Educational Matters/
Въпроси на преподаването

ЗЛАТНОТО СЕЧЕНИЕ И ЧИСЛАТА НА ФИБОНАЧИ – СИНЕРГЕТИЧНИ ВРЪЗКИ МЕЖДУ МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА И МУЗИКА

[1]Камелия Колева, [2]Валентин Бакоев
[1]НВУ „Васил Левски“
[2]ВТУ „Св. Кирил и Методий“

Резюме. В статията са представени основни сведения за златното сечение и числата на Фибоначи, както и междупредметните им връзки с информатиката и с музиката в синергетичен аспект.

Keywords: golden section, fibonacci numbers, recurrence relation, fibonacci tree, music, harmony.

„Ако всички изкуства се стремят към състоянието на музиката, то всички науки се стремят към математиката.”
Джордж Сантанайа

„Във всичко цари хармоничният закон.
И в света всичко е само ритъм, акорд и тон.”
Джон Драйден

1. Увод

Бурните социални, икономически и политически промени в глобален мащаб налагат нови изисквания към съвременното образование като един от водещите фактори за икономически и социален просперитет. В търсене на съвременни образователни стратегии и подходи смятаме, че един от възможните отговори е новото междудисциплинно научно направление ***синергетика***. Основите му се полагат през 70-те години на XX в. от немския физик и математик, професора по теоретична физика Херман Хакен. Той определя синергетиката не само като наука за общите закономерности на самоорганизацията, а и като теория за изучаване на съвместното действие на много подсистеми с най-различна природа (Хакен, 1980), (Grozdev, 2007), (Князева и др. 2013).

Темата за междупредметните връзки между математика, информатика и музика чрез златното сечение и числата на Фибоначи съдържа редица синергетични идеи:

– според своя създател Х. Хакен синергетиката ще играе активна роля като *духовна връзка между различните специализирани области* (Хакен, 2006). Като междудисциплинно направление тя изпълнява важната задача за сближаване на природо-математическите, хуманитарните науки и изкуството, т.е. може да бъде ненатрапчив посредник между такива привидно отдалечени помежду си, дисциплини като математика и информатика от една страна и музиката от друга. А и не само между тях – подобни синергетични връзки могат да бъдат направени и с други науки и области на изкуството: биология, физика, химия, поезия, изобразително изкуство, архитектура, дизайн и т.н.;

– *смяната на хаоса и реда като универсален принцип за изграждане на света* намира реализация чрез златното сечение в музиката. Още древните питагорейци представяли хармонията като начало на реда, като сила, която побеждава хаоса. Музиката е миниатюра на хармонията в цялата Вселена и помага на човека да усети хармонията, както и да се приведе в хармония с живота (Хан, 2004);

– *непрекъснатият диалог на човека с природата* се отразява в изкуството чрез многобройните прояви на златното сечение в природата. Заобикалящата ни среда не е прост набор от линии и повърхнини, а е хармония и красота на природата;

– *основният синергетичен принцип за нелинейното проявление* на числата на Фибоначи в музиката е чрез многовариантни алтернативи, взаимни прониквания на ред и хаос, неочаквани изменения и многообразие на възможните състояния в музикалните произведения и др. Числата на Фибоначи от математическа гледна точка притежават линейност, но тяхната нелинейна изява в музиката може да се характеризира като „очаквай неочакваното или няма нищо невероятно” (Князева, 2006, стр. 10);

– *холистичната идея*, която признава единството на света, природата и човека;

– *развитие на естетическите чувства* чрез опознаване на хармонията и ритъма. Хармонията между хаоса и реда изгражда нашата представа за красота.

Тази статия е продължение на (Горчев & Колева, 2009) в търсене на нови приложения на „елементарната” на пръв поглед редица от числа Фибоначи и на толкова често срещаното отношение „златното сечение” и към разширяване на междупредметните връзки между математика, информатика и музика. Подобна тематика, но в по-друг контекст е разглеждана в (Келеведжиев & Дженкова, 2007; Атанасова, 2011). Приложенията на математическите понятия златно сечение и числа на Фибоначи в науката информатика и в изкуството музика са избрани заради силните междупредметни връзки между съответните дисциплини, изучава-ни в училище, както и в някои университетски специалности. От казаното тук, от посочените източници в литературата, от многобройните ресурси в интернет[1] става ясно, че статията няма и най-малки претенции за изчерпателност. Целта на авторите е друга – като се използва неизчерпаемата всеобхватност на златното сечение и числата на Фибоначи да се синтезират някои основни факти, които да помогнат на широк кръг читатели: учители и преподаватели, ученици и студенти, читатели с интереси в областта на математиката и разглежданите приложения в посока засилване на интереса към разглежданата тематика и в търсенето на нови факти, свойства и приложения.

2. Златното сечение и числата на Фибоначи

Нека *AB* е дадена отсечка. Да я разделим вътрешно на две части с помощта на точка *C*, така че отношението на дължината на цялата отсечка към дължината на по-дългата част да е равно на отношението на дължината на по-дългата към тази на по-късата част, т.е. $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}$, както е видно на Фиг. 1. Така получаваме сечение, което се нарича ***златно сечение, златна пропорция, златен коефициент*** или ***божествена пропорция***.

Фигура 1. Отсечката *AB*, разделена в отношение на златното сечение.

За първи път се споменава за него в знаменитото произведение „Елементи" на Евклид[2]. Терминът *златно сечение* се означава с гръцката буква φ в чест на древногръцкия архитект и скулптор Фидий (V в. пр. Хр.), който често използвал златната пропорция в скулптурите си и при изграждането на Партенона.

Ако на Фиг. 1 означим дължината на отсечката *AB* с a и дължината на отсечката *AC* с *b*, тогава златното сечение се изразява чрез равенството $\frac{a}{b}=\frac{b}{a-b}$. От него получаваме $b^2=a^2-ab \Leftrightarrow a^2-ab-b^2=0$. Разделяме на $b^2\neq 0$, т.е. $\frac{a^2}{b^2}-\frac{a}{b}-1=0$, полагаме $\frac{a}{b}=\varphi$ и получаваме уравнението:

(1) $$\varphi^2-\varphi-1=0\,.$$

Корените на това уравнение са $\varphi_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\varphi_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Понеже φ е отношение на дължини на отсечки, то е неотрицателно и следователно единственото решение на (1) е $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033...$ Обратното отношение е:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{(5-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618033...$$

Забелязваме, че числата φ и $\dfrac{1}{\varphi}$ се различават само по цялата си част. Обратното отношение $\dfrac{1}{\varphi}$ се среща под името ***сребърно сечение*** или ***сребърно отношение***.

