Educational Technology /
Образователни технологии

ДВЕ СИМЕТРИЧНИ ПОЛЯРИ И ДВА ХАРМОНИЧНО СПРЕГНАТИ ПОЛЮСА

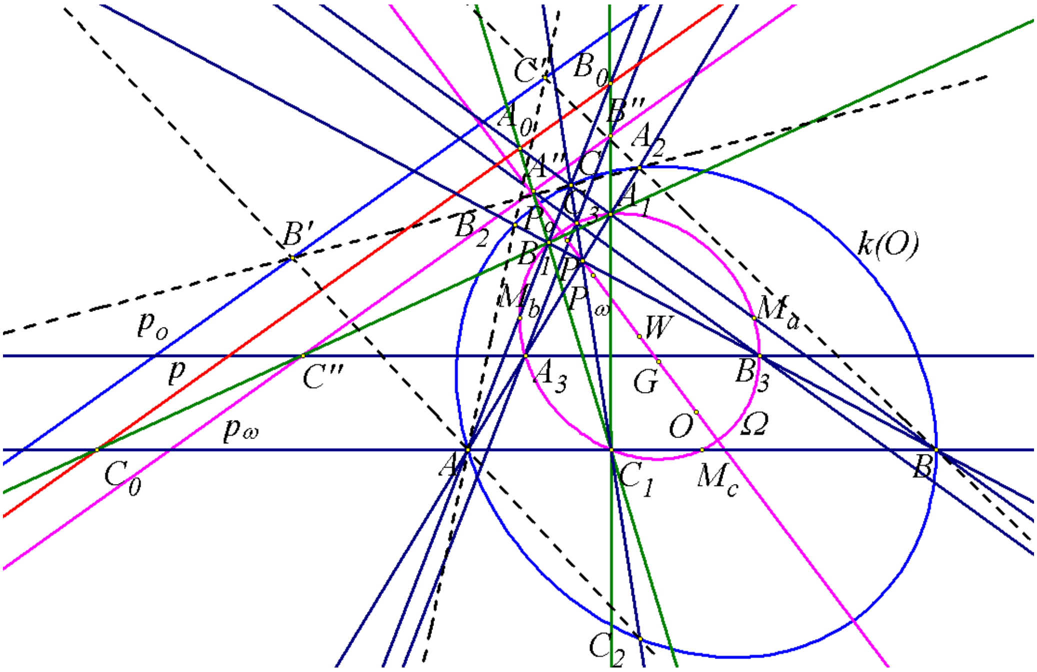
[1]Сава Гроздев, [2]Веселин Ненков
[1]Висше училище по застраховане и финанси
[2]Технически колеж – Ловеч

Резюме. Описват се някои свойства на полюси и поляри, породени от чевиани в равнината на даден триъгълник.
Keywords: triangle, conic, Euler curve, GSP

Нека ABC е произволен триъгълник с медицентър G, а M_a, M_b и M_c са средите съответно на страните BC, CA и AB. За произволна точка P от равнината на ABC, която не лежи върху никоя от правите BC, CA и AB, определяме $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$. Тъй като триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ са перспективни с център на перспективност P, то от теоремата на Дезарг следва, че точките $A_0 = BC \cap B_1C_1$, $B_0 = CA \cap C_1A_1$ и $C_0 = AB \cap A_1B_1$ лежат на една права p (ос на перспективност за ABC и $A_1B_1C_1$) (Матеев, 1977). Точките A_1, B_1, C_1, M_a, M_b и M_c лежат на една крива от втора степен Ω, която наричаме *Ойлерова крива* на P спрямо ABC (фиг. 1) (Гроздев & Ненков, 2014). С Ω е свързана описана за ABC крива $k(O)$, чиито център O се получава от P посредством векторното равенство $\overrightarrow{PG} = 2.\overrightarrow{GO}$ (фиг. 1) (Гроздев & Ненков, 2014).

