Educational Research
Научно-методически статии

ПЪЛНО ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ГРИФИТС С КОНИЧНИ СЕЧЕНИЯ

[1]Сава Гроздев, [2]Веселин Ненков
[1]Висше училище по застраховане и финанси
[2]Технически колеж – Ловеч

Резюме. В настоящата статия е представено обобщение на забележителната теорема на Грифитс от геометрията на триъгълника. Това обобщение съдържа специалното обобщение на теоремата на Грифитс, получено от авторите в (Grozdev & Nenkov, 2015).
Keywords: triangle, conic, pedal circle, pedal curve, Euler curve.

1. Въведение. В (Grozdev & Nenkov, 2015) е показано едно обобщение на следната:

Теорема на Грифитс. *Ако една точка се движи по права, минаваща през центъра на описаната около ΔABC окръжност, то педалната окръжност на тази точка спрямо ΔABC минава през постоянна точка от Ойлеровата окръжност на ΔABC.*

Споменатото обобщение се изразява със следната:

Теорема 1. *Ако една точка се движи по права, минаваща през центъра O на описаното около ΔABC конично сечение $\overline{k}(O)$, то педалната крива на тази точка спрямо ΔABC минава през постоянна точка от Ойлеровата крива на ΔABC, асоциирана с $\overline{k}(O)$.*

В доказателството на Теорема 1, описано в (Grozdev & Nenkov, 2015), от изключително голямо значение са пресечните точки на правата през центъра O на конично сечение $\overline{k}(O)$ (диаметър на $\overline{k}(O)$) със самата крива $\overline{k}(O)$. Но когато $\overline{k}(O)$ е хипербола, не всеки диаметър има общи точки с $\overline{k}(O)$. Затова този вид хиперболи не се обхващат от доказателството в (Grozdev & Nenkov, 2015). Освен това доказателството на Теорема 1 в (Grozdev & Nenkov, 2015) се отнася само за така наречените Фойербахови конфигурации, които свързват $\overline{k}(O)$ със специални вписани за ΔABC конични сечения. От друга страна, съществуват описани хиперболи $\overline{k}(O)$ за ΔABC, които не определят Фойербахови конфигурации. Това означава, че даже ако една хипербола има общи точки с разглеждания диаметър, но не принадлежи на Фойербахова конфигурация, тя също не се включва в споменатото доказателство на Теорема 1 (Grozdev & Nenkov, 2015). Така се получават два основни аргумента срещу присъствието на всички хиперболи в обобщението на теоремата на Грифитс, представено с Теорема 1. Това означава, че в Теорема 1 трябва да отхвърлим едно обширно множество от хиперболи. Оказва се обаче, че верността на Теорема 1 не се влияе нито от съществуването на пресечни точки на диаметъра с $\overline{k}(O)$, нито от обвързването на $\overline{k}(O)$ с вписани за ΔABC криви. Следователно е необходимо да приведем ново доказателство, което обхваща и отбелязаните случаи, невключващи се в доказателството на Теорема 1, приведено в (Grozdev & Nenkov, 2015). За да извършим това, ще използваме, че понятието педална крива по отношение на централно конично сечение може да се определи с едно свойство, което не е показано (Гроздев & Ненков, 2014).

Разглеждаме произволен триъгълник ABC. Спрямо ΔABC ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Паскалев & Чобанов, 1985). Средите на страните BC, CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, а с $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ – медицентъра ΔABC. В равнината на ΔABC ще разглеждаме произволно конично сечение $\overline{k}(O)$ с център $O(x_0, y_0, z_0)$. За пълнота ще разгледаме всички възможности за $\overline{k}(O)$ в зависимост от положението на центъра й O в равнината на ΔABC.

2. Ойлерова крива, асоциирана с описана за триъгълника крива. Забележителната за триъгълника окръжност на Ойлер може да се обобщи спрямо произволна описана за ΔABC крива в зависимост от положението на центъра O, както това е описано в разгледаните по-долу случаи.