Съразмерността, изразена чрез числото φ, според много наблюдения е най-приятна за окото. Леонардо да Винчи е смятал, че идеалните пропорции на човешкото тяло трябва да са свързани с числото φ. Именно той е нарекъл делението на отсечка в описаното по-горе отношение *златно сечение* – термин, който се е запазил и до днес. В епохата на Възраждането златното сечение е било много популярно сред художниците, скулпторите и архитектите. Й. Кеплер го сравнява със скъпоценен камък (Ганчев, 1985) и отбелязва приложението му в ботаниката. Без да познават златното сечение още древните египтяни при строежа на пирамидите са минавали през много опити и грешки, за да достигнат до своя връх – Голямата (Хеопсовата) пирамида в Гиза. Ъгълът, под който стените на тази правилна четириъгълна пирамида са наклонени към основата, е $51^\circ 51' 14.3''$ (Герасимов, 2000; Koshy, 2001):

1) При този ъгъл се показва използването на числото π при строежа на пирамидата. При него отношението на височината на Голямата пирамида към периметъра на основата е равно на $\dfrac{1}{2\pi}$.

2) При него отношението на основния ръб на пирамидата към нейната височина е приблизително 1,5708, т.е. много близко до златното сечение φ.

3) Отношението на апотемата към основния ръб е приблизително $0{,}8095 \approx \dfrac{\varphi}{2}$.

От уравнението (1) следва, че $\varphi^2 = \varphi + 1$ и лесно се получава следната верига от равенства:

$$\varphi^3 = \varphi^2.\varphi = (\varphi+1)\,\varphi = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi$$

$$\varphi^4 = \varphi^3.\varphi = (1+2\varphi)\,\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(\varphi+1) = \varphi + 2\varphi + 2 = 2 + 3\varphi$$

$$\varphi^5 = \varphi^4.\varphi = (2+3\varphi)\,\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(\varphi+1) = 2\varphi + 3\varphi + 3 = 3 + 5\varphi$$

...

(2) $\varphi^n = f_{n-1} + f_n\varphi$, където числата $f_k, k = 1,2,3,\ldots,$ са членове на редицата:

(3) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,… , позната като редица на Фибоначи.

В книгата „Liber abacci" („Книга за абака"), написана през 1202 г. от знаменития италиански математик Леонардо от Пиза, известен повече като Фибоначи (съкратено от filius Bonacci, т.е. син на Боначо), се съдържат почти всички аритметични и алгебрични знания по това време. Събраният в книгата материал се пояснява с голям брой задачи, една от които е популярната задача за размножаване на зайци: „Нека в началото на годината имаме една новородена смесена двойка (мъжки и женски) зайци. Двойката зайци след един месец достига зрялост и всеки месец след втория, всяка двойка зайци раждат по една нова смесена двойка зайци, както е показано в Таблица 1. Колко двойки зайци ще има след една година, ако няма смъртни случаи?". Името на Фибоначи се свързва най-вече с формулировката и решаването на тази задача и свързаната с нея числова редица, въпреки че книгата му съдържа и други съществени за времето си приноси в математиката. Няма писмени сведения дали Фибоначи е знаел за рекурентната връзка между членовете на откритата от него редица. Всъщност членовете на тази редица и рекурентната връзка, която ги свързва са били известни на няколко индийски математици, живели и работили между VII и XII век (Koshy, 2001). Нещо повече, първите писмени сведения за редицата се съдържат в съчинението „Чандас сутра" на индийския математик Пингала (ок. III-II век пр. Хр.), който изучава ритмиката и най-вече редуването на къси и дълги срички в стихотворна реч.

пореден месец	**двойки над 2 месеца (които раждат)**	**млади двойки (под 2 месеца)**	**общо двойки зайци за месеца**
I	0	1	**1**
II	0	1	**1**
III	1	1	**2**
IV	1	2	**3**
V	2	3	**5**
VI	3	5	**8**
VII	5	8	**13**
...	...	...	...

Таблица 1. Задачата за размножаване на зайци.

Рекурентната формула, която свързва числата на Фибоначи изглежда така:

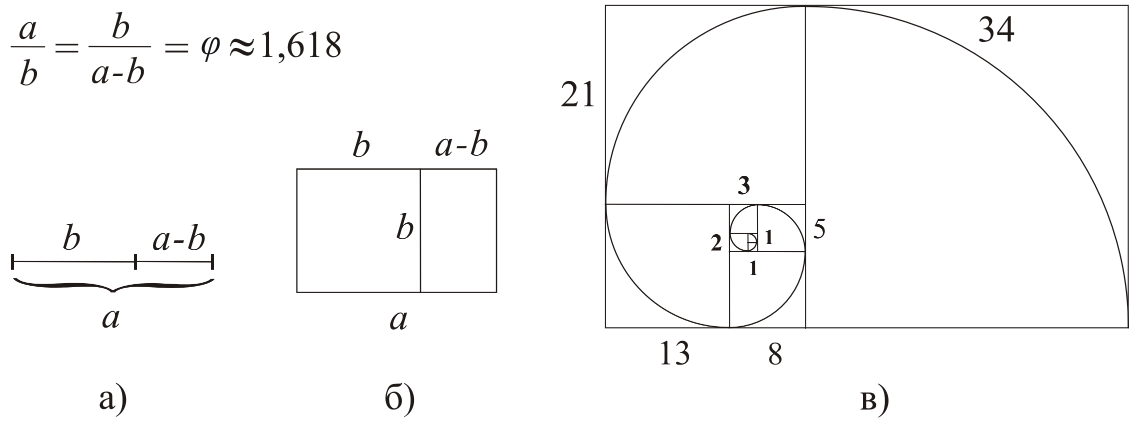
(4) $$\begin{cases} f_n = 1 & \text{, ако } n = 1 \text{ или } n = 2 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} & \text{, ако } n \geq 3. \end{cases}$$

В нея $f_i, i = 1, 2, 3, \ldots$, са членове на редицата (3), т. е. всеки член на редицата, започвайки от третия, е равен на сумата на двата непосредствено стоящи преди него члена в редицата. Такава редица, за която са зададени явно първите няколко члена и всеки следващ член се определя като функция на предходните, се нарича ***рекурентна редица***, а второто равенство в (4), което определя самата рекурентна зависимост – ***рекурентно уравнение***. В него първите явно зададени членове на редицата се наричат ***начални условия***. Освен равенството (2) между числата на Фибоначи и златното сечение има дълбока математическа връзка. Ако разгледаме редицата от частните $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ на съседните членове в редицата на Фибоначи, то нейната граница е именно златното сечение φ. Това се вижда от Таблица 2.

n	числа на Фибоначи f_n	$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \varphi$
1	1	
2	1	1, 000 000
3	2	2, 000 000
4	3	1, 500 000
5	5	1, 666 667
6	8	1, 600 000
7	13	1, 625 000
8	21	1, 615 385
9	34	1, 619 048
10	55	1, 617 647
11	89	1, 618 182
12	144	1, 617 978
13	233	1, 618 056
14	377	1, 618 026
15	610	1, 618 037
16	987	1, 618 033
...	...	...

Таблица 2. Числа на Фибоначи и златно сечение.

Числата от Таблица 2 имат интересни геометрични интерпретации – т. нар. *златен правоъгълник, Фибоначиева спирала, златна спирала* и др**.** Многобройни техни илюстрации, подобни на Фиг. 2, могат лесно да бъдат намерени в интернет.



Фигура 2. Златно сечение (а), златен правоъгълник (б) и Фибоначиева спирала (в).