Всяка точка (права) има поляра (полюс) спрямо произволно конично сечение (Матеев, 1977). Затова е любопитно да се открият зависимости между полярите и полюсите на P и p спрямо $k(O)$ и Ω. Търсенето на връзки може съществено да се улесни, като се използва помощта на програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" (GSP), за да се реализират с геометрични средства необходимите построения и да се извършат някои експерименти с получените обекти. Експериментите с GSP върху полярите p_o и p_w на точката P съответно спрямо $k(O)$ и Ω дават основание да формулираме следното:

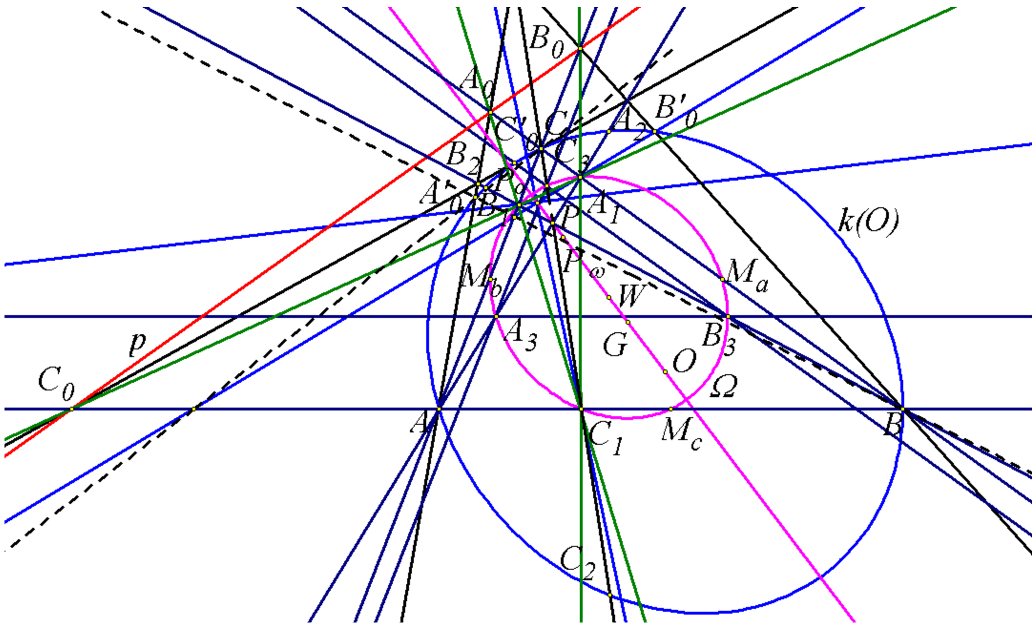
Свойство 1. *Полярите p_o и p_w са успоредно симетрични спрямо правата p* (фиг. 1).



Фигура 1

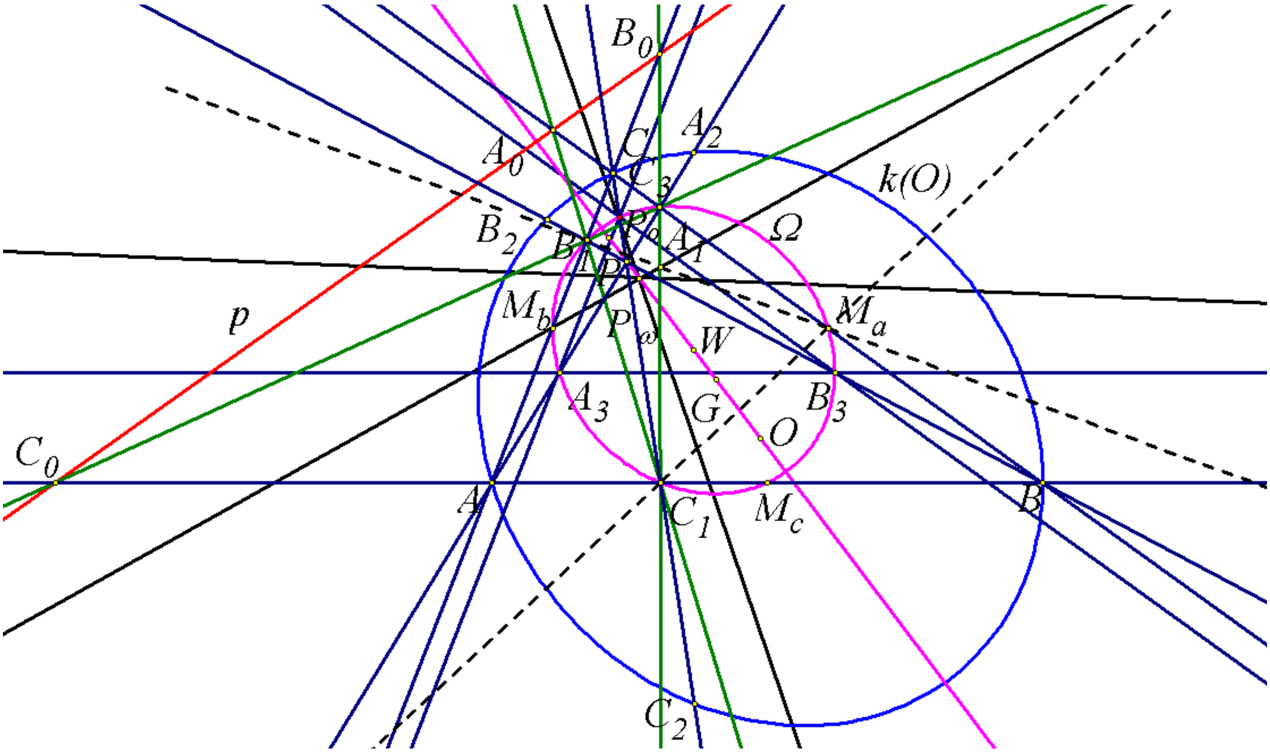
Относно полюсите P_o и P_w на правата p съответно спрямо $k(O)$ и Ω експериментите с GSP дават основание да формулираме следното:

