Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2014

Задача 1. Да се намерят всички рационални стойности на параметъра k, за които уравнението $(k-10)x^2-(2k-21)x-2k+22=0$, $k\neq 10$ притежава целочислени корени.

Милен Найденов, Варна

Решение: Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението, то $x_1+x_2=\dfrac{2k-21}{k-10}=2-\dfrac{1}{k-10}$ е цяло число. Затова $\dfrac{1}{k-10}=p$ е цяло. Оттук получаваме $k=\dfrac{10p+1}{p}$. За дискриминантата D на уравнението намираме $D=\dfrac{(p-6)^2-24}{p^2}$. Тъй като D трябва да е точен квадрат, то $(p-6)^2-24=n^2$ за някое цяло число n. Последното равенство записваме във вида $(p-6-n)(p-6+n)=24$. Оттук следват системите уравнения:

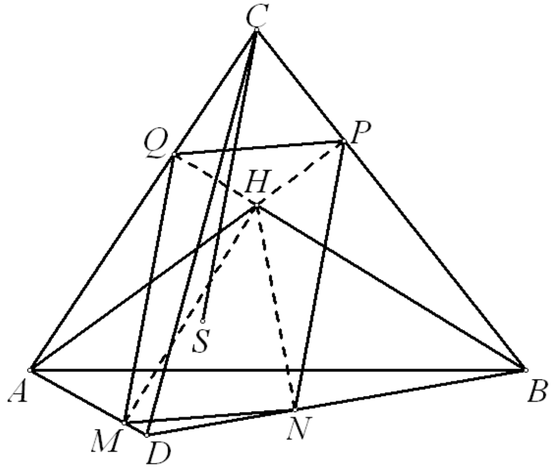
$$\left|\begin{array}{l} p-6-n=\pm 2,\\ p-6+n=\pm 12,\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} p-6-n=\pm 12,\\ p-6+n=\pm 2,\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} p-6-n=\pm 4,\\ p-6+n=\pm 6,\end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} p-6-n=\pm 6,\\ p-6+n=\pm 4.\end{array}\right.$$

От тези системи намираме, че p приема стойностите $p_1=-1$, $p_2=1$, $p_3=11$ и $p_4=13$. Тези стойности на p водят съответно до $k_1=9$, $k_2=11$, $k_3=\dfrac{111}{11}$ и $k_4=\dfrac{131}{13}$. Следователно $k\in\left\{9,11,\dfrac{111}{11},\dfrac{113}{13}\right\}$.

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и радиус на описаната окръжност R, за който $\sphericalangle BAC=\alpha$ и $\sphericalangle ABC=\beta$. Ако D е точка от полуравнината относно правата AB, несъдържаща триъгълника, за която $\sphericalangle ADC=180^\circ-2\beta$ и $\sphericalangle BDC=180^\circ-2\alpha$, да се докаже, че $HD=R$.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: Нека $\sphericalangle ACB=\gamma$. От условието следва $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ADC+\sphericalangle BDC=2\gamma$. Лесно се забелязва, че $AH=2R\cos\alpha$, $BH=2R\cos\beta$ и $CH=2R\cos\gamma$. Ще докажем, че ортогоналните проекции M, N, P и Q на H съответно върху правите AD, DB, BC, и CA са върхове на успоредник. Имаме $QM = AM\sin\sphericalangle QAM =$ $= 2R\cos\alpha.\dfrac{CD}{AC}.\sin\sphericalangle ADC = \dfrac{CD}{\sin\beta}.\cos\alpha.\sin 2\beta = 2CD\cos\alpha\cos\beta$. Аналогично се получава, че $PN = 2CD\cos\alpha\cos\beta$. Следователно $QM = PN$. От друга страна, имаме $\sphericalangle AMQ + \sphericalangle BPN = \sphericalangle AHM + \sphericalangle BHN = \sphericalangle AHB - \sphericalangle MHN = (180^\circ - \gamma) - (180^\circ - 2\gamma) = \gamma$, т.е. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle AQM + \sphericalangle BPN$. Нека сега CS е права през C, успоредна на QM. От равенствата $\sphericalangle PCS = \sphericalangle ACB - \sphericalangle ACS = \sphericalangle ACB - \sphericalangle AQM = \sphericalangle BPN$ следва, че $CS \parallel PN$. Оттук заключаваме, че $QM \parallel PN$. Това показва, че $MNPQ$ е успоредник. Следователно $MN = QP$ и $HD = \dfrac{MN}{\sin\sphericalangle MDN} = \dfrac{QP}{\sin 2\gamma} = \dfrac{CH\sin\gamma}{\sin 2\gamma} = \dfrac{2R\cos\gamma\sin\gamma}{2\sin\gamma\cos\gamma} = R$. С това задачата е решена.



Задача 3. Нека $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$ са произволни еднакво ориентирани равнострани триъгълници от една равнина. Да се докаже, че центровете на тежестта G_a, G_b и G_c съответно на многоъгълниците $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$ и $C_1C_2\ldots C_n$ са върхове на равностранен триъгълник.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Доказателството на твърдението на тази задача ще извършим с използване на комплексни числа, като, както обикновено, точките ще означаваме с големи букви, а афиксите им ще означаваме със съответните малки букви. Нека G_k (k=1,2,...,n) и G са центровете на тежестта съответно на триъгълниците

$A_kB_kC_k$ (k=1,2,...,n) и $G_aG_bG_c$. Тогава са изпълнени равенствата $g_k=\frac{1}{3}(a_k+b_k+c_k)$ (k=1,2,...,n), $g_a=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$, $g_b=\frac{1}{n}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$, $g_c=\frac{1}{n}(c_1+c_2+\cdots+c_n)$ и $g=\frac{1}{3}(g_a+g_b+g_c)$. Оттук следва, че $g=\frac{1}{n}(g_1+g_2+\cdots+g_n)$. Нека триъгълниците $A_kB_kC_k$ (k=1,2,...,n) са ориентирани в посока, обратна на часовниковата стрелка, и $\omega=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(i^2=-1)$. Тогава са изпълнени равенствата $b_k=\omega a_k+(1-\omega)g_k$ и $c_k=\omega^2a_k+(1-\omega^2)g_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Оттук следват зависимостите $g_b=\omega g_a-(1-\omega)g$ и $g_c=\omega^2g_a-(1-\omega^2)g$. Сега забелязваме, че са изпълнени равенствата $g-g_b=\omega(g-g_a)$ и $g-g_c=\omega^2(g-g_a)$. Последните равенства показват, че точките G_b и G_c се получават от G_a при ротация с център G съответно на ъгли 120° и 240°. Следователно триъгълникът $G_aG_bG_c$ е равностранен.