Темата за числата на Фибоначи е толкова популярна и всеобхватна – говори се за хоби „фибоначизъм”. През 1963 г. в САЩ е основана Асоциация на Фибоначи[3], която оттогава издава научното списание Fibonacci Quarterly[4]. Удивително е как членовете на Фибоначиевата редица (респективно и златното сечение) могат да бъдат открити навсякъде около нас, дори на най-неочаквани места: в броя на венчелистчетата на цветята, в люспите на шишарките, в подредбата на листата по клоните и самите клони на дърветата, в слънчогледовата пита, в броя на пчелите при размножаване, при атомите на инертни газове, при топологичния индекс на решетките на въглеводороди, при електрическите вериги, в епичната поема „Енеида” на древноримския поет Вергилий, в размерите на книгите, в ориенталски килими и т.н. Тези и много други приложения на Фибоначиевата редица и златното сечение са представени в една от най-изчерпателните книги по въпроса (Koshy, 2001). Там могат да се намерят и десетки от най-популярните свойства на числата на Фибоначи. Много от тях са изведени от френския математик Едуард Люка (1842 – 1891), посветил голяма част от изследванията си на редицата на Фибоначи. Именно той я нарича така през 1876 г. в чест на откривателя ѝ. Люка открива и многобройни връзки между числата на Фибоначи и дефинираната от него редица от числа: 1, 3, 4, 7, 11, 18,..., т.е. определени чрез същото рекурентно уравнение: $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ за $n \geq 3$, но с начални условия: $L_1 = 1$ и $L_2 = 3$. В негова чест числата от тази редица са наречени ***числа на Люка***.

Трябва да отбележим, че за разлика от оригиналната редица на Фибоначи в много учебници редицата на Фибоначи и тази на Люка съдържат допълнителен член с номер нула в началото. С други думи дефинират се със същите рекурентни уравнения, но с начални условия $f_0 = 0$ и $f_1 = 1$ и съответно $L_0 = 2$ и $L_1 = 1$. В други учебници номерацията на числата на Фибоначи пак започва от нула, но началните условия са $f_0 = 1$ и $f_1 = 1$. Ето защо съвсем основателно се използва и понятието ***обобщена редица на Фибоначи*** (в някои източници е наречена на Люка) – в нея първите два члена са произволни естествени числа и всеки следващ член е сума на предходните два.

3. Числата на Фибоначи и занимателната математика

Много от свойствата на числата на Фибоначи, за които споменахме по-горе, могат да се използват за съставяне на различни занимателни задачи. Ето два примера за бързо смятане.

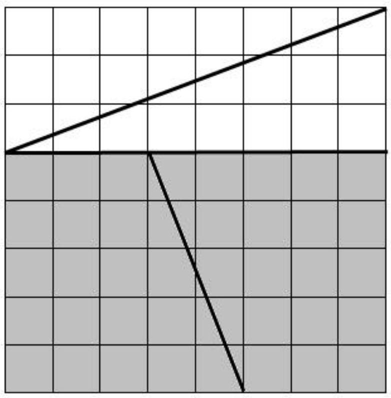
Пример 1. За конкретна стойност на естественото число n помолете вашия събеседник да напише първите n члена от редицата на Фибоначи, след това да ги събере и да ви каже сумата. Може още преди да е приключил със смятането да му съобщите резултата. Например да напише първите 8 члена: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21. Докато ги събира вие му казвате почти веднага, че тяхната сума е: 54. Тази игра с числа се основава на следното свойство на числата от редицата на Фибоначи: $f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$. Доказателството му е дадено във (Воробьев, 1978; Koshy, 2001).

Пример 2. Без да гледате помолете вашия събеседник да напише две произволни естествени числа. След това поискайте да ги събере и да напише сумата на трето място. След това да събере второто и третото число и резултата да напише на четвърто място и т.н. докато числата в редицата станат общо 10. Поискайте от вашия събеседник да ви каже само седмото число в редицата и веднага му съобщете колко е сумата от всичките десет числа. Ако не ви вярва, оставете го да посмята и да се убеди, че сте прав. Вашата бързина се дължи на факта, че трябва само да умножите седмото число по 11. Тя си има строго математическо обяснение – свойството на обобщената редица на Фибоначи, че сумата на първите ѝ десет члена е равна на седмия член, умножен по 11. Доказателството на последното може да се види в (Koshy, 2001; Алексиева, 2003).

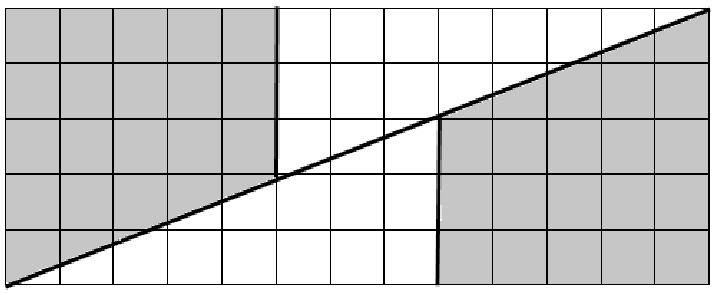
Интересен пример, свързан с числата на Фибоначи, е т. нар. ***геометричен парадокс на Фибоначи***. Той е предложен за първи път през 1774 г. от Уилям Хупър в книгата „Racional Recreations", но добива популярност след 1868 г., когато се появява в математическата периодика в Лайпциг, Германия (Koshy, 2001).

Пример 3. Вземаме квадрат със страна 8 единици. Изрязваме 4 равнинни фигури – 2 еднакви правоъгълни триъгълника и 2 еднакви правоъгълни трапеца, както е показано на Фиг. 3. След това пренареждаме фигурите във формата на правоъгълник със страни 5 ед. и 13 ед. (отново Фибоначиеви числа), както е показано на Фиг. 4. Лицето на квадрата от Фиг. 3 е *Sкв.* = 8.8 = 64 кв. ед., а лицето на правоъгълника от Фиг. 4 е *Sправ.* = 5.13 = 65 кв. ед. С други думи при повторно сглобяване на парчетата от оригиналния квадрат ние печелим 1 кв. ед. Защо се стига до такъв парадокс? На Фиг. 4 се вижда, че „диагоналът" на правоъгълника (върху който се подреждат четирите фигури) е права линия (отсечка). Това е измамно, в действителност при наслагване на фигурите в правоъгълника на Фиг. 4, между тях остава много тесен успоредник – виж Фиг. 5. Лицето му е равно точно на *Sусп.* = *Sправ.* – *Sкв.* = 65 – 64 = 1 кв. ед.