2.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Определяме правите h_a, h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A, B и C и успоредни съответно на правите OM_a, OM_b и OM_c. Тези прави се пресичат в една точка $H\left(1-2x_0,1-2y_0,1-2z_0\right)$, която се получава от O посредством равенството $\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Ако $h_a \cap BC = A_1$, $h_b \cap CA = B_1$ и $h_c \cap AB = C_1$, то точките A_1, B_1, C_1, M_a, M_b и M_c лежат на едно конично сечение Ω, което наричаме *Ойлерова крива, асоциирана с* $\overline{k}(O)$. Уравнението на Ойлеровата крива може да се представи във вида:

$$(1)\ \Omega(O): \begin{aligned}&4\left[\left(1-2x_0\right)x_0yz+\left(1-2y_0\right)y_0zx+\left(1-2z_0\right)z_0xy\right]-\\&-\left[\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)x+\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)y+\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)z\right]\left(x+y+z\right)=0\end{aligned}$$

2.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника. Нека О ≡ M_c и C_1 $(l,m,0)$ $(l + m = 1)$ е точка от правата AB. В този случай разглеждаме точката H като съвпадаща с C (равенството $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$ е изпълнено и в този случай). Точките M_a, M_b, M_c, C и C_1 са различни и определят единствена крива от втора степен Ω (M_c, C_1), която наричаме *Ойлерова крива, асоциирана с* $\overline{k}(O)$. Уравнението на Ойлеровата крива може да се представи във вида:

$$(2) \qquad \Omega(M_c, C_1): 2(lyz + mzx + xy) - (mx + ly)(x + y + z) = 0.$$

Случаите, когато О ≡ M_a и О ≡ M_b са аналогични.

2.3. Описана крива с безкраен център. Определяме правите h_a, h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A, B и C и колинеарна с вектора $\overrightarrow{O}(x_0, y_0, z_0) \equiv O(x_0, y_0, z_0)$. В този случай разглеждаме точката H като съвпадаща с O. Ако $h_a \cap BC = A_1$, $h_b \cap CA = B_1$ и $h_c \cap AB = C_1$, то точките A_1, B_1, C_1, M_a, M_b и M_c лежат на една парабола $\Omega(\overrightarrow{O})$, която наричаме *Ойлерова крива или Ойлерова парабола, асоциирана с* $\overline{k}(O)$. Уравнението на Ойлеровата крива може да се представи във вида:

$$(3) \qquad \Omega(\overrightarrow{O}): y_0 z_0 x^2 + z_0 x_0 y^2 + x_0 y_0 z^2 + x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy = 0.$$

Тъй като точката H във всички случаи е аналог на ортоцентъра, ще я наричаме *ортоид на* ΔABC, *определен от описаната крива* $\overline{k}(O)$.

3. Спрегнати точки и педални криви. Двойките изогонално спрегнати точки спрямо ΔABC имат обща педална окръжност, спрямо центъра на която двете точки са симетрични. Ще използваме този факт, за да определим двойките спрегнати спрямо централно коничното сечение $\overline{k}(O)$. Тъй като свойствата на точките от $\overline{k}(O)$ и връзката им с Теорема 1 са разгледани в (Ненков, 2007), (Гроздев & Ненков, 2012) и (Grozdev & Nenkov, 2015), тук няма да разглеждаме такива точки.

3.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. За координатите на центъра O (x_0, y_0, z_0) е изпълнено равенството $x_0 + y_0 + z_0 = 1$, а координатите на точките от $\overline{k}(O)$ удовлетворяват уравнението

$$(4) \qquad \overline{k}(O): (-x_0 + y_0 + z_0)x_0 yz + (x_0 - y_0 + z_0)y_0 zx + (x_0 + y_0 - z_0)z_0 xy = 0.$$

