

# ВЪЗМОЖНОСТИ ЗА СЪГЛАСУВАНOST НА ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА В СРЕДНИТЕ УЧИЛИЩА И ВЪВ ВИСШИ УЧИЛИЩА

Мариана Дурчева, Елена Върбанова  
Технически университет – София

**Резюме.** Представени са констатации относно равнището на подготовката по математика на завършилиите средни училища, които постъпват във висши училища със или без конкурсен изпит по математика. Обоснована е необходимостта от сътрудничество между тези училища с цел по-добра подготовка по математика на бъдещите студенти. Посочени са възможности за съвместни дейности по конкретни учебни теми, подкрепени с графични илюстрации на основни понятия и примерни задачи. Имплицитно е показано съчетано използване на класически и компютърно-подпомогнати подходи в обучението по математика, разглеждано като триединство „преподаване – учене – оценяване (обратна връзка)“.

**Keywords:** secondary school, university, mathematics education, collaboration, computer-supported mathematics education

## 1. Въведение

*“Aspire to Inspire... before to Expire.”*  
*„Стреми се да се вдъхновяваш... докато те има.“*

Многогодишният ни опит в провеждане на кандидатстудентски курсове по математика, на упражнения и лекции по математически дисциплини във висши училища, в оценяване на изпитни работи на кандидат-студенти и на студенти първокурсници ни позволява да изградим виждане относно необходимостта и полезността от съгласуваност на обучението по математика в двете образователни институции: средно училище (СУ) и висше училище (ВУ).

Какво ни дава **основание** да се стремим (aspire) да изразим наша гледна точка?

От една страна, това е фактът, че има голяма разлика в оценките по математика в дипломите на учениците и оценките им на конкурсните (приемни) изпити и изпитите по математика през първата изпитна сесия. От друга страна, това е споделяното от кандидат-студенти и студенти първокурсници.

– Не сме решавали задачите по този начин: например да намираме верния отговор (при множествен отговор) предимно с разсъждения, без много изчисления („А в училище само изчисляваме...“).

– Как така стигнахме за кратко време до верните отговори на въпроси/задачи от конкурсните изпити, без или само с малко изчисления?

– Толкова просто и лесно! Защо не ни учат така в училище?

– За първи път успявам сам да реша задача по математика. Отивам си и започвам да решавам.

– Това ли е решението – само от един чертеж ли го извличаме?

– и много други с подобен контекст.

Самите те се впечатляват от това, че освен научените в училище дълги неефективни решения има и други – кратки и по-лесни за тях, които обаче изискват да се използват и „свържат“ подходящи знания; че с прилагане на теоретични факти може да се стигне до правилни очаквания за решението; че трябва да се прави проверка/контрол за непротиворечивост на резултата, за вярност и пълнота на решението. Специално отбелязваме, че в обучението рядко се обръща внимание на последното, а то е съществено: спомага учениците/студентите да развиват способност за т.нар. *рефлексия* (Grozdev, 2007). Тази способност е особено важна и при използване на софтуер в процеса на решаване на задачи-компоненти, на цяла задача – за (само)контрол на резултатите от символни и числови пресмятания и на получените графични изображения.

Прави впечатление, че и кандидат-студенти, и студенти първокурсници оценяват и лесно възприемат съвета да изграждат навик да решават задачите „*не как да е*“, който изисква *мислене от висок порядък* (Grozdev, 2007). Те съзнават, че този добър навик е полезен за всяка дейност, която би им се наложило да извършват в живота.

Положителното в нашите наблюдения е, че тези кандидат-студенти и студенти са „отворени“ към знанието, искат и могат да изучават математика ефективно. Склонни сме да приемем, че това се отнася за повечето ученици в СУ. Наш дълг е да направим възможното за тяхната увереност, че могат успешно да се занимават с математика.

## **2. Някои възможности за съгласуваност на обучението по математика в средни и във висши училища**

От страна на ВУ не може да се пренебрегва обстоятелството, че повечето първокурсници имат много пропуски в основните знания от училищната математика, недостатъчни умения за прилагането им и навици за учене. Поради това те срещат затруднения с новия учебен материал, губят интерес, не проявяват активност по

време на занятията. Резултатът е нисък среден успех по математическите дисциплини и недостатъчна подготвеност за разбиране и усвояване на следващите дисциплини. През последните години образователни експерти се обединяват около твърдението, че „Математиката е за всеки“ или че „Всеки човек (родил се със здрав ум) е способен да изучава математика“. Това ни окуражава и вдъхновява (inspire) да търсим пътища за съвместна работа на учители в СУ и преподаватели във ВУ на по-ранен етап (още от IX, X клас) с цел по-високи постижения на учениците, създаване на навици за учене и формиране на мотивация за образование над средното. А дали е възможно да го направим... **„Нека първо направим трудното, защото за невъзможното трябва малко повече време...“ (Фритьоф Хансен).**

