Educational Research
Научно–методически статии

ОБОБЩЕНИЯ ЗА НЯКОИ КЛАСОВЕ НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ, СВЕЖДАЩИ СЕ ДО РЕКУРЕНТНА ЗАВИСИМОСТ

Росен Николаев
Икономически университет – Варна

Резюме. В статията се доразвива рекурентната връзка за известния клас интеграли от вида $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ и се извежда формула за тяхното пресмятане. Предлага се нова методика и се извежда формула за пресмятане на един клас интеграли от вида $\int \frac{x^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^{\alpha}}}dx$, където $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Keywords: indefinite integral, recurrence, differential binomial

За редица неопределени интеграли от вида $I(x,n)$, зависещи освен от реалната променлива x и от числото $n \in \mathbb{N}$, са изведени рекурентни зависимости от вида $I(x,n) = f(x,n).I(x,n-k) + g(x,n)$, където $k \in \{1,2,...,n\}$. Един такъв известен интеграл е

$$J(x,n) = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Ако се положи $\frac{x}{a} = t$, той се свежда до интеграла $I(t,n) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, като $J(x,n) = \frac{1}{a^{2n-1}} I(t,n)$. За интеграла $I(t,n)$ е изведена рекурентната връзка[1]

$$I(t,n) = \frac{t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I(t,n-1). \tag{1}$$

Целта, която си поставяме в настоящата статия, е да се изведат обобщени формули за пресмятане на интеграли от подобен тип, решаването на които води до рекурентна зависимост.

1. Развиване на интеграла $I(x,n)=\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}$

За краткост ще означим този интеграл с I_n. Очевидно $I_1=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$.
Ще продължим с развиването на формула (1), докато достигнем до I_1.

$$I_n=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}=$$

$$=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}\left[\frac{x}{2(n-2)(1+x^2)^{n-2}}+\frac{2n-5}{2n-4}I_{n-2}\right]=$$

$$=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}.\frac{x}{2(n-2)(1+x^2)^{n-2}}+\frac{2n-3}{2n-2}.\frac{2n-5}{2n-4}I_{n-2}=$$

....

$$=\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}.\frac{x}{2(n-2)(1+x^2)^{n-2}}+\ldots+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\operatorname{arctg}x=$$

$$=\frac{(2n-3)!!(2n-2)!!x}{(2n-2)!!(2n-3)!!2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}+\frac{(2n-3)!!(2n-4)!!x}{(2n-2)!!(2n-5)!!2(n-2)(1+x^2)^{n-2}}+$$

$$\ldots+\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\operatorname{arctg}x,$$

или се получава обобщената формула

$$I_n=\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\left[x\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!(1+x^2)^i}+\operatorname{arctg}x\right]+C,\ n\geq 2. \tag{2}$$

Тази формула сме извели и публикували още през 2007 г.[2]

2. Интеграли от вида[3] $\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}dx$

Идеята за написване на настоящата статия възникна в процес на съставяне на подходящи задачи за студентски олимпиади по математика. Разглеждайки интеграли като:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^4}}dx \quad \text{и} \quad \int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

стигнахме до обобщения интеграл

$$I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^4}}dx,$$

който е от вида на диференциален бином[4], т.е.

$$I_m = \int x^m \left(1-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

1) Нека $m = 2l$ (l – цяло неотрицателно число). В този случай не е в сила нито един от трите случая, описани за диференциален бином, при които интегралът е решим в елементарни функции, откъдето следва, че е нерешим.

2) Нека $m = 2l + 1$. Ще разгледаме два случая: $m = 4k+3$ и $m = 4k+1$ (k – цяло неотрицателно число).