Свойство 2. *Полюсите* P_o *и* P_w *лежат на правата* PG *и са хармонично спрегнати спрямо* P *и* G (фиг. 1).



Фигура 2

Първо трябва да отбележим, че както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), $P \equiv O$ точно когато $P \equiv G$. Но в такъв случай p е безкрайната права u_∞ на равнината ABC и затова полюсите ѝ спрямо $k(O)$ и Ω съвпадат с G (Матеев, 1977). Следователно $P \equiv P_o \equiv P_\omega \equiv G$ и $p \equiv p_o \equiv p_\omega \equiv u_\infty$. При това положение и двете свойства не изглеждат достатъчно коректни. Затова по-нататък ще предполагаме, че $P \neq G$. При доказването на формулираните свойства ще използваме барицентрични координати спрямо координатен триъгълник ABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ и $O(x_0, y_0, z_0)$ $(x_0 + y_0 + z_0 = 1)$(Паскалев & Чобанов, 1985).



Фигура 3

От $A_1\left(0,\dfrac{1-2y_0}{2x_0},\dfrac{1-2z_0}{2x_0}\right)$, $B_1\left(\dfrac{1-2x_0}{2y_0},0,\dfrac{1-2z_0}{2y_0}\right)$ и $C_1\left(\dfrac{1-2x_0}{2z_0},\dfrac{1-2y_0}{2z_0},0\right)$ (Гроздев & Ненков, 2014) намираме скаларно параметричните уравнения на правата B_1C_1. Те заедно с уравнението $x = 0$ на правата BC определят координатния вид на точката A_0 по следния начин: $A_0\left(0,\dfrac{1-2y_0}{2\,z_0-y_0},\dfrac{1-2z_0}{2\,y_0-z_0}\right)$. По аналогичен начин определяме

$$B_0\left(\frac{1-2x_0}{2(z_0-x_0)},0,\frac{1-2z_0}{2(x_0-z_0)}\right),\ C_0\left(\frac{1-2x_0}{2(y_0-x_0)},\frac{1-2y_0}{2(x_0-y_0)},0\right).$$

Точките $M_1\ (x_1, y_1 z_1)$ и $M_2\ (x_2, y_2 z_2)$ определят права M_1M_2, която има уравнение

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$ (Паскалев & Чобанов, 1985).

От координатите на A_0, B_0, C_0 и (1) лесно се вижда, че правата p има следното уравнение:

(2) $$(1-2y_0)(1-2z_0)x+(1-2z_0)(1-2x_0)y+(1-2x_0)(1-2y_0)z=0\,.$$

В (Гроздев & Ненков, 2014) е показано, че точките

$$A_2\left(2x_0-1,\frac{(1-x_0)(1-2y_0)}{x_0},\frac{(1-x_0)(1-2z_0)}{x_0}\right),$$

$$B_2\left(\frac{(1-y_0)(1-2x_0)}{y_0},2y_0-1,\frac{(1-y_0)(1-2z_0)}{y_0}\right),$$

$$C_2\left(\frac{(1-z_0)(1-2x_0)}{z_0},\frac{(1-z_0)(1-2y_0)}{z_0},2z_0-1\right)$$

лежат на $k(O)$ и са симетрични съответно на A_1, B_1 и C_1 спрямо дадената точка $P(1-2x_0,1-2y_0,1-2z_0)$ (фиг. 1).