В света вече се преминава към **нова парадигма**: вместо сравняване (comparison), състезание (competition), противопоставяне (confrontation) – да има сътрудничество (collaboration), коопериране (cooperation), взаимодействие (interaction) – при това и в глобален мащаб. Тази парадигма е наречена **нова етика на обучението**. В духа на тази етика ВУ могат да съдействат на средните за осигуряване на добро качество на входа на самите ВУ. Има добри примери: в Университета в Плимут, Англия, има специален отдел към Факултета по математика, който осъществява съвместни дейности със 17 средни училища в региона. Те включват разработване на съгласувани учебни програми; взаимно информиране за новости и тенденции в обучението; обсъждане на акцентите в учебното съдържание и на методически подходи – със и без използване на компютърни технологии; взаимни посещения на учебни занятия; грижа за квалификацията на учителите. Целта е постигане на зададените параметри на обучението по математика.

Подобни съвместни дейности могат да създават устойчиви и модерни мостове между средни и висши училища у нас. Вакуумът, който съществува, води до намален интерес на много ученици към висшето образование, до ненужен стрес у студенти първокурсници, тяхното обезкуражаване и смущаващо ниски изпитни резултати. Констатациите, които посочихме, пораждаат недоверие към образователната ни система, недостатъчно обществено признание и стимули за работата на учители и преподаватели.

### **3. Учебни теми, позволяващи реализиране на възможностите за взаимодействие между учители и преподаватели по математика**

Тук посочваме три теми, които предоставят богати възможности за сътрудничество и взаимодействие между средни и висши училища в обучението по математика.

**Тема I. Линейна функция – права линия.**

**Тема II. Линейни уравнения и линейни неравенства, съдържащи модули.**

**Тема III. Квадратна функция – парабола. Квадратни уравнения, квадратни неравенства, дробно-рационални неравенства.**

### **Относно Тема I.**

Преподаватели във ВУ могат да обсъждат с учители важността и приложимостта на знанията и уменията на учениците за опериране с линейни функции (термини, определения, аналитично, графично и числово представяне и извличане на информация от тях, въпроси, задачи и решения) за улесняване на изучаването на нови обекти (Ганчев, 1999) от математически анализ на функции на една променлива през първия семестър във ВУ:

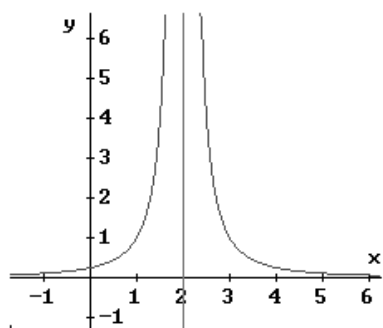
- геометрично тълкуване на граници на функции: хоризонтални, вертикални и наклонени асимптоти;
- секуща, допирателна и съответна нормала към графиката на функция;
- лице на равнинна област, в чието описание има линейни функции; и др.

Предварителното информиране на учениците за тези приложения на линейната функция и нейния графичен аналог, задаването/решаването на съответна дидактическа система от въпроси и задачи, съставени от учители и преподаватели, биха ги мотивирали за осъзната активност при целенасоченото изучаване на тази тема.

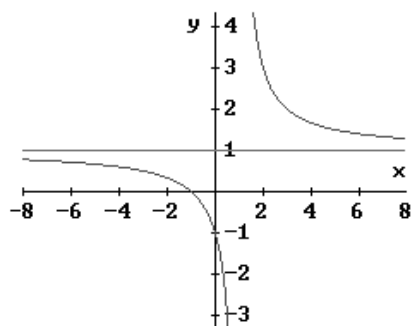
Както е известно, математическите знания имат йерархична структура: чрез въведени вече понятия се въвеждат следващи, чрез предходни твърдения се доказват нови. В методиката на обучението по математика (Ганчев и др., 2007) водещият въпрос е „Защо?“, след това или паралелно следват „Какво?“, „Кога?“, „Къде?“, „Как?“ и процесът на формиране на отговорите на тези въпроси е итеративен: тези отговори/методически решения са взаимосвързани. Учители и преподаватели могат заедно да намират продуктивни решения и практики по тези ключови въпроси, за да се повишават резултатите от обучението – знания, умения, компетентности, на учениците и студентите първокурсници. **„Добрата подготовка е 80% от работата.“**

На фиг. 1, фиг. 2 и фиг. 3 са представени учебни материали по математически анализ, използвани в лекции (Върбанова, 2009) или дадени към поставени задачи (Върбанова, 2011), свързани с гореизброените понятия, техни интерпретации и приложения.