В първия случай $\frac{m+1}{4}$ е цяло число и полагаме $1-x^4 = t^2$. Тогава: $\sqrt{1-x^4} = t$, $x^4 = 1-t^2$ и $dx^4 = d(1-t^2)$, откъдето $4x^3dx = -2tdt$, $dx = -\frac{t}{2x^3}dt$. За интеграла се получава:

$$I_m = I_{4k+3} = \int \frac{x^{4k+3}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{(1-t^2)^k.x^3}{t}.\left(-\frac{t}{2x^3}\right)dt = -\frac{1}{2}\int (1-t^2)^k dt.$$

Последният интеграл се решава, като подинтегралната функция се развие по Нютоновия бином:

$$I_m = I_{4k+3} = -\frac{1}{2}\int \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i t^{2i} dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i \frac{t^{2i+1}}{2i+1} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^i \frac{\left(\sqrt{1-x^4}\right)^{2i+1}}{2i+1} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{1-x^4}}{2}\sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{\left(x^4-1\right)^i}{2i+1} + C.$$

Във втория случай $\frac{m+1}{4}-\frac{1}{2}$ е цяло число и полагаме $x^{-4}-1=t^2$. Тогава: $x^4=\frac{1}{1+t^2}$, $dx=\frac{-t}{2x^3(1+t^2)^2}dt=-\frac{tx^5}{2}dt$, $\sqrt{1-x^4}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ и $t=\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}$. Получава се:

$$I_m=I_{4k+1}=\int\frac{x^{4k}.x}{\sqrt{1-x^4}}dx=\int\frac{x.\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^k.t}.\left(-\frac{tx^5}{2}\right)dt=-\frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{1+t^2}.x^6}{(1+t^2)^k}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1+t^2)^{k+1}}.$$

За последния интеграл се прилага формула (2) при $n=k+1$:

$$I_m=I_{4k+1}=-\frac{1}{2}I(t,k+1)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left[t\sum_{i=1}^{k}\frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!.(1+t^2)^i}+\operatorname{arctg}t\right]+C=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left[\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{(2i-2)!!.x^{4i}}{(2i-1)!!}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right]+C. \qquad (3)$$

3. Интеграли от вида $I_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Този интеграл отново е от вида на диференциален бином и е решим за всяко естествено число m. Ако m е нечетно число, след полагане $x^2=t$ той лесно се свежда до интеграл от полином, развит по формулата за Нютоновия бином. Ще разгледаме случая, при който $m=2l$ и ще представим два начина за решаване на I_m.

1) $I_m=I_{2l}=\int x^{2l}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. Тъй като $\frac{2l+1}{2}-\frac{1}{2}=l$ - цяло число, то от третия случай на интеграл от диференциален бином полагаме: $x^{-2}-1=t^2$, или $\frac{1-x^2}{x^2}=t^2$. Тогава $x^2=\frac{1}{1+t^2}$, $dx=-tx^3dt$, $\sqrt{1-x^2}=xt$ и

$$I_m=I_{2l}=\int\frac{1}{(1+t^2)^l.x.t}.(-tx^3)dt=-\int\frac{dt}{(1+t^2)^{l+1}}. \qquad (4)$$

Последният интеграл се пресмята по формула (2) при $n = l+1$ и се получава

$$I_m = I_{2l} = -\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\sum_{i=1}^{l}\frac{(2i-2)!!.x^{2i}}{(2i-1)!!} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] + C. \tag{5}$$

2) Ще изведем рекурентна зависимост за I_m, която ще доразвием в обобщена формула.

$$I_m = -\int\frac{-x^m + x^{m-2} - x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int\frac{x^{m-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx + I_{m-2} =$$

$$= -\frac{1}{m-1}\int\sqrt{1-x^2}\,dx^{m-1} + I_{m-2} =$$

$$= -\frac{1}{m-1}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{m-1}\int x^{m-1}\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}dx + I_{m-2} =$$

$$= -\frac{1}{m-1}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{m-1}I_m + I_{m-2},$$

или

$$\frac{m}{m-1}I_m = I_{m-2} - \frac{1}{m-1}x^{m-1}\sqrt{1-x^2}.$$

Получава се рекурентната връзка:

$$I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2} - \frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2}.$$

Развиваме тази зависимост, докато достигнем до $I_0 = \int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C$:

$$I_m = \frac{m-1}{m}\left[\frac{m-3}{m-2}I_{m-4} - \frac{1}{m-2}x^{m-3}.\sqrt{1-x^2}\right] - \frac{1}{m}x^{m-1}.\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{(m-1).(m-3)}{m.(m-2)}I_{m-4} - \frac{m-1}{m.(m-2)}x^{m-3}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{m}x^{m-1}\sqrt{1-x^2} = \ldots.$$

Като се вземе предвид, че $m = 2l$, се получава:

$$I_{2l} = \frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}I_0 - \frac{(2l-1)!!.0!!}{(2l)!!.1!!}x\sqrt{1-x^2} - \frac{(2l-1)!!.2!!}{(2l)!!.3!!}x^3\sqrt{1-x^2} - \ldots$$

$$-\frac{(2l-1)!!.(2l-2)!!}{(2l)!!(2l-1)!!}x^{2l}\sqrt{1-x^2}.$$

Получената обобщена формула може да се запише окончателно в следния вид:

$$I_{2l}=\frac{(2l-1)!!}{(2l)!!}\left[\arcsin x-\sqrt{1-x^2}\sum_{i=1}^{l}\frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!}.x^{2i-1}\right]+C\,. \tag{6}$$

За да съвпадат формули (5) и (6), остава да покажем, че $-\arcsin x=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$. Равенството е вярно, тъй като производните на лявата и дясната страна съвпадат.

И така, изводът, който можем да направим, е че интеграли от последния клас е по-целесъобразно да бъдат пресмятани по втората методика или чрез използване на изведената формула (6). Предимствата от директното използване на формули (5) и (6) се изразяват в следното:

– не се налага изследване на условията за интеграли от вида на диференциален бином;

– не се налагат субституции и последващите ги изразявания, за да се достигне до интеграли от първия вид и прилагане на формула (2).

За да направим сравнение между използването на изведените формули и прилагането на досегашната методика, ще решим следния пример по три начина.

Пример. Да се реши интегралът $J_6=\int\frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение. <u>*I начин*</u>. Като се използват знанията за диференциален бином, се достига до интеграла, разгледан в началото на статията, за който се прилага известната рекурентна връзка (1).

$J_6=\int x^6(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. Тук $m=6, n=2, p=-\frac{1}{2}$. Полага се $x^{-2}-1=t^2$ или $\frac{1-x^2}{x^2}=t^2$. Тогава $x^2=\frac{1}{1+t^2}$, $dx=-tx^3dt$, $\sqrt{1-x^2}=xt$. Следователно

$$J_6=\int\frac{1}{(1+t^2)^3}.\frac{1}{xt}.(-tx^3)dt=-\int\frac{1}{(1+t^2)^4}dt=-I(t,4)\,. \tag{7}$$

По формула (1) се намират последователно:

$I(t,1)=\operatorname{arctg} t$;

$$I(t,2)=\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\,;$$

$$I(t,3)=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left[\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\right]=\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3t}{8(t^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}t\,;$$

$$I(t,4)=\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5}{6}\left[\frac{t}{4(t^2+1)^2}+\frac{3t}{8(t^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}t\right]=$$

$$=\frac{t}{6(t^2+1)^3}+\frac{5t}{24(t^2+1)^2}+\frac{5t}{16(t^2+1)}+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}t.$$

След като се замести в (7) и се изрази $t=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и $x^2=\frac{1}{1+t^2}$, за решението на изходния интеграл се получава

$$J_6=-\left[\sqrt{1-x^2}\left(\frac{x^5}{6}+\frac{5x^3}{24}+\frac{5x}{16}\right)+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]+C.$$

<u>*II начин*</u>. След установяване на връзката $J_6=-I(t,4)=-I_4$ се прилага директно изведената формула (2). Тогава

$$J_6=-I_4=-\frac{5!!}{6!!}\left[t\left(\frac{0!!}{1!!.(t^2+1)}+\frac{2!!}{3!!.(t^2+1)^2}+\frac{4!!}{3!!.(t^2+1)^3}\right)+\operatorname{arctg}t\right]+C=$$

$$=-\frac{5}{16}\left[t\left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{2}{3(t^2+1)^2}+\frac{8}{15(t^2+1)^3}\right)+\operatorname{arctg}t\right]+C=$$

$$=-\left[t\left(\frac{5}{16(t^2+1)}+\frac{5}{24(t^2+1)^2}+\frac{1}{6(t^2+1)^3}\right)+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}t\right]+C\cdot$$

След заместване на t с $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и на $\frac{1}{1+t^2}$ с x^2, се получава

$$J_6=-\left[\sqrt{1-x^2}\left(\frac{5x}{16}+\frac{5x^3}{24}+\frac{x^5}{6}\right)+\frac{5}{16}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]+C\,.$$

Става ясно, че използването на обобщената формула (2) води по-бързо до крайния резултат.

III начин. Прилага се формула (6) при $l = 3$:

$$J_6 = \frac{5!!}{6!!}\left[\arcsin x - \sqrt{1-x^2}\left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{18}{15}x^5\right)\right] + C =$$

$$= \frac{5}{16}\arcsin x - \sqrt{1-x^2}\left(\frac{5x}{16} + \frac{5x^3}{24} + \frac{x^5}{6}\right) + C.$$

Считаме, че решеният пример ясно показва, че използването на формула (6) е най-удачно.

4. Интеграли от вида $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^\alpha}}dx$, $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Представената в точка 3 методика за решаване на интеграла $I_m = \int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}dx$ позволява да направим следното обобщение. Разглеждаме интеграла $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^\alpha}}dx$, където $k \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Полагаме $x^{\frac{\alpha}{2}} = t$, $dx = \frac{dt}{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}}$, $x^{k\alpha} = t^{2k}$,

при което той се преобразува до:

$$I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^\alpha}}dx = \int \frac{x^{k\alpha}x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^\alpha}}dx = \int \frac{t^{2k}x^{\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-t^2}}.\frac{dt}{\frac{\alpha}{2}x^{\frac{\alpha}{2}-1}} = \frac{2}{\alpha}\int \frac{t^{2k}dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\alpha}I_{2k},$$

като последният интеграл се решава по формула (6).

В заключение можем да направим следните обобщения на основните резултати, постигнати в настоящата разработка:

1. Доразвита е рекурентната връзка и е изведена формула в компактен вид за пресмятане на интеграли от т.нар. клас „многохилядници“: $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$.

2. Изведената формула се прилага за решаване на интеграли от следния клас: $\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

3. За интеграли от вида $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^{\alpha}}}dx$, $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, които могат да бъдат сведени до „многохилядника“, се предлага друг подход и се извежда формула за тяхното пресмятане.

БЕЛЕЖКИ

1. Вж. например: Брадистилов, Г. (1947). *Сборник от задачи и теореми по диференциално и интегрално смятане*. София: Геогр. институт, с. 91; Подобни интеграли има в редица книги, като напр. Демидович Б. П. (1963). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, с. 172 – 173, но те не са в обобщен вид, а целта тук е да се достигне до нещо повече от рекурентна връзка.

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. (2010). *Математика за икономисти*. София: Издателство на ВУЗФ (ISBN 978-954-8590-06-8).

Дочев, Д., Р. Николаев (2007). *Математически анализ I – сборник от решени и нерешени задачи.* Варна: ИУ „Наука и икономика“, с. 255.

Гелерт, В. и др. (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: ДИ „Наука и изкуство“, с. 182 – 183.

REFERENCES

Grozdev, S. (2010). *Matematika za ikonomisti.* Sofiya: Izdatelstvo na VUZF (ISBN 978-954-8590-06-8).

Dochev, D., R. Nikolaev (2007). *Matematicheski analiz I – sbornik ot resheni i neresheni zadachi.* Varna: IU „Nauka i ikonomika“, s. 255.

Gelert, V. i dr. (1983). *Matematicheski entsiklopedichen rechnik.* Sofiya: DI „Nauka i izkustvo“, s. 182 – 183.

GENERALIZATION OF SOME TYPES OF INDEFINITE INTEGRALS, WHICH CAN BE SOLVED BY RECURRENCE

Abstract. In this article we develop a recurrence for the indefinite integrals of the famous type $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$ and a formula for their calculation. A new methodology and a formula for solving integrals of the type $I_{k,\alpha} = \int \frac{x^{k\alpha+\frac{\alpha}{2}-1}}{\sqrt{1-x^{\alpha}}}dx$, where $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ are also described.

✉ **Dr. Rosen Nikolaev, Assoc. Prof.**
University of Economics – Varna
77 „Kniaz Boris I“ Blvd.
9002 Varna, Bulgaria
E-mail: nikolaev_rosen@ue-varna.bg