От свойствата на вписаните в дадено конично сечение пълни четириъгълници (Матеев, 1977) следва, че точките $A' = BC_2 \cap CB_2$, $B' = CA_2 \cap AC_2$ и $C' = AB_2 \cap BA_2$ лежат върху полярата p_o на P спрямо $k(O)$ (това всъщност е перспективната ос на ABC и $A_2 B_2 C_2$) (фиг. 1). Като използваме координатите на точките A_2, B_2 и C_2, намираме уравненията на необходимите двойки прави, а от тях получаваме координатните представяния на A', B' и C' в следния вид:

$$A'\left(-\frac{(1-2x_0)(1-y_0)(1-z_0)}{3y_0z_0+2x_0-1},\frac{y_0(1-2y_0)(1-z_0)}{3y_0z_0+2x_0-1},\frac{z_0(1-2z_0)(1-y_0)}{3y_0z_0+2x_0-1}\right),$$

$$B'\left(\frac{x_0(1-2x_0)(1-z_0)}{3z_0x_0+2y_0-1},-\frac{(1-2y_0)(1-z_0)(1-x_0)}{3z_0x_0+2y_0-1},\frac{z_0(1-2z_0)(1-x_0)}{3z_0x_0+2y_0-1}\right),$$

$$C'\left(\frac{x_0(1-2x_0)(1-y_0)}{3x_0y_0+2z_0-1},\frac{y_0(1-2y_0)(1-x_0)}{3x_0y_0+2z_0-1},\frac{(1-2z_0)(1-x_0)(1-y_0)}{3x_0y_0+2z_0-1}\right).$$

От координатите на точките A', B', C' и (1) лесно се вижда, че полярата p_o има следното уравнение:

$$(3)\quad (1-x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)x+(1-2z_0)(1-y_0)(1-2x_0)y+(1-2x_0)(1-2y_0)(1-z_0)z=0\,.$$

В (Гроздев & Ненков, 2014) е показано, че точките A_3, B_3 и C_3, които са симетрични съответно на A, B и C спрямо P, лежат на Ω (фиг. 1). От свойствата на вписаните в дадено конично сечение пълни четириъгълници (Матеев, 1977) следва, че точките $A'' = B_1C_1 \cap B_3C_3$, $B'' = C_1A_1 \cap C_3A_3$ и $C'' = A_1B_1 \cap A_3B_3$ лежат върху полярата p_w на P спрямо Ω (това всъщност е перспективната ос на $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$) (фиг. 1).

Като използваме координатите на точките A_1, B_1, C_1, A_3, B_3 и C_3, намираме уравненията на необходимите двойки прави, а от тях получаваме координатните представяния на A'', B'' и C'' в следния вид:

$$A''\left(\frac{1-2x_0}{2},\frac{(1-y_0)(1-2y_0)}{2(z_0-y_0)},\frac{(1-z_0)(1-2z_0)}{2(y_0-z_0)}\right),$$

$$B''\left(\frac{(1-x_0)(1-2x_0)}{2(z_0-x_0)},\frac{1-2y_0}{2},\frac{(1-z_0)(1-2z_0)}{2(x_0-z_0)}\right),$$

$$C''\left(\frac{(1-x_0)(1-2x_0)}{2(y_0-x_0)},\frac{(1-y_0)(1-2y_0)}{2(x_0-y_0)},\frac{1-2z_0}{2}\right).$$

От координатите на точките A'', B'' и C'' и (1) лесно се вижда, че полярата p_w има следното уравнение:

$$(4)\qquad x_0(1-2y_0)(1-2z_0)x+y_0(1-2z_0)(1-2x_0)y+z_0(1-2x_0)(1-2y_0)z=0\,.$$

Сега от координатите на точките A_0, B_0, A', B', A'' и B'' лесно се вижда, че векторите $\overrightarrow{A_0B_0}$, $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A''B''}$ са колинеарни с вектора

$$\big((1-2x_0)(y_0-z_0),(1-2y_0)(z_0-x_0),(1-2z_0)(x_0-y_0)\big).$$

Това доказва, че правите p_o и p_w са успоредни на p.