Нека $P(x_P, y_P, z_P)$ $(x_P + y_P + z_P = 1)$ е точка от равнината на ΔABC, а правите p_a, p_b и p_c минават през P и са съответно успоредни на OM_a, OM_b и OM_c, като $P_a = p_a \cap BC$, $P_b = p_b \cap CA$ и $P_c = p_c \cap AB$. Координатите на точките P_a, P_b и P_c са следните

$$(5)\qquad \begin{aligned} &P_a\left(0,\frac{\left(x_0-y_0+z_0\right)x_P+2x_0y_P}{2x_0},\frac{\left(x_0+y_0-z_0\right)x_P+2x_0z_P}{2x_0}\right),\\ &P_b\left(\frac{\left(-x_0+y_0+z_0\right)y_P+2y_0x_P}{2y_0},0,\frac{\left(x_0+y_0-z_0\right)y_P+2y_0z_P}{2y_0}\right),\\ &P_c\left(\frac{\left(-x_0+y_0+z_0\right)z_P+2z_0x_P}{2z_0},\frac{\left(x_0-y_0+z_0\right)z_P+2z_0y_P}{2z_0},0\right). \end{aligned}$$

Ако s_a, s_b и s_c са правите, които минават съответно през средите на отсечките P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b, така че да са спрегнати съответно с правите P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b спрямо $\bar{k}(O)$, от (4) и (5) намираме параметричните им уравнения във вида:

$$s_a:\begin{cases} x=\dfrac{4y_0z_0x_P+\left(1-2x_0\right)z_0y_P+\left(1-2x_0\right)y_0z_P}{4y_0z_0}+\left[\left(1-2y_0\right)y_0z_P+\left(1-2z_0\right)z_0y_P\right]t_a,\\ y=\dfrac{2z_0y_P+\left(1-2y_0\right)z_P}{4z_0}-\left(1-2y_0\right)y_0z_Pt_a,\\ z=\dfrac{\left(1-2z_0\right)y_P+2y_0z_P}{4y_0}-\left(1-2z_0\right)z_0y_Pt_a, \end{cases}$$

$$s_b:\begin{cases} x=\dfrac{2z_0x_P+\left(1-2x_0\right)z_P}{4z_0}-\left(1-2x_0\right)x_0z_Pt_b,\\ y=\dfrac{\left(1-2y_0\right)z_0x_P+4z_0x_0y_P+\left(1-2y_0\right)x_0z_P}{4z_0x_0}+\left[\left(1-2x_0\right)x_0z_P+\left(1-2z_0\right)z_0x_P\right]t_b,\\ z=\dfrac{\left(1-2z_0\right)x_P+2x_0z_P}{4x_0}-\left(1-2z_0\right)z_0x_Pt_b, \end{cases}$$

$$s_c:\begin{cases} x=\dfrac{2y_0x_P+\left(1-2x_0\right)y_P}{4y_0}-\left(1-2x_0\right)x_0y_Pt_c,\\ y=\dfrac{\left(1-2y_0\right)x_P+2x_0y_P}{4x_0}-\left(1-2y_0\right)y_0x_Pt_c,\\ z=\dfrac{\left(1-2z_0\right)y_0x_P+\left(1-2z_0\right)x_0y_P+4x_0y_0z_P}{4x_0y_0}+\left[\left(1-2x_0\right)x_0y_P+\left(1-2y_0\right)y_0x_P\right]t_c. \end{cases}$$

След известни пресмятания от последните уравнения се вижда, че правите s_a, s_b и s_c се пресичат в точката W, която има следните координати

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_W &= \frac{\vartheta(P)\,x_P + (1-2x_0)\,x_0 y_P z_P}{2\vartheta(P)},\\ y_W &= \frac{\vartheta(P)\,y_P + (1-2y_0)\,y_0 z_P x_P}{2\vartheta(P)},\\ z_W &= \frac{\vartheta(P)\,z_P + (1-2z_0)\,z_0 x_P y_P}{2\vartheta(P)}, \end{aligned}$$