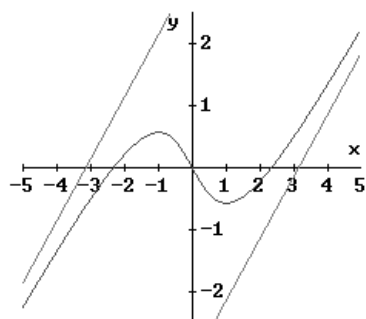
$$\#2: \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$



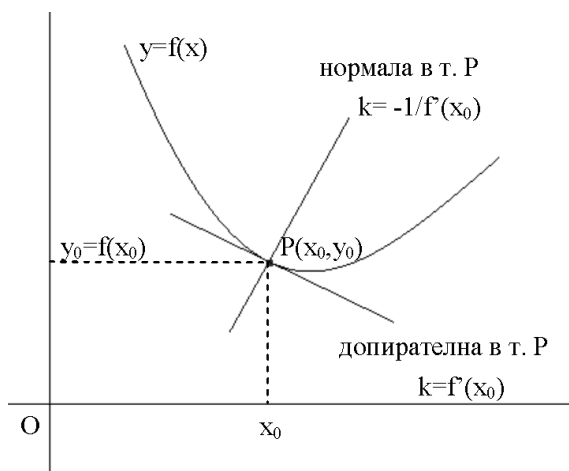
$$\#3: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$$



**Фигура 1.** Асимптоти: вертикална и хоризонтална права



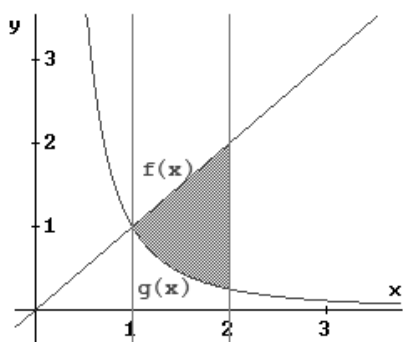
**а)** Наклонени асимптоти



**б)** Допирателна и нормала към графика на функция

**Фигура 2**

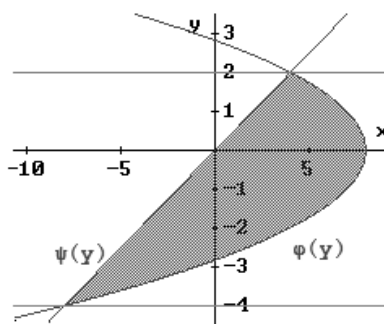
Учителят има свобода при съставяне на сценария и режисурата на учебното занятие, при избора на инструментариум за постигане на учебните цели, отчитайки аудиторията. Важното е с негова помощ учениците да изграждат култура/стил на мислене, да увеличават знанията и уменията си, да са способни да продължават образованието си. Преподавателите от ВУ могат съвместно с учителите да (пре) структурират учебното съдържание, да разработват подходящи илюстративни материали, да избират задачи и различни методически подходи за решаването им – както „на ръка“, така и с използване на компютърни технологии. Чрез техните целенасочени съвместни дейности може да се осигурява плавен преход за ученика към образователната среда във ВУ.



#1:  $f(x) := x$

#2:  $g(x) := \frac{1}{x}$

#3:  $\int_1^2 (f(x) - g(x)) dx = 1$



#4:  $\phi(y) := 8 - y^2$

#5:  $\psi(y) := 2 \cdot y$

#6:  $\int_{-2}^2 (\phi(y) - \psi(y)) dy = 36$

Фигура 3. Лице на равнинна фигура между две криви: права и парабола

**Относно Тема II.** Наблюденията ни показват, че повечето кандидат-студенти и студенти първокурсници „пропускат“ задачите, които съдържат модули, т.е. изрази под знака за абсолютна стойност: те нямат изграден усет за неговото значение и не разбират неговия смисъл. Методическо сътрудничество по тази тема също би подобрило сегашната ситуация. Темата отдавна е „заслужила“ вниманието на учители и преподаватели и има достатъчно добри методически разработки като основа за съвместни дейности. Единият от авторите на тази статия също е разработвал тази тема (Дурчева, 1994).