За да докажем, че правите p_o и p_w са симетрични спрямо p, ще използваме, че разстоянието d от точка $M'(x',y',z')$ до права $g: ux+vy+wz=0$ се пресмята по формулата:

$$(5)\qquad d=\frac{2.|ux'+vy'+wz'|.S}{\sqrt{(u-v)(u-w)a^2+(v-u)(v-w)b^2+(w-u)(w-v)c^2}}\,,$$

където a, b, c и S са дължините съответно на страните BC, CA, AB и лицето на ΔABC (Паскалев & Чобанов, 1985).

Нека M (λ, μ, ν) е произволна точка от правата p. Тогава от (2) следва, че е изпълнено равенството $(1-2y_0)(1-2z_0)\lambda+(1-2z_0)(1-2x_0)\mu+(1-2x_0)(1-2y_0)\nu=0$. Като вземем предвид последното равенство, от (3), (4) и (5) се получава, че разстоянията от M до правите p_o и p_w са равни на

$$\frac{\left|\lambda x_0(1-2y_0)(1-2z_0)+\mu y_0(1-2z_0)(1-2x_0)+\nu z_0(1-2x_0)(1-2y_0)\right|}{\sqrt{\delta}},$$

където

$$\delta=(1-2y_0)(1-2z_0)(x_0-y_0)(x_0-z_0)a^2+$$
$$+(1-2z_0)(1-2x_0)(y_0-z_0)(y_0-x_0)b^2+(1-2x_0)(1-2y_0)(z_0-x_0)(z_0-y_0)c^2.$$

Тъй като M е произволна точка от p, то това доказва симетричността на полярите p_o и p_w спрямо p. <u>С това свойство 1 е напълно доказано.</u>

Преминаваме към доказателството на свойство 2. За целта ще използваме, че полюсът на една права спрямо дадено конично сечение е общата точка на полярите на всички точки от тази права (Матеев, 1977). Нека A_0', B_0' и C_0' са пресечните точки съответно на A_0, B_0 и C_0 с $k(O)$. От уравнението $k(O)$: $(1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy=0$ (Гроздев & Ненков, 2014) и скаларно параметричните уравнения на правите A_0, B_0 и C_0 определяме

$$A_0'\left(\frac{x_0(2x_0-1)}{8y_0z_0+3x_0-2},\frac{(2y_0-1)(z_0-y_0)}{8y_0z_0+3x_0-2},\frac{(2z_0-1)(y_0-z_0)}{8y_0z_0+3x_0-2}\right),$$

$$B_0'\left(\frac{(2x_0-1)(z_0-x_0)}{8z_0x_0+3y_0-2},\frac{y_0(2y_0-1)}{8z_0x_0+3y_0-2},\frac{(2z_0-1)(x_0-z_0)}{8z_0x_0+3y_0-2}\right),$$

$$C_0'\left(\frac{(2x_0-1)(y_0-x_0)}{8x_0y_0+3z_0-2},\frac{(2y_0-1)(x_0-y_0)}{8x_0y_0+3z_0-2},\frac{z_0(2z_0-1)}{8x_0y_0+3z_0-2}\right).$$

Като използваме тези координати, намираме точките

$$CA_0'\cap AB\left(\frac{x_0(2x_0-1)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1},\frac{(2y_0-1)(z_0-y_0)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1},0\right),$$

$$BA_0'\cap BC\left(\frac{x_0(2x_0-1)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1},0,\frac{(2z_0-1)(y_0-z_0)}{4y_0z_0-2z_0x_0+2x_0-1}\right),$$

които определят полярата на A_0 спрямо $k(O)$ (фиг. 2) и точките

$$CB_0' \cap AB\left(\frac{(2x_0-1)(z_0-x_0)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1},\frac{y_0(2y_0-1)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1},0\right),$$

$$AB_0' \cap BC\left(0,\frac{y_0(2y_0-1)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1},\frac{(2z_0-1)(x_0-z_0)}{4z_0x_0-2y_0z_0+2y_0-1}\right),$$

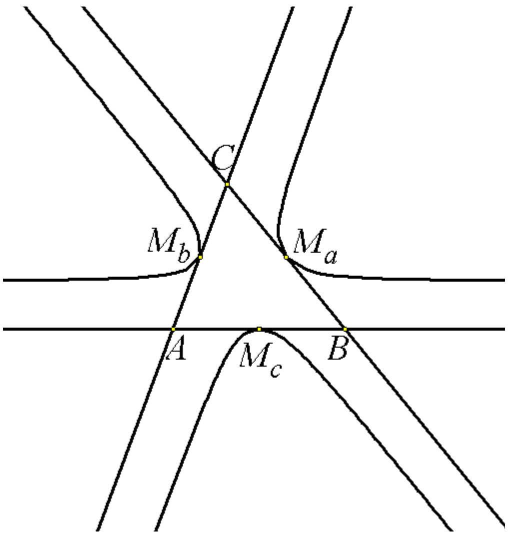
които определят полярата на B_0 спрямо $k(O)$ (фиг. 2).