където

$$(7)\quad \vartheta(P) = (-x_0 + y_0 + z_0)\,x_0 y_P z_P + (x_0 - y_0 + z_0)\,y_0 z_P x_P + (x_0 + y_0 - z_0)\,z_0 x_P y_P\,.$$

Нека $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ е точката, симетрична на P спрямо W. От (6) за координатите на Q се получават равенствата:

$$(8)\quad x_Q = \frac{(-x_0 + y_0 + z_0)\,x_0 y_P z_P}{\vartheta(P)},\ y_Q = \frac{(x_0 - y_0 + z_0)\,y_0 z_P x_P}{\vartheta(P)},$$
$$z_Q = \frac{(x_0 + y_0 - z_0)\,z_0 x_P y_P}{\vartheta(P)},$$

където $\vartheta(P)$ се изразява с равенството (7).

Точката Q ще наричаме *спрегната на P спрямо* $\overline{k}(O)$.

Нека през спрегнатата точка Q са построени правите q_a, q_b и q_c, които са успоредни съответно на OM_a, OM_b и OM_c, като $Q_a = q_a \cap BC$, $Q_b = q_b \cap CA$ и $Q_c = q_c \cap AB$. Координатите на точките Q_a, Q_b и Q_c са следните:

$$(9)\quad \begin{aligned} &Q_a\left(0, \frac{(x_0 - y_0 + z_0)\left[(-x_0 + y_0 + z_0)\,y_P + 2y_0 x_P\right] z_P}{2\vartheta(P)}, \frac{(x_0 + y_0 - z_0)\left[(-x_0 + y_0 + z_0)\,z_P + 2z_0 x_P\right] y_P}{2\vartheta(P)}\right),\\ &Q_b\left(\frac{(-x_0 + y_0 + z_0)\left[(x_0 - y_0 + z_0)\,x_P + 2x_0 y_P\right] z_P}{2\vartheta(P)}, 0, \frac{(x_0 + y_0 - z_0)\left[(x_0 - y_0 + z_0)\,z_P + 2z_0 y_P\right] x_P}{2\vartheta(P)}\right),\\ &Q_c\left(\frac{(-x_0 + y_0 + z_0)\left[(x_0 + y_0 - z_0)\,x_P + 2x_0 z_P\right] y_P}{2\vartheta(P)}, \frac{(x_0 - y_0 + z_0)\left[(x_0 + y_0 - z_0)\,y_P + 2y_0 z_P\right] x_P}{2\vartheta(P)}, 0\right), \end{aligned}$$

където $\vartheta(P)$ се изразява с равенството (7). От (5) и (9) установяваме, че координатите на шестте точки P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b и Q_c удовлетворяват уравнението

$$(10)\ \pi\,(P,Q):\ \begin{array}{l} 4\vartheta(P)\left[(-x_0+y_0+z_0)x_0yz+(x_0-y_0+z_0)y_0zx+(x_0+y_0-z_0)z_0xy\right]- \\ -(a_{11}x+a_{22}y+a_{33}z)(x+y+z)=0, \end{array}$$

където

$$a_{11}=(x_0-y_0+z_0)(x_0+y_0-z_0)\left[(x_0-y_0+z_0)z_P+2z_0y_P\right]\left[(x_0+y_0-z_0)y_P+2y_0z_P\right]x_P,$$

$$a_{22}=(x_0+y_0-z_0)(-x_0+y_0+z_0)\left[(-x_0+y_0+z_0)z_P+2z_0x_P\right]\left[(x_0+y_0-z_0)x_P+2x_0z_P\right]y_P,$$

$$a_{33}=(-x_0+y_0+z_0)(x_0-y_0+z_0)\left[(x_0-y_0+z_0)x_P+2x_0y_P\right]\left[(-x_0+y_0+z_0)y_P+2y_0x_P\right]z_P,$$

а $\vartheta(P)$ се изразява с равенството (7).