**Относно Тема III.** Тя е ключова и „пронизва“ цялото обучение по математика в средното училище. Необходимо е цялостно обсъждане и методически разработки за решаване на задачи от тези видове с ефективни подходи – класически и с използване на съвременен инструментариум. Самите кандидат-студенти и студенти първокурсници изпитват неудобство от собственото си незнание и безпомощност, когато например при решаване на дробно-рационално неравенство, в което числителят и/или знаменателят са разложени на прости множители (дясната страна е нула), първата им стъпка е разкриването на скобите. В общия случай това действие е в грешна посока; ясно е, че липсва навик да си задават въпроса „Защо ще го правя?“.

Недостатък в обучението в СУ и ВУ е откъснатостта на учебните дисциплини една от друга поради наложените се диференциация и фрагментарност. Преодоляването на този проблем също изисква съвместни усилия. Поради дедуктивната структура на математическите знания за ефективността на обучението по математика трябва да се отчита ролята на усвоените предхождащи знания и умения от дадена дисциплина за усвояване на нови знания и умения както в същата, така и в други дисциплини (Гюдженев, 2007). Представените в тази статия графики и задачи потвърждават тази роля: усвоените знания и умения по математика в средното училище са необходима основа за успешно изучаване на математика във ВУ.

### **Задачи, за които във ВУ се изискват знания и умения по гореизброените теми от СУ**

*„При изучаване на една наука примерите и задачите могат да бъдат толкова поучителни, колкото теорията.“*

**Нютон**

Чрез решаването на задачи се установява равнището на усвоеност на знанията, на умения за прилагането им. Може да се каже, че едно знание е усвоено, ако може да се приложи където, когато и както (не по единствен начин) трябва: иначе на Изток го наричат „суетно знание“. Затова решаването на задачи „не как да е“ също е една благодатна ниша за сътрудничество между учители и преподаватели по математика.

1. Да се определят **асимптотите**, интервалите на монотонност, интервалите на вдлъбнатост/изпъкналост, локалните екстремуми и инфлексните точки на функцията  $f(x) = \frac{x}{1 + \ln x}$ . Да се потвърдят резултатите с помощта на Системата за компютърна математика (СКА) Derive и да се съпроводят с геометрични илюстрации.

2. Дадена е функцията  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{4(x - 2)}$ .

(а) Да се намерят по аналитичен път уравненията на **допирателните към графиката на функцията** в точките с абсциси  $x_1 = 0$  и  $x_2 = 3$ .

(б) Да се намери пресечната точка на тези допирателни.

(в) Със средствата на СКМ Derive: да се потвърдят получените резултати; да се начертаят на една и съща координатна система допирните точки, графиката на функцията и допирателните от т. (а).

3. Да се изчисли **лицето на фигурата**, оградена от графиките на правата  $y = 2x$  и параболата  $y = x^2 - 3$ , като се:

(а) начертаят необходимите графики и се заштрихова фигурата;

(б) определят интеграционните граници и се състави подинтегралната функция;

(в) изчисли стойността на търсеното лице с помощта на съставения определен интеграл.

Да се използват възможностите на СКМ Derive за потвърждаване верността на всички графични, аналитични и числови резултати.

4. Правата с уравнение  $x + y = 2$  разделя площта на фигурата, оградена от окръжността с уравнение  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ , на две части. Да се изчисли **лицето** на по-малката част. Да се използват възможностите на СКМ Derive за определяне на подинтегралната функция и стойността на съставения определен интеграл; да се начертаят необходимите графики и се заштрихова търсената площ. Да се потвърди полученият резултат по аналитичен път. Може ли **да се реши задачата само със знания от средното училище**, т.е. без да се използва апаратът на интегралното смятане? (Конфуций: „Не използвай голямо оръдие, за да убиеш комар“).

5. Да се изчисли **лицето на фигурата**, оградена от графиките на функциите  $x = 3y^2$ ,  $x = -y^2 + 12y - 5$ . Да се използват възможностите на СКА Derive за определяне на интеграционните граници, подинтегралната функция и стойността на съставения определен интеграл; да се начертаят необходимите графики и се заштрихова фигурата. Да се потвърди полученият резултат по аналитичен път.

6. **Да се докаже неравенството:**  $3^x > x + 1$ , ако  $x \in (0, \infty)$ . Да се даде геометрична илюстрация с помощта на СКМ Derive.