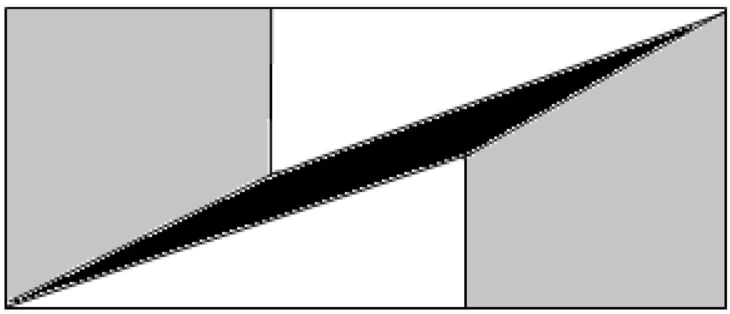
Математическото обяснение на парадокса на Фибоначи е чрез следното важно свойство на редицата на Фибоначи (използваме редицата (4)): $f_{n+1}.f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$. В нашия случай: $f_7.f_5 - f_6^2 = (-1)^6 = 1 = S_{усп.}$.



Фигура 3. Квадрат от парадокса на Фибоначи.



Фигура 4. Правоъгълник от парадокса на Фибоначи.



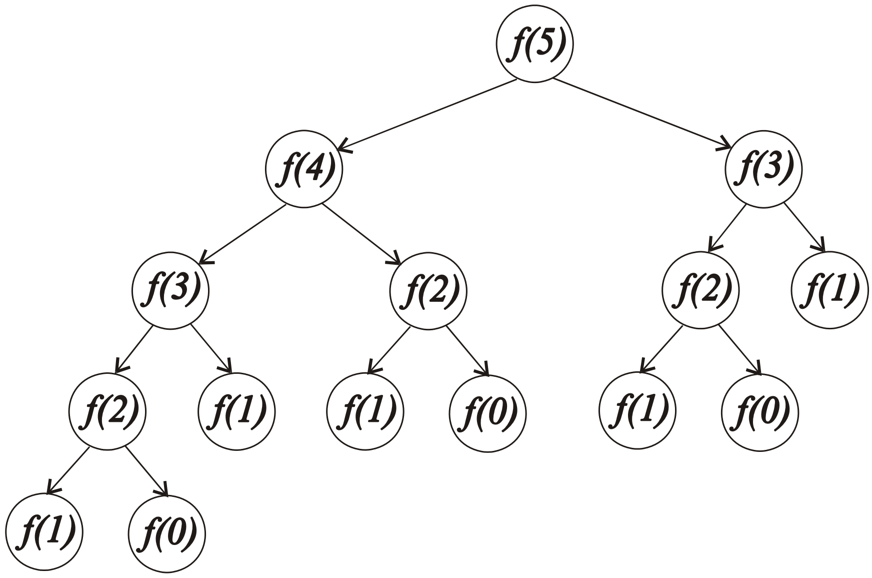
Фигура 5. Правоъгълник с успоредник от парадокса на Фибоначи.

4. Числата на Фибоначи в информатиката

Числата на Фибоначи и златното сечение са едни от многото допирни точки между математиката и информатиката. Например чрез директно прилагане на рекурсивната дефиниция на числата на Фибоначи:

(5)
$$f(n)=\begin{cases}0, & \text{ако } n=0,\\ 1, & \text{ако } n=1,\\ f(n-1)+f(n-2), & \text{ако } n>1\end{cases}$$

лесно се илюстрира рекурсията като основна техника в програмирането. Рекурсивната функция, основаваща се само на тази връзка е класически пример за неефективна рекурсия. При изпълнението ѝ функции с едни и същи параметри, по-малки от *n* (т.е. подзадачи), се пресмятат многократно – толкова повече, колкото по-малко става *n*. Това най-добре може да се илюстрира чрез т. нар. ***дърво на рекурсията*** (или дървото на рекурсивните извиквания), което нараства експоненциално с нарастването на *n*, както е видно на Фиг. 6.



Фигура 6. Дърво на рекурсията при изчисляване на $f(5)$.

Така сложността при пресмятането на тази функция придобива експоненциален вид $\Theta(\varphi^n)$ (Наков & Добриков, 2005; Cormen et al., 2009). Свойството „припокриване на подзадачите”, което видяхме в този пример, е един от ключовите елементи за прилагане на стратегията „динамично програмиране” с цел по-ефективно решаване на подобни задачи. В случая това означава пресмятанията да се извършват по метода *„отдолу нагоре”*, т.е. в цикъл, като за целта са достатъчни само 3 променливи. Друга алтернатива представлява рекурсивно пресмятане, но с помощта на техника, наречена *мемоизация* (memoization). Изисква използването на масив, в който да се съхраняват всички пресметнати членове на редицата. Рекурсията първо проверява дали съответната стойност на функцията е вече пресметната и ако „да” я взема наготово от масива. В противен случай я пресмята и запазва получения резултат в масива. По този начин всеки член на редицата се пресмята еднократно и сложността по време е линейна (т.е. $\Theta(n)$), както при метода „отдолу нагоре”. Сложността по памет също е линейна, за разлика от константната сложност при метода „отдолу нагоре” (Наков & Добриков, 2005; Cormen et al., 2009). Пресмятането на n-тия член на редицата от числа на Фибоначи може да стане и чрез формулата $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, която е по-известна като ***формула на Бине***[5] и се явява решение на рекурентното уравнение (5). Тази формула отново показва пряката връзка между числата на Фибоначи и златното сечение. От нея следват и други много полезни връзки между тях (Koshy, 2001; Бакоев, 2014), някои от които се използват при анализ на структури от данни, за които ще стане дума по-долу. От формулата на Бине следва, че $f_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$, като закръглянето е към най-близкото цяло число. Въпреки че повдигането в степен n може да се реализира с логаритмична сложност $\Theta(\log_2 n)$, формулата не е подходяща за пресмятане на n-тото число на Фибоначи, понеже включва работа с реални числа и операцията кореннуване. Същата логаритмична сложност, основана на идеята за бързо повдигане на матрица в степен, може да се постигне чрез формулата: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix}$ – в случая не се използват реални числа, имаме само целочислено събиране и умножение (Наков & Добриков, 2005; Cormen et al., 2009; Koshy, 2001). Отново същата сложност ще получим ако приложим стратегията „разделяй и владей”, основавайки се на свойството: $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$ и $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$ (Koshy, 2001).

Апаратът на рекурентните редици и уравнения често се използва при решаване на изброителни комбинаторни задачи. Много от тях са пряко свързани с обобщените редици на Фибоначи и имат интересни интерпретации и приложения (Бакоев, 2014). Някои от тях се използват при анализ на сложността на алгоритми. Първия и най-известен пример в тази посока дължим на френския математик Габриел Ламе. През 1844 г. той оценява броя на деленията, изпълнявани от алгоритъма на Евклид при определяне на най-големия общ делител на две числа. Като използва числата на Фибоначи, Ламе доказва, че броят на деленията, необходими за пресмятане на най-големия общ делител на естествените числа a и b $a \geq b \geq 2$, чрез алгоритъма на Евклид, не надминава броя на десетичните цифри на b, умножен по 5 (Koshy, 2003; Koshy, 2001). Оттук следва, че броят на деленията, които изпълнява алгоритъмът на Евклид е $O(\log b)$. С други думи този брой е ограничен отгоре от константа, умножена по броя на битовете в двоичното представяне на b.