Пресечната точка P_o на тези две поляри в координати се представя по следния начин:

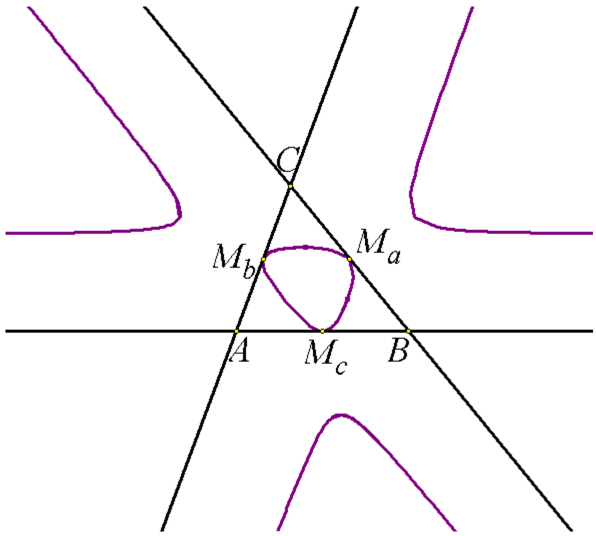
$$P_o\left(\frac{x_0(1-2x_0)^2}{\tau},\frac{y_0(1-2y_0)^2}{\tau},\frac{z_0(1-2z_0)^2}{\tau}\right), \tag{6}$$

където $\tau = 4x_0y_0z_0-(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)$.

Като използваме (1) от (6), лесно получаваме, че точките P, G и P_o лежат на една права. Всъщност, както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), на същата права лежи и точката O (фиг. 1, 2, 3.).



Фигура 4



Фигура 5

Експериментите с GSP показват още, че е изпълнено следното:

Свойство 3. *Полярите на A_0, B_0 и C_0 спрямо $k(O)$ минават съответно през точките A_1, B_1 и C_1* (фиг. 2).

Доказателството на това свойство за полярата на A_0 се получава от (1) и намерените по-рано координати на точките $CA_0' \cap AB$ и $BA_0' \cap BC$. Аналогично се показва свойство 3 и за точките B_0 и C_0.

Сега от (6) определяме простото отношение

$$(GPP_o) = \frac{\overline{GP_o}}{\overline{PP_o}} = \frac{(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0) + 8x_0y_0z_0}{3(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)} = h .$$

Точката P_0' определяме като хармонично спрегнатата на P_o спрямо G и P. Затова е изпълнено $(GPP_o') = -h$. От това равенство следва, че в координати P_0' се представя по следния начин: $P_o'\left(\frac{3hx_{P_o}+1}{3(1+h)}, \frac{3hy_{P_o}+1}{3(1+h)}, \frac{3hz_{P_o}+1}{3(1+h)}\right)$, което според (6) води окончателно до координатите:

$$\begin{aligned} x_{P_o'} &= \frac{(1-2x_0)[(1-x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)+4x_0y_0z_0]}{\overline{\tau}}, \\ y_{P_o'} &= \frac{(1-2y_0)[(1-2x_0)(1-y_0)(1-2z_0)+4x_0y_0z_0]}{\overline{\tau}}, \\ z_{P_o'} &= \frac{(1-2z_0)[(1-2x_0)(1-2y_0)(1-z_0)+4x_0y_0z_0]}{\overline{\tau}}, \end{aligned} \tag{7}$$

където $\overline{\tau} = 2[x_0y_0z_0 + (1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)]$.