Кривата $\pi\,(P,Q)$, определена с уравнението (10), ще наричаме *педална крива на P и Q спрямо описаната крива $\overline{k}(O)$*. Педалната крива $\pi\,(P,Q)$ е елипса или хипербола съответно когато $\overline{k}(O)$ е елипса или хипербола (Гроздев & Ненков, 2014). Освен това, ако $\overline{k}(O)$ и $\pi\,(P,Q)$ са хиперболи, те имат успоредни асимптоти (Гроздев & Ненков, 2014). Като се използва изразяването на координатите на центъра на крива чрез коефициентите на уравнението й (Гроздев & Ненков, 2015), се вижда, че точката W, чиито координати се изразяват с равенствата (6), е център на педалната крива $\pi\,(P,Q)$.

3.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника. Ако $O(x_0,y_0,z_0)\equiv M_c\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ и $C_1(l,m,0)$ $(l+m=1)$ е точка от правата AB, уравнението на описаната крива $\overline{k}(O)\equiv\overline{k}(M_c,C_1)$ може да се представи във вида:

$$(11)\qquad \overline{k}(M_c,C_1):\ \ lyz+mzx+xy=0,\ (l+m=1).$$

Нека $P(x_P,y_P,z_P)$ $(x_P+y_P+z_P=1)$ е точка от равнината на ΔABC, а правите p_a, p_b и p_c минават през P и са съответно успоредни на M_cM_a, M_cM_b и CC_1, като $P_a=p_a\cap BC$, $P_b=p_b\cap CA$ и $P_c=p_c\cap AB$. Координатите на точките P_a, P_b и P_c са следните:

$$(12)\qquad P_a(0,y_P,z_P+x_P),\ P_b(x_P,0,z_P+y_P),\ P_c(lz_P+x_P,mz_P+y_P,0).$$

Ако s_a, s_b и s_c са правите, които минават съответно през средите на отсечките P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b, така че да са спрегнати съответно с правите P_bP_c, P_cP_a и P_aP_b

спрямо $\overline{k}(M_c, C_1)$, от (11) и (12), както в предишния случай (когато O не е среда на страна на ΔABC), намираме, че правите s_a, s_b и s_c се пресичат в точката W, която има следните координати:

$$(13)\quad x_W = \frac{\vartheta(P,C_1)x_P + ly_P z_P}{2\vartheta(P)},\ y_W = \frac{\vartheta(P,C_1)y_P + mz_P x_P}{2\vartheta(P)},\ z_W = \frac{\vartheta(P,C_1)z_P + x_P y_P}{2\vartheta(P)},$$

където

$$(14)\qquad \vartheta(P,C_1) = ly_P z_P + mz_P x_P + x_P y_P .$$

Нека $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ е точката, симетрична на P спрямо W. От (13) за координатите на Q се получават равенствата:

$$(15)\qquad x_Q = \frac{ly_P z_P}{\vartheta(P,C_1)},\ y_Q = \frac{mz_P x_P}{\vartheta(P,C_1)},\ z_Q = \frac{x_P y_P}{\vartheta(P,C_1)},$$

а $\vartheta(P,C_1)$ се изразява с равенството (14).

Точката Q ще наричаме *спрегната на P спрямо* $\overline{k}(M_c, C_1)$.

Нека през спрегнатата точка Q са построени правите q_a, q_b и q_c, които са успоредни съответно на OM_a, OM_b и OM_c, като $Q_a = q_a \cap BC$, $Q_b = q_b \cap CA$ и $Q_c = q_c \cap AB$. Координатите на точките Q_a, Q_b и Q_c са следните:

$$(16)\qquad \begin{aligned} &Q_a\left(0, \frac{mz_P x_P}{\vartheta(P,C_1)}, \frac{y_P(lz_P + x_P)}{\vartheta(P,C_1)}\right), \\ &Q_b\left(\frac{lz_P y_P}{\vartheta(P,C_1)}, 0, \frac{x_P(mz_P + y_P)}{\vartheta(P,C_1)}\right), \\ &Q_c\left(\frac{ly_P(z_P + x_P)}{\vartheta(P,C_1)}, \frac{mx_P(z_P + y_P)}{\vartheta(P,C_1)}, 0\right), \end{aligned}$$