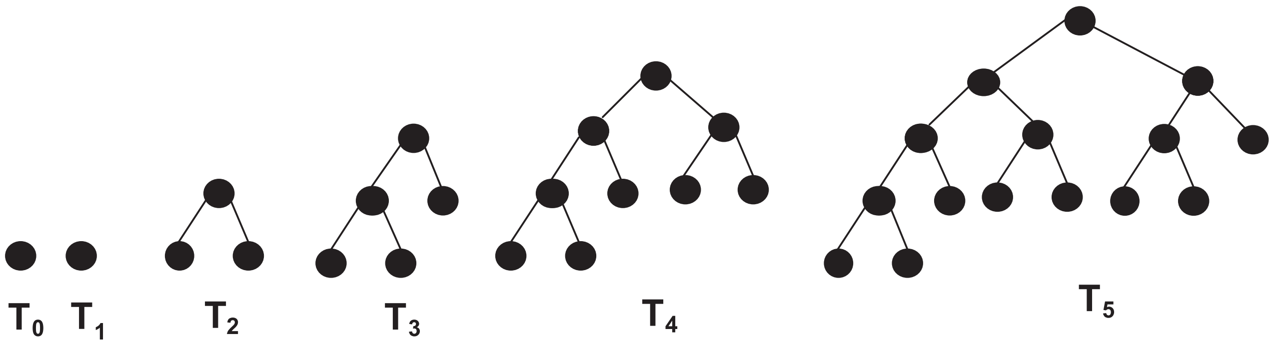
Често ефективността на компютърните алгоритми зависи силно от избора на подходяща структура от данни. При изпълнение на основни операции над редици от елементи като вмъкване, изтриване, търсене и др. някои дървовидни структури от данни съчетават предимствата на динамичната реализация с тези на статичната. Представител на такава структура от данни е ***Фибоначиевото дърво***. То се дефинира рекурсивно така:

Дефиниция. Дърво на Фибоначи T_n от ред n е двоично дърво, за което:

• T_0 и T_1 са тривиални двоични дървета, т.е. имат точно по един връх. Те са дървета на Фибоначи, съответно от ред 0 и от ред 1 и имат височина $h(T_0) = h(T_1) = 1$;

• при $n \geq 2$ двоичното дърво T_n се състои от корен, свързан с ляво поддърво T_{n-1} и дясно поддърво T_{n-2}, които са дървета на Фибоначи от ред $n-1$ и $n-2$, съответно. Височината на T_n е $h(T_n) = 1 + \max\{h(T_{n-1}), h(T_{n-2})\} = 1 + \max\{(n-2), (n-3)\} = n-1$.

На Фиг. 7 са илюстрирани Фибоначиевите дървета от T_0 до T_5. Такова е и дървото на рекурсията на Фиг. 6 – при него броят на върховете му е 15, колкото е броят на рекурсивните извиквания на съответната рекурсивна функция, а височината му е 4, колкото е максималната дълбочина на рекурсията. За общия брой на върховете, броя на вътрешните върхове, броя на листата и броя на ребрата в T_n са изведени формули (виж Теорема 4.1 в (Koshy, 2001)). Те се явяват решения на определени рекурентни уравнения, произтичащи непосредствено от дефиницията.



Фигура 7. Фибоначиеви дървета.

Фибоначиевите дървета са в основата на една от най-ефективните реализации на структурата от данни ***приоритетна опашка***, използвана в редица алгоритми – например в популярните *greedy*-алгоритми на Дийкстра, на Прим, на Хафмън и др.

Фибоначиевите дървета се явяват ***балансирани дървета***[6], при които височината е максимална спрямо тази на всички балансирани двоични дървета със същия брой върхове. Като използват този факт, Аделсон-Велски и Ландис (създателите на структурата от данни балансирано дърво, наречено още AVL-дърво в тяхна чест) доказват в известната си теорема, че височината на произволно балансирано дърво не надминава с повече от 45% височината на ***идеално балансирано дърво***[7] със същия брой върхове.

Освен двоичното търсене в програмирането е популярно и т. нар. ***Фибоначиево търсене***. При двоичното търсене на всяка стъпка се избира елемент за сравняване, който разделя сортирания масив на две части с приблизително равни размери. Ако търсеният елемент съвпада с избрания за сравняване елемент, търсенето е успешно и приключва, а в противен случай едната част на масива се отхвърля и търсенето продължава по аналогичен начин в другата част. Идеята на Фибоначиевото търсене е подобна на тази при двоичното: ако масивът има m елемента и k е най-малкото цяло число, за което $m \le f_k$, тогава масивът се разделя на две части спрямо елемента с номер f_{k-1}. Ако този елемент съвпада с търсения, търсенето е успешно и приключва. Ако елементът с номер f_{k-1} е по-голям от търсения, десният дял се отхвърля и търсенето продължава в левия дял, като за сравнение се избира елементът с номер f_{k-2}. В противен случай левият дял се отхвърля, елементите от десния се преномерират от 1 до $m - f_{k-1} \le f_k - f_{k-1} = f_{k-2}$ и търсенето в него продължава по описания вече начин (Наков & Добриков, 2005, стр. 242-243). Фибоначиевите дървета се използват за илюстрация и при оценка на ефективността на Фибоначиевото търсене. В най-лошия случай са необходими $h(f_k)$ сравнения, които не надминават с повече от 45% броя на сравненията в най-лошия случай при двоичното търсене (те се илюстрират чрез идеално балансирано дърво с m върха и височина $h = \lfloor \log_2 m \rfloor$). Оценките, изведени в (Knuth, 1973) показват, че в средния случай Фибоначиевото търсене е по-бързо от двоичното.

Методите за търсене, които разгледахме се явяват дискретни аналози на оптимални методи за бързо намиране на приближения на екстремуми или на корени на определени видове функции в даден интервал. Използва се и методът на златното сечение, при който, разделянето на интервала на всяка стъпка е в съотношение златно сечение. Числата на Фибоначи и златното сечение намират приложения и в различни видове алгоритми за генериране на псевдослучайни числа, за хеширане (Knuth, 1969).

5. Златното сечение и числата на Фибоначи в музиката

На пръв поглед между математиката и музиката няма много допирни точки. За много хора математиката е твърде абстрактна и строго рационална дисциплина, която „не е за всекиго” и още в училище предизвиква чувство на незаинтересованост и неразбиране.

Музиката, от друга страна, е нещо, което се създава и изпълнява с емоция и чувства. Но всъщност има неща, които ги свързват. Според изследвания деца, които са добри пианисти, решават успешно пъзели, играят добре шах и са способни да извършват дори и сложни математически умозаключения, т.е. имат добре развито логическо мислене, необходимо за математиката. Според други музиката подсилва невронните връзки, които предават информацията между двете полукълба на мозъка, а това от своя страна развива математическите способности. Много от известните композитори са имали развито математическо чувство. Известни са думите на сестрата на Моцарт за него: „...той винаги си играеше с числата и беше омаян от математиката". При много от произведенията на Йохан Себастиан Бах логиката на композицията, систематиката и симетрията при подреждане на вариациите и методите на „обработване" на тематиката подчертават математическото мислене на гениалния композитор.

Още в Древна Гърция математиката и музиката са били строго свързани. Музиката се разглеждала като строга математическа дисциплина, занимаваща се с отношенията между числата, коефициентите и пропорциите. Питагор и неговите последователи смятали, че музикалните свойства могат да се изразят чрез математически величини и на тях принадлежи първата научнообоснована теория за хармонията в музиката. Те се опитали да пренесат своята музикална теория и в Космоса. Според тях планетите на Слънчевата система се движат в съответствие с музикалните октави. Основни за Питагоровата музикална школа са понятията консонанс (съзвучие) и дисонанс (неблагозвучие).

За връзката на музиката с Космоса, а и с бог, говори и откритието на музикалните ноти от италианския монах Гуидо д'Арецо в бенедектинския манастир в Помпоза. Той измисля система от музикални знаци – нотите, като взема за всяка от тях първите срички от химна за Йоан Кръстител. Преведени на български език музикалните ноти означават: **До** – Господ, **Ре** – Материя, **Ми** – Чудо, **Фа** – Слънчевата система, **Сол** – Слънце, **Ла** –Млечен път, **Си** – Небеса.

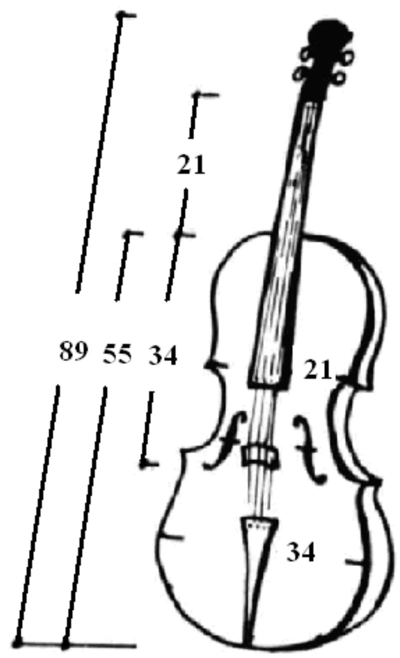
Науката за индийската музика черпи познания от три източника: математика, астрология и философия. На санскрит науката за индийската музика се нарича „prestara", което се превежда като „математическо разположение на ритмите и ладовете" (Хан, 2004).

Още преди да знае каквото и да било за природата на звуковете, човекът интуитивно е настройвал струните така, че да създават благозвучие. Трудно е да се допусне, че музикалната гама се е появила вследствие на „научна разработка". По-вероятно е тя да е била открита емпирично, въз основа на интуицията и естетическите възгледи на музикантите. За това свидетелства и неотдавна публикувано съобщение за интересна находка в местността Раз-Шамра в Сирия, където е намерена глинена таблица с музикален запис на старинна мелодия от XIV в. пр. Хр., т.е. цели 8 века преди Питагор.

Изучавайки 20 неизвестно как шлифовани базалтови камъка, намерени в индийския щат Ориса, немският археолог Паул Юле достига до извода, че това е древен музикален инструмент, подобен на ксилофон. След изследване на неговия звуков ред е установено наличието на 4 октави със 7 цели тона от ***до*** до ***си*** и 5 полутона. Така изобретателите на този древен инструмент още 2000 г. пр. Хр. и 14 века преди Питагор са използвали октава от 7 основни звука.

В тази посока могат да се илюстрират и множество примери за наличие на златното сечение и числата на Фибоначи в музиката (Атанасова, 2011). Последователности от членове на редицата на Фибоначи откриваме в конструирането на самите музикални инструменти. Октавата се състои от 8 тона (до, ре, ми, фа, сол, ла, си, до). На пианото тази октава е представена с 8 бели клавиша и 5 черни (общо 13), т. е. 5, 8, 13 – числа от познатата ни редица (Фиг. 8). Златно сечение може да се открие в съотношението на отделните части на цигулката (Фиг. 9).

Фигура 8.



Фигура 9.

Музикалните гами също имат връзка с числата на Фибоначи. **Тринадесет** ноти (C, C#/Db, D, D#/Eb, E, F, F#/Gb, G, G#/Ab, A, A#/Bb, B, C) обособяват всяка октава, състояща се от **осем** основни ноти в гама (C – долно до, D – ре, E – ми, F – фа, G – сол, A – ла, B – си, C – горно до). От последните, **5-та** и **3-та** поставят основата на всички акорди, базиращи се на цял тон, който е на **2** стъпки от основния тон, а той пък е **1-ва** нота в гамата.

Йохан Кеплер открива божествени пропорции в музиката при интервали между основните мажорни и минорни тризвучия (1, 3, 5 или 1, 5, 8).

Основните шестзвучия – мажорното (съдържа 6 тона) и минорното (съдържа $5\frac{1}{2}$ тона) – са музикални интервали, които носят голямо удоволствие за слуха. Забелязваме, че в мажорно шестзвучие, съдържащо например нотите **С** – долно до и **А** – ла, които правят съответно 264 и 440 вибрации за секунда, отношението $\frac{264}{440}=\frac{3}{5}$ включва Фибоначиеви числа. Аналогично в минорно шестзвучие, съдържащо нотите **Е** – ми и **С** – горно до например, отношението от техните вибрации за секунда е $\frac{330}{528}=\frac{5}{8}$ и също съдържа числа на Фибоначи.

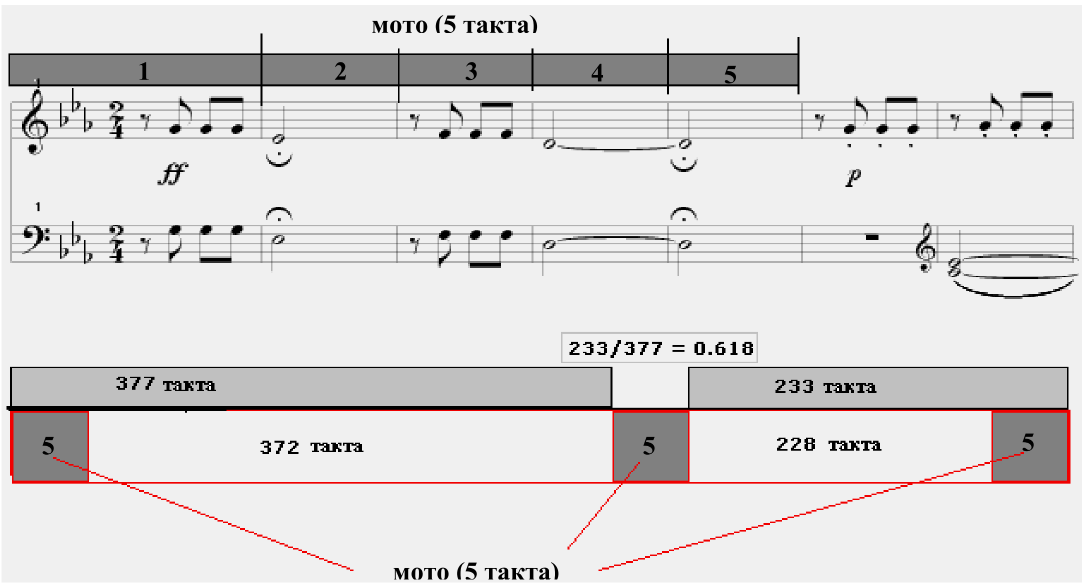
Може да се посочат множество примери на музикални произведения в творчеството на велики композитори като Моцарт, Бетовен, Бах, Дебюси, Шуберт, Чайковски и др., които, разделени на части, или по тема, или по интонационно построение, или по ладово построение, се намират помежду си в отношение на златното сечение. Руският музиковед Л. Сабанеев, анализирайки 1770 музикални произведения на 42 световноизвестни композитори намерил 3275 златни сечения. Произведенията, в които се наблюдава поне едно златно сечение са 1338. Най-детайлно Сабанеев е изучавал всичките 27 етюда на великия полски композитор Фредерик Шопен, като в 24 от тях е открил 154 златни пропорции[8]. По мнението на Сабанеев златното сечение води до създаване на впечатление за особена стройност на музикалното произведение. Освен това в много от музикалните композиции се забелязва наличието на „кулминационен полет" или висша точка, която изключително рядко е разположена в центъра на произведението. Обикновено тя е изместена, асиметрична и се намира в точката на златното сечение (на 61,8% от продължителността му), в противен случай мелодията придобива неустойчив характер (хаос, безредие, тревожност).

Един от най-ранните музикални примери за случване на нещо много специално в момента на златната среда е 40-гласовият ренесансов мотет[9] на Томас Талис „Spem in alium", създаден през 1570 г. В него, точно в момента на златната среда, има 1 такт с абсолютна тишина, след който влизат едновременно всички 40 гласа.

Известното мото от пет такта в Петата симфония на немския класически композитор Лудвиг ван Бетовен се появява не само в началото и в края, но и в такт 377. Цялата симфония се състои общо от 610 такта. Това означава, че второто повторение на мотото я дели в златното отношение (Фиг. 10).

Унгарският композитор Бела Барток е типичен пример в музикалната литература за използването на така наречените неравноделни ритми 3/8, 5/8 и 7/8, за които пише, че е заимствал от българската народна музика. В неговото произведение „Музика за струнни, ударни и челеста” кулминационната точка е в 55-и такт от общо 89. Други негови произведения, в които също могат да бъдат открити числа на Фибоначи, са: Alla Bulgarese, Струнен квартет №5 и цикъла от шест пиеси из шеста тетрадка на „Микрокосмос” за пиано.

Най-известното произведение на гениалния немски композитор Георг Фридрих Хендел, ораторията „Месия” с нейния хор „Алелуя” (която често се изпълнява по Коледа), е друг пример за наличието на Фибоначиевите числа. Докато цялото произведение се състои от 94 такта, една от най-важните части – въведение в соло за тромпети – е в такт 57, т.е. разделя цялата „Месия” в отношение 8 към 13. Подобна структура има и във всяка от двете части, на които се дели произведението. В такт 34, т.е. след $\frac{8}{13}$ от първите 57 такта, се маркира друга важна точка – въведението в темата „Царството на славата”. В такт 79, т.е. след $\frac{8}{13}$ от вторите 37 такта е друго важно място, в което се появява солото за тромпети.



Фигура 10. Фрагмент от Петата симфония на Бетовен.

В повечето сонати за пиано на австрийския композитор Волфганг Амадеус Моцарт отношението между броя на тактовете в трите части: експозиция, разработка и реприза се подчинява на златната пропорция.

През XX в. Клод Дебюси използва златната пропорция в много от своите творби като например „Reflets dans l’eau”, където кулминацията се случва в 58-ми такт от общо 94 такта $\left(\frac{58}{94} \approx \frac{1}{\varphi}\right)$.

Изучавайки осемтактовите мелодии на Бетовен, Шопен, Скрябин, руският музиковед Л. Мазел установява, че в много от тях кулминацията се достига в силната част на шестия такт или на последната кратка част на петия такт, т.е. намира се в точката на златното сечение. Очевидно такова разположение на кулминационните моменти в мелодията е важен елемент в хармоничната композиция, който ѝ придава художествена изразителност и естетическа емоционалност.

6. Заключение

От казаното дотук ние не можем да твърдим, че създавайки своите музикални произведения и изработвайки музикалните инструменти, хората са ползвали и ползват осъзнато златното сечение. Дори напротив, това най-вероятно е ставало и става интуитивно на базата на сетивното възприемане и оценяване на хармонията, благозвучието и ритъма в тях. Това е още едно потвърждение, че в многообразието на природата, сред привидния хаос действат редица закони, които ние непрекъснато откриваме и ролята на математиката в тяхното обясняване е съществена – „Математиците са отворили врата, която води към необятни територии.” (Атанасова, 2011).

Чрез някои от възможните междупредметни връзки между математиката, информатиката и музиката могат да се стимулират обучаемите да откриват и други връзки и зависимости, не само между споменатите учебни дисциплини, а и между други от изучаваните. По този начин ще се повиши интересът и ще се разширят и задълбочат знанията на учениците или студентите за предметите и явленията в природата и Вселената и за постигане на хармония в тях. Ако перефразираме думите на Хазрат Инаят Хан можем да завършим синергетично: Животът е резултат от Хармонията. Цялата Вселена е една симфония – в нея всеки индивид е нота, а неговото щастие се състои в това да стане съвършено настроен към ритъма и хармонията на Вселената. Било чрез изкуството, било чрез науката, животът проявява себе си. Ако човек може да го разбере, би могъл да разбере всичко...

БЕЛЕЖКИ

1. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®), sequence A000045 – Fibonacci numbers – http://oeis.org/ , Dr. Ron Knott‘s Fibonacci Numbers and the Golden section Site – http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fib.html, Welcome to the Museum of Harmony and Golden Section – http://www.goldenmuseum.com/, сайтовете към бележки 3, 4 и много други.
2. Включва 13 книги, написани около 300 г. пр. Хр. В преводите на руски, често и на български език произведението на Евклид се именова „Начала”.
3. The Fibonacci Association, Official Website – http://www.mscs.dal.ca/Fibonacci/

4. The Fibonacci Quarterly – http://www.fq.math.ca/
5. Формулата е открита през 1843 г. от френския математик Жак Бине, но за първи път е използвана през 1718 г. от френския математик Моавър. През 1844 г., независимо от Бине, формулата е преоткрита и от Ламе.
6. Двоични дървета, за които височините на лявото и на дясното поддървета на произволен връх се различават с не повече от единица (на англ. height balanced trees).
7. Двоични дървета, за които броят на върховете в лявото и броят на върховете в дясното поддървета на произволен връх се различват с не повече от единица.
8. http://www.goldenmuseum.com/0803Shopin_rus.html
9. Вокален жанр или жанр с вокално-инструментална многогласна музика първоначално с църковен характер. Един от основните жанрове в музиката на Западноевропейското Средновековие и Възраждане.

ЛИТЕРАТУРА

Алексиева, А. (2003). *За редиците на Фибоначи и Люка и един проект, посветен на тях*. София: Наука, СБУ, 5.

Атанасова, Ст. (2011). *Изследване на методи и средства за създаване на компютърна алгоритмична музика*. Дисертация за присъждане на ОНС „доктор”, НБУ, (достъпна на http://eprints.nbu.bg/1379/1/DISERTAZIA%20STELA%20NEW.pdf).

Бакоев, В. (2014). *Дискретна математика: множества, релации, комбинаторика*. София: КЛМН.

Воробьев, Н. Н. (1978). *Числа Фибоначчи*. Москва: Наука.

Ганчев, Ив. (1985). *Обучението по математика в системата на междупредметните връзки*. София: Народна просвета.

Герасимов, Б. (2000). *Тайнствената сила на пирамидите*. София: Изд. къща „Труд”.

Горчев, Н. & Колева, К. (2009). Математика и музика – един поглед върху междупредметните връзки (стр. 36–48). *Междупредметни връзки в обучението по математика и информатика*. В. Търново: Ивис.

Келеведжиев, Е. & Дженкова, З. (2007). Информатика, математика, музика (стр. 92–101). В *Математика и математическо образование*, Сб. докл. от XXXVI ПК на СМБ.

Князева, Е. Н. (2006). Пробуждащото обучение, *Педагогика* (8).

Князева, Е., Гроздев, С., Георгиева, М. & Гълъбова, Д. (2013). *Синергетичният подход във висшето педагогическо образование (Върху примери от дидактиката на математиката)*. В. Търново: Слово.

Наков, Пр. & Добриков, П. (2005). *Програмиране=++Алгоритми*. София: TopTeam Co (достъпна на http://www.programirane.org).

Хакен, Х. (2006). Синергетиката на 30 години. (Интервю на Е. Н. Князева с проф. Херман Хакен). *Педагогика* (5).

Хакен, Г. (1980). *Синергетика*. Москва: Мир.

Хан, Хазрат Инаят (2004). *Космическият език: Учението на суфиите*. София: ИК „Шамбала”.

Хофстатър, Д. (2011). *Гьодел, Ешер, Бах: една гирлянда към безкрайността*. София: Изток-Запад.
Cormen, T., Leiserson, Ch., Rivest R.& Stein Cl. (2009). *Introduction to Algorithms*, Third Edition. The MIT Press.
Garland, Trudi H. & Charity, V. Kahn (1995). *Math and music: harmonious connections*. Palo Alto, Dale Semour Publications.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.
Knuth, D. (1969). The art of computer programming. Volume 2: *Seminumerical algorithms*. Addison-Wesley.
Knuth, D. (1973). The art of computer programming. Volume 3: *Sorting and Searching*. Addison-Wesley.
Koshy, T. (2003). *Discrete Mathematics with Applications*. Academic Press.
Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc.
Sadie S. (Editor) (2004). *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Macmillian Publlishers, Oxford University Press.

REFERENCES

Aleksieva, A. (2003). *Za reditsite na Fibonachi i Lyuka i edin proekt, posveten na tyah.* Sofiya: Nauka, SBU, 5.
Atanasova, St. (2011). *Izsledvane na metodi i sredstva za sazdavane na kompyutarna algoritmichna muzika.* Disertatsiya za prisazhdane na ONS „doktor", NBU, (http://eprints.nbu.bg/1379/1/DISERTAZIA%20STELA%20NEW.pdf).
Bakoev, V. (2014). *Diskretna matematika: mnozhestva, relatsii, kombinatorika.* Sofiya: KLMN.
Vorob'yev, N. N. (1978). *Chisla Fibonachchi.* Moskva: Nauka.
Ganchev, Iv. (1985). *Obuchenieto po matematika v sistemata na mezhdupredmetnite vrazki*. Sofiya: Narodna prosveta.
Gerasimov, B. (2000). *Taynstvenata sila na piramidite.* Sofiya: Izd. kashta „Trud".
Gorchev, N. & Koleva, K. (2009). Matematika i muzika – edin pogled varhu mezhdupredmetnite vrazki (pp. 36–48). In: *Mezhdupredmetni vrazki v obuchenieto po matematika i informatika,* V. Tarnovo: Ivis.
Kelevedzhiev, E. & Dzhenkova, Z. (2007). Informatika, matematika, muzika (pp. 92–101). In: *Matematika i matematichesko obrazovanie*, Sb. dokl. ot XXXVI PK na SMB.
Knyazeva, E. N. (2006). Probuzhdashtoto obuchenie, *Pedagogika* (8).
Knyazeva, E., Grozdev, S., Georgieva, M. & Galabova, D. (2013). *Sinergetichniyat podhod vav vissheto pedagogichesko obrazovanie (Varhu primeri ot didaktikata na matematikata).* V. Tarnovo: Slovo.
Nakov, Pr. & Dobrikov, P. (2005). *Programirane=++Algoritmi.* Sofiya: TopTeam Co (http://www.programirane.org).
Haken, H. (2006). Sinergetikata na 30 godini. (Intervyu na E. N. Knyazeva s prof. Herman Haken). *Pedagogika* (5).

Haken, G. (1980). *Sinergetika*. Moskva: Mir.
Han, Hazrat Inayat (2004). *Kosmicheskiyat ezik: Uchenieto na sufiite.* Sofiya: IK „Shambala".
Hofstatar, D. (2011). *Gyodel, Esher, Bah: edna girlyanda kam bezkraynostta.* Sofiya: Iztok-Zapad.
Cormen, T., Leiserson, Ch., Rivest R.& Stein Cl. (2009). *Introduction to Algorithms*, Third Edition. The MIT Press.
Garland, Trudi H. & Charity, V. Kahn (1995). *Math and music: harmonious connections*. Palo Alto, Dale Semour Publications.
Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice).* Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.
Knuth, D. (1969). The art of computer programming. Volume 2: *Seminumerical algorithms*. Addison-Wesley.
Knuth, D. (1973). The art of computer programming. Volume 3: *Sorting and Searching*. Addison-Wesley.
Koshy, T. (2003). *Discrete Mathematics with Applications*. Academic Press.
Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc.
Sadie S. (Editor) (2004). *The New Grove Dictionary of Music and Musicians*. Macmillian Publlishers, Oxford University Press.

THE GOLDEN SECTION AND THE FIBONACCI NUMBERS - SYNERGETIC RELATIONSHIP BETWEEN MATHEMATICS, INFORMATICS AND MUSIC

Abstract. This paper represents the basic information about the golden section and the Fibonacci numbers as well as their interdisciplinary connections with informatics and music in a synergetic aspect.

✉ **Dr. Kamelia Koleva, Senior Lecturer**
Land Forces Faculty
National Military University „Vassil Levski"
76 Bulgaria str.
5006 Veliko Turnovo, Bulgaria
E-mail: kameliabk@abv.bg

✉ **Dr. Valentin Bakoev, Assoc. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Veliko Turnovo „St. Cyril and St. Methodius"
2 Teodosi Turnovski str.
5003 Veliko Turnovo, Bulgaria
E-mail: v_bakoev@yahoo.com