7. Да се изчисли **лицето на фигурата**, оградена от графиките на функциите  $y = |x - 1|$  и  $y = 3 - |x|$ , като се:

(а) начертаят необходимите графики и се заштрихова фигурата;

(б) определи броят на фигурите, чиито лица могат да се изчислят с помощта на съответни определени интеграли;

(в) определят интеграционните граници и се изчислят определените интеграли.

Да се даде **решение със средствата на училищната математика**.

Да се използват възможностите на СКА Derive, за да се потвърди полученият резултат.

### **Заключение**

Създаването на условия за „Учене през целия живот“ е задача на съвременните общества. Средните и висшите училища осигуряват фундамента от знания и умения за нейното осъществяване. Съвместната им работа ще доведе до по-високи постижения на учениците и студентите и до изграждане на творчески личности. Без фундамент няма творчество.

### **Благодарности**

Нашата благодарност е към учителите ни по методика – проф.д.п.н. Иван Ганчев и проф.д-р Константин Петров, както и към проф.д.п.н. Сава Гроздев за поощрението, компетентните съвети и ползотворната му работа за качествено математическо образование в България.

### **ЛИТЕРАТУРА**

- Върбанова, Е. (2009). *Математически анализ – I*. София: ТУ – София.
- Върбанова, Е. (2011). *Упражнения по Математически анализ – I*. София: ТУ – София.
- Ганчев, И. (1999). *Основни учебни дейности в урока по математика*. София: Модул – 96.
- Ганчев, И., Нинова, Ю., Никова, В. (2007). *Методика на обучението по математика (Обща част)*. Благоевград: Унив.изд. „Неофит Рилски“.
- Гюдженев, И. (2007). *Методиките на обучението във висшите училища*. Благоевград: Унив.изд. „Неофит Рилски“.
- Джаков, П., Леви, Р., Троянски, С. (2007). *Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива*. София: СУ „Св. Климент Охридски“.
- Дурчева, М. (1994). Графики на някои линейни функции и техни приложения. *Елементарна математика – алфа*, 4, 169 – 177
- Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, Ch., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (2008) *Mathematik*. Heidelberg: Spektrum.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-854-92139-1-1), 295 pages.

### **REFERENCES**

- Varbanova, E. (2009). *Matematicheski analiz – I*. Sofiya: TU – Sofiya.
- Varbanova, E. (2011). *Uprazhneniya po Matematicheski analiz – I*. Sofiya: TU – Sofiya.
- Ganchev, I. (1999). *Osnovni uchebni deynosti v uroka po matematika*. Sofiya: Modul – 96.
- Ganchev, I., Ninova, Yu., Nikova, V. (2007). *Metodika na obuchenieto po matematika (Obshta chast)*. Blagoevgrad: Univ.izd. “Neofit Rilski”.

- Gyudzhenov, I. (2007). *Metodikite na obuchenieto vav visshite uchilishta*. Blagoevgrad: Univ.izd. "Neofit Rilski".
- Dzhakov, P., Levi, R., Troyanski, S. (2007). *Diferentsialno i integralno smyatane. Funktsii na edna promenliva*. Sofiya: SU „Sv. Kliment Ohridski“
- Durcheva, M. (1994). Grafiki na nyakoi lineyni funktsii i tehni prilozheniya. *Elementarna Matematika – alfa*, 4, 169 – 177.
- Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, Ch., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., Stachel, H. (2008) *Mathematik*. Heidelberg: Spektrum.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE (ISBN 978-854-92139-1-1), 295 pages.

## COLLABORATION WITHIN MATHEMATICS EDUCATION IN SECONDARY SCHOOLS AND IN UNIVERSITIES

**Abstract.** Students' preparation in mathematics at secondary school is discussed. It determines pupils' results in entry exams on mathematics and the difficulties they meet later in the learning of undergraduate mathematics. A reasoned opinion about the necessity of collaborative work of mathematics teachers at secondary schools and universities is expressed. Three suitable topics for joint activities are pointed out. Graphic illustrations and sample tasks are given. A combined use of classic and computer-supported approaches in mathematics education viewed as trinity "teaching-learning-assessment" is mentioned as well.

✉ **Dr. Mariana Durcheva, Assoc. Prof.**

Faculty of Applied Mathematics and Informatics

Technical University of Sofia

8, Kliment Ohridski Str.

1000 Sofia, Bulgaria

E-mail: m\_durcheva@tu-sofia.bg

✉ **Dr. Elena Varbanova, Assoc. Prof.**

Faculty of Applied Mathematics and Informatics

Technical University of Sofia

8, Kliment Ohridski Str.

1000 Sofia, Bulgaria

E-mail: elvar@tu-sofia.bg