където $\vartheta(P,C_1)$ се изразява с равенството (14). От (12) и (16) установяваме, че координатите на шестте точки P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b и Q_c удовлетворяват уравнението

$$(17)\quad \pi(P,Q): \vartheta(P,C_1).(lyz + mzx + xy) - (a_{11}x + a_{22}y + a_{33}z)(x + y + z) = 0,$$

където

$$a_{11} = m(mz_P + y_P)(y_P + z_P)x_P,\ a_{22} = l(lz_P + x_P)(x_P + z_P)y_P,\ a_{33} = lmx_P y_P z_P,$$

а $\vartheta(P,C_1)$ се изразява с равенството (14).

Кривата π (P,Q), определена с уравнението (17), ще наричаме *педална крива на P и Q спрямо описаната крива* $\overline{k}$ (M_c,C_1). Педалната крива π (P,Q) е елипса или хипербола, съответно когато $\overline{k}(O)$ е елипса или хипербола. Освен това, ако $\overline{k}(O)$ и π (P,Q) са хиперболи, те имат успоредни асимптоти. Като се използва изразяването на координатите на центъра на крива чрез коефициентите на уравнението й (Гроздев & Ненков, 2015), се вижда, че точката W, чиито координати се изразяват с равенствата (13), е център на педалната крива π (P,Q).

3.3. Описана крива с безкраен център. За координатите на центъра $O\left(x_0, y_0, z_0\right)$ (или все едно на вектора $\vec{O}\left(x_0, y_0, z_0\right)$) е изпълнено равенството $x_0 + y_0 + z_0 = 0$, а координатите на точките от параболата $\overline{k}\,(O) \equiv \overline{k}\left(\vec{O}\right)$ удовлетворяват уравнението

(18) $$k\left(\vec{O}\right):\ x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy = 0 .$$

Уравнението (18) се получава от (4), като се вземе предвид, че в този случай е изпълнено равенството $x_0 + y_0 + z_0 = 0$.

Ако $P\left(x_P, y_P, z_P\right)$ $\left(x_P + y_P + z_P = 1\right)$ е точка от равнината на ΔABC, техниката, използвана в предишните два случая (когато $\overline{k}(O)$ не е парабола), не е подходяща за геометрично определяне на точка Q, която да наречем спрегната на P. Затова ще използваме елементи от идеите, развити в (Гроздев & Ненков, 2012), за да покажем геометрична конструкция на желаната точка Q, а оттам и намирането на нейните координати.

Нека правата a, минаваща през върха A и колинеарна с вектора $\vec{O}\left(x_0, y_0, z_0\right)$, има спрямо правите AB и AC спрегната права a_0. Аналогично през върховете B и C построяваме двойките прави b, b_0 и c, c_0. От извършената конструкция следва, че правите a, b и c минават през безкрайната точка $O\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Ако $A_0 = b_0 \cap c_0$, $B_0 = c_0 \cap a_0$ и $C_0 = a_0 \cap b_0$, то $A_0B_0C_0$ се нарича спрегнат триъгълник на точката $O\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Координатите на точките A_0, B_0 и C_0 са следните: $A_0\left(\frac{1}{2}, -\frac{y_0}{2x_0}, -\frac{z_0}{2x_0}\right)$, $B_0\left(-\frac{x_0}{2y_0}, \frac{1}{2}, -\frac{z_0}{2y_0}\right)$, $C_0\left(-\frac{x_0}{2z_0}, -\frac{y_0}{2z_0}, \frac{1}{2}\right)$. Сега въвеждаме означенията $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = BP \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$. Нека AA_2 ($A_2 \in BC$) е хармонично спрегната на AA_1 спрямо a и B_0C_0, BB_2 ($B_2 \in CA$) е хармонично спрегната на BB_1 спрямо b и C_0A_0 и CC_2 ($C_2 \in AB$) е хармонично спрегната на CC_1 спрямо c и A_0B_0. Правите AA_2, BB_2 и CC_2 минават през една точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, чиито координати се изразяват с равенствата

$$(19) \qquad x_Q = \frac{x_0^2 y_P z_P}{\vartheta_\pi(P)},\ y_Q = \frac{y_0^2 z_P x_P}{\vartheta_\pi(P)},\ z_Q = \frac{z_0^2 x_P y_P}{\vartheta_\pi(P)},$$