Сега да намерим полярата на A_0 спрямо Ω. Тя е определена от точките

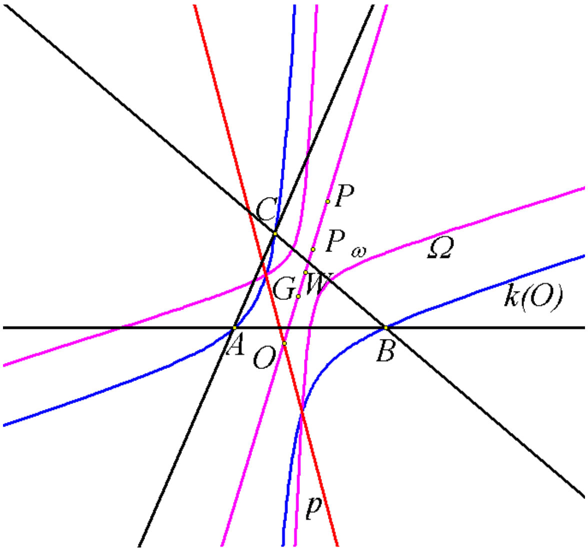
$$A_1B_1 \cap C_1M_a\left(\frac{(z_0-y_0)(1-2x_0)}{2(2y_0z_0-z_0x_0+x_0-z_0)}, \frac{x_0(1-2y_0)}{2(2y_0z_0-z_0x_0+x_0-z_0)}, \frac{(1-2y_0)(1-2z_0)}{2(2y_0z_0-z_0x_0+x_0-z_0)}\right)$$

$$A_1C_1 \cap B_1M_a\left(\frac{(y_0-y_0)(1-2x_0)}{2(2y_0z_0-x_0y_0+x_0-z_0)}, \frac{(1-2y_0)(1-2z_0)}{2(2y_0z_0-x_0y_0+x_0-z_0)}, \frac{x_0(1-2z_0)}{2(2y_0z_0-x_0y_0+x_0-z_0)}\right)$$

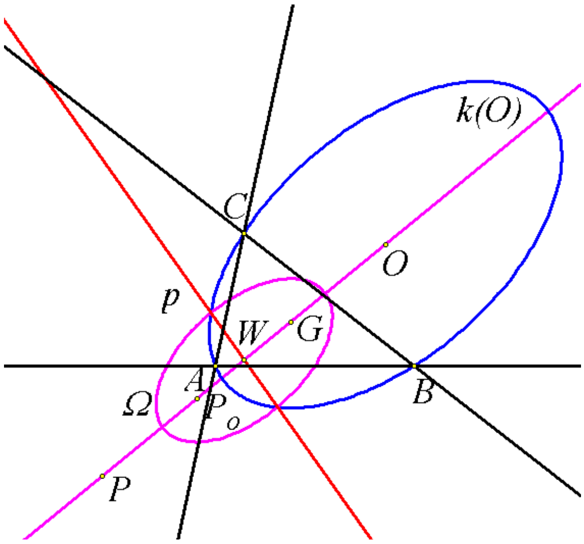
(фиг. 3).

От координатите на последните две точки и (7) с помощта на (1) установяваме, че полярата на A_0 минава през P_0'. По аналогичен начин установяваме, че полярите на B_0 и C_0 спрямо Ω също минават през P_0'. Следователно P_0' е полюсът на p спрямо Ω. Това означава, че $P_w \equiv P_0'$ и затова координатите на P_w се изразяват с (7).

Точката P_o съществува във вида, представен с (6), само когато точката O не лежи върху кривата от трета степен $K: 4xyz-(1-2x)(1-2y)(1-2z)=0$ (фиг. 4), а точката P_w съществува във вида, представен с (7), само когато точката O не лежи върху кривата от трета степен $\overline{K}: xyz+(1-2x)(1-2y)(1-2z)=0$ (фиг. 5). В тези случаи разглеждаме съответно P_o или P_w като безкрайната точка на правата OP. В единия случай P_w е среда на отсечката GP и O лежи върху p (фиг. 6), а в другия – P_o е среда на отсечката GP и Ω лежи върху p (фиг. 7). Тези специални случаи се съгласуват с проективното разбиране за връзката между диаметър и неговия безкраен полюс (Матеев, 1977).



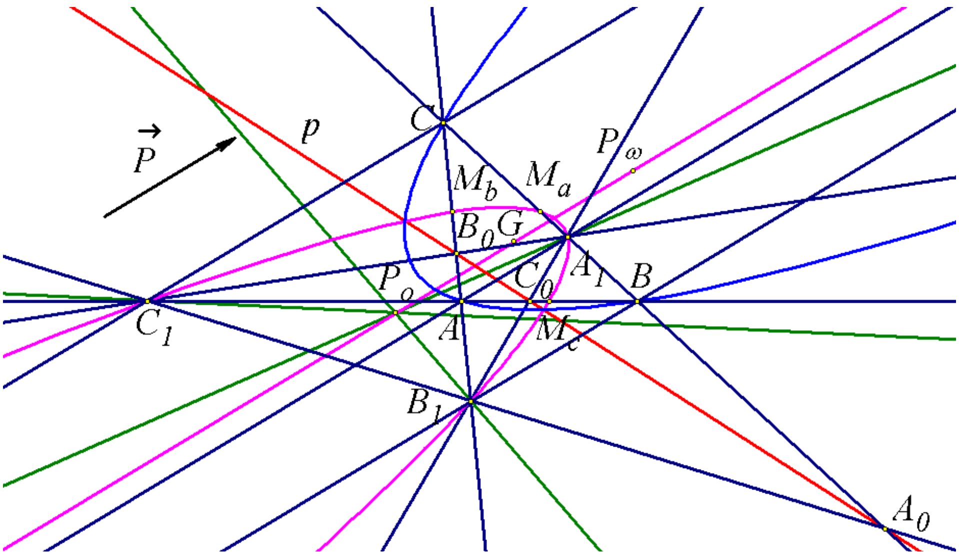
Фигура 6



Фигура 7

Формалното аналитично доказателство на последните факти се получава лесно, като се използва (1), за да се покаже, че O (Ω) лежи върху p точно когато O лежи върху K ($\overline{K}$), а като се използват координатите на P_w и P_o в съответните случаи, когато O лежи на K или $\overline{K}$, за да се покаже, че P_w или P_o е среда на GP.

<u>С това свойство 2 е напълно доказано.</u>



Фигура 8

За пълнота трябва да разгледаме и случая, при който правите през върховете на ΔABC са успоредни. В този случай разглеждаме P като безкрайна точка, определена от направлението на някакъв вектор $\vec{P}$. В този случай, както е показано в (Гроздев & Ненков, 2014), $P \equiv O(x_0, y_0, z_0)$ $(x_0 + y_0 + z_0 = 0)$, а кривите $k(O)$ и Ω са параболи с оси по направлението на вектора $\vec{P}$ (фиг. 8). Точката P лежи върху $k(O)$ и Ω, затова безкрайната права u_∞ на равнината ABC като допирателна към тези параболи (Матеев, 1977) е поляра на P спрямо всяка от двете параболи (Матеев, 1977). При това положение, ако приемем, че u_∞ е симетрична на себе си спрямо всяка обикновена (крайна) права, то бихме получили съгласуване на този случай със свойство 1. Експериментите с GSP показват, че е изпълнено следното свойство:

Полюсите P_o и P_w на правата p съответно спрямо $k(O)$ и Ω *са симетрични спрямо медицентъра G* (фиг. 8).

Доказателството на този факт се получава от следните координатни представяния:

$$P_o\left(\frac{x_0^2}{3y_0z_0}, \frac{y_0^2}{3z_0x_0}, \frac{z_0^2}{3x_0y_0}\right),\ P_\omega\left(-\frac{y_0^2+z_0^2}{3y_0z_0}, -\frac{z_0^2+x_0^2}{3z_0x_0}, -\frac{x_0^2+y_0^2}{3x_0y_0}\right).$$

Това свойство напълно се съгласува със свойство 2, тъй като в случай че P е безкрайна точка, $(P_oP_\omega GP) = (P_oP_\omega G)$ (Матеев, 1977).

Накрая лесно се проверява, че и свойство 3 е изпълнено, в случай че P е безкрайна точка (фиг. 8).

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С. & В. Ненков (2014). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции.* Архангельск, САФУ, 35 – 54.

Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: „Наука и изкуство“.

Паскалев, Г. & И. Чобанов (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: „Народна просвета”.

REFERENCES

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2014). Obobshtenia nekotorih klasicheskih theorem geometrii treugolnika. *Teoreticheskie i prikladnie aspekti matematiki, informatiki* *i obrazovania. Sbornik materialov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii*. Arhangelsk, SAFU, 35 – 54. Mateev, A. (1977). *Proektivna geometria*. Sofia: „Nauka i izkustvo“.

Paskalev, G. & Chobanov, G. (1985). *Zabelezhitelni tochki v* tri’g’lnika. Sofia: „Narodna prosveta“.

TWO SYMMETRIC POLAR LINES AND TWO HARMONICALLY CONJUGATED POLEs

Abstract. Some properties are described of poles and polar lines, generated by cevians in the plane of a given triangle.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg