, 1, 18 – 33.
Penev, P. (2014). Oshte evristiki s Excel. Matematika i informatika, 57, 5, 472 – 479.
Grozdev, S. (2007). For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

INDEPENDENT PROBLEM SOLVING WITH EXCEL

Abstract. In this paper, the experimental medium of Excel is used for a verification of ideas, thoughts, and guesses, which arise in the process of solving harder mathematical problems. A description of methodology, which can help the student to independently solve non-standard problem with the *intelligent* assistance of Excel, is given.

✉ **Mr. Plamen Penev**
Informatics Teacher
Secondary School „Panayot Volov“ – Shumen
Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Mathematics Teacher
Primary School „Nikola Yonkov Vaptzarov“ – Asenovgrad
Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg