Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2014

Задача 1. Да се намерят всички реални стойности на a, b и c, при които корените на уравнението $x^2+\left(1+a^2+b^2+c^2\right)x+ab+bc+ca=0$ са цели числа.

Милен Найденов, Варна

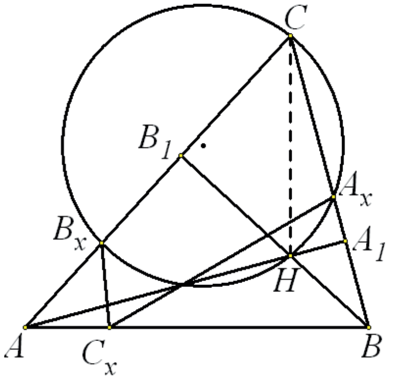
Решение: Дискриминантата на уравнението е

$$D=\left(a^2+b^2+c^2+1\right)^2-4(ab+bc+ca)=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)+1-4(ab+bc+ca)+4\left(a^2+b^2+c^2\right)-4\left(a^2+b^2+c^2\right)=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^2+b^2+c^2\right)+1+2\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ca-2bc\right)=$$
$$=\left(a^2+b^2+c^2-1\right)^2+2(a-b)^2+2(b-c)^2+2(c-a)^2.$$

За да са цели корените на уравнението, D трябва да е точен квадрат. От последното представяне се вижда, че едно достатъчно условие за това е $a=b=c$. В този случай корените на уравнението са $x_1=-1$ и $x_2=-3a^2$. Оттук следва, че уравнението има целочислени корени при $a=b=c=k_i$ $(i=1,2,3,4)$, където $k_1\in\mathbb{Z}$, $k_2=\dfrac{k_1}{\sqrt{3}}$, $k_3\in\left\{0,\pm\sqrt{1},\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{4},\pm\sqrt{5}\ldots\right\}$ и $k_4=\dfrac{k_3}{\sqrt{3}}$. За пълното решение на задачата са необходими допълнителни изследвания.

Задача 2. В остроъгълния триъгълник ABC точката C_x се движи по най-малката страна AB, а точките A_x и B_x се движат съответно по страните BC и AC, така че във всеки момент са изпълнени равенствата $C_xA_x=C_xB$ и $C_xB_x=C_xA$. Да се докаже, че окръжността k_x, определена от точките A_x, B_x и C, има втора неподвижна точка. Коя е тази точка?

Хаим Хаимов, Варна



Решение: Нека AA_1 и BB_1 са височини в ΔABC, а H е неговият ортоцентър. Ще покажем, че окръжността k_x минава през H. От равенствата

$$B_xB_1 = |AB_1 - AB_x| = |AB\cos\sphericalangle BAC - 2AC_x\cos\sphericalangle BAC| = |BC_x - AC_x|\cos\sphericalangle BAC \text{ и}$$

$$A_xA_1 = |BA_x - BA_1| = |2BC_x\cos\sphericalangle ABC - AB\cos\sphericalangle ABC| = |BC_x - AC_x|\cos\sphericalangle ABC$$

Следва, че $\dfrac{B_xB_1}{A_xA_1} = \dfrac{\cos\sphericalangle BAC}{\cos\sphericalangle ABC} = \dfrac{CH\sin\sphericalangle ACH}{CH\sin\sphericalangle BCH} = \dfrac{B_1H}{A_1H}$. Тогава $\Delta A_xA_1H \sim \Delta B_xB_1H$ и оттук $\sphericalangle B_1B_xH = \sphericalangle A_1A_xH$, което означава, че четириъгълникът B_xHA_xC е вписан в окръжността k_x. С това задачата е решена.

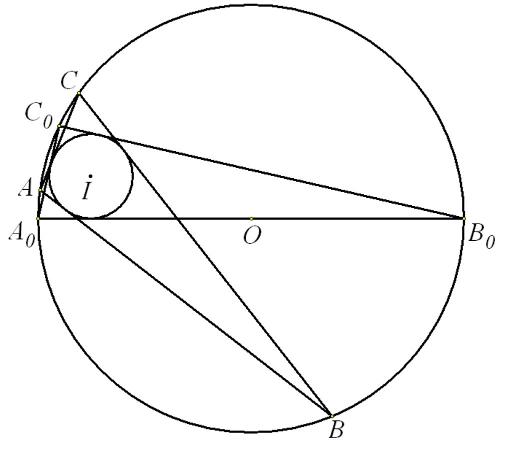
Задача 3. Правоъгълният триъгълник $A_0B_0C_0$ е вписан в окръжност $k_0(O,R)$ и е описан около окръжност $k_i\,(I, r)$.

а) Да се намерят страните на триъгълник ABC, вписан в $k_0(O,R)$ и описан около $k_i\,(I, r)$, така че той да има ъгъл 60^o.

б) Да се докаже, че ако S_0 и S са лицата съответно на $\Delta A_0B_0C_0$ и ΔABC, то е изпълнено равенството $S = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(S_0 + r^2\right)$.

Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Лицето S_Δ на триъгълник, който има ъгъл γ и е вписан в $k_0(O,R)$ и описан около $k_i\,(I, r)$, се пресмята по формулата $S_\Delta = 2Rr\sin\gamma + r^2 ctg\dfrac{\gamma}{2}$. Оттук за лицата на разглежданите триъгълници при $\gamma = 90^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$ се получават съответно формулите $S_0 = 2Rr + r^2$ и $S = \sqrt{3}r\left(R + r\right)$.



От тези формули непосредствено следва твърдение б) на задачата. Сега от равенствата $a+b+c=\dfrac{2S}{r}$, $ab+bc+ca=p^2+r^2+4Rr=\left(\dfrac{S}{r}\right)^2+r^2+4Rr$ и $abc=4SR$ забелязваме, че страните на ΔABC са корени на кубичното уравнение

$$x^3-2\sqrt{3}(R+r)x^2+\left(3R^2+10Rr+4r^2\right)x-4\sqrt{3}Rr(R+r)=0.$$

Оттук $x_1=R\sqrt{3}$, $x_2=\dfrac{1}{2}\left[(R+2r)\sqrt{3}+\sqrt{(R-2r)(3R+2r)}\right]$ и

$x_3=\dfrac{1}{2}\left[(R+2r)\sqrt{3}-\sqrt{(R-2r)(3R+2r)}\right]$. С това са намерени страните на ΔABC.