където

$$(20) \qquad \vartheta_\pi(P) = x_0^2 y_P z_P + y_0^2 z_P x_P + z_0^2 x_P y_P .$$

Равенствата (19) и (20) се получават съответно от (8) и (7) при $x_0 + y_0 + z_0 = 0$. Така получената точка Q наричаме спрегната на P спрямо параболата $\overline{k}(O)$.

Нека сега p е правата, минаваща през P и колинеарна с вектора $\overrightarrow{O}(x_0, y_0, z_0)$, като $P_a = p \cap BC$, $P_b = p \cap CA$ и $P_c = p \cap AB$. Уравнението на правата p и координатите на точките P_a, P_b и P_c са следните:

$$(21) \qquad p : (y_0 z_P - z_0 y_P)x + (z_0 x_P - x_0 z_P)y + (x_0 y_P - y_0 z_P)z = 0,$$

$$(22) \qquad \begin{gathered} P_a\left(0, \frac{x_0 y_P - y_0 x_P}{x_0}, \frac{x_0 z_P - z_0 x_P}{x_0}\right), \\ P_b\left(\frac{y_0 x_P - x_0 y_P}{y_0}, 0, \frac{y_0 z_P - z_0 y_P}{y_0}\right), \\ P_c\left(\frac{z_0 x_P - x_0 z_P}{z_0}, \frac{z_0 y_P - y_0 z_P}{z_0}, 0\right). \end{gathered}$$

Ако q е правата, минаваща през Q и колинеарна с вектора $\overrightarrow{O}(x_0, y_0, z_0)$, а $Q_a = q \cap BC$, $Q_b = q \cap CA$ и $Q_c = q \cap AB$, то уравнението на q и координатите на точките Q_a, Q_b и Q_c са следните:

$$(23) \quad q : x_P y_0 z_0 (y_0 z_P - z_0 y_P)x + y_P z_0 x_0 (z_0 x_P - x_0 z_P)y + z_P x_0 y_0 (x_0 y_P - y_0 z_P)z = 0,$$

$$(24) \qquad \begin{gathered} Q_a\left(0, \frac{y_0 z_P (y_0 x_P - x_0 y_P)}{\vartheta_\pi(P)}, \frac{z_0 y_P (z_0 x_P - x_0 z_P)}{\vartheta_\pi(P)}\right), \\ Q_b\left(\frac{x_0 z_P (x_0 y_P - y_0 x_P)}{\vartheta_\pi(P)}, 0, \frac{z_0 x_P (z_0 y_P - y_0 z_P)}{\vartheta_\pi(P)}\right), \\ Q_c\left(\frac{x_0 y_P (x_0 z_P - z_0 x_P)}{\vartheta_\pi(P)}, \frac{y_0 x_P (y_0 z_P - z_0 y_P)}{\vartheta_\pi(P)}, 0\right), \end{gathered}$$

където $\vartheta_\pi(P)$ се изразява с равенството (20).

Лесно се забелязва, че след използване на равенството $x_0+y_0+z_0=0$ в (5) и (9), се получават координатите, изразени съответно с (22) и (24). Освен това, като се използва равенството $x_0+y_0+z_0=0$, уравнението (10) се преобразува в следното:

$$\left(x_0^2y_Pz_P+y_0^2z_Px_P+z_0^2x_Py_P\right)\left(x_0^2yz+y_0^2zx+z_0^2xy\right)+$$
$$+\left[x_Py_0z_0\left(y_0z_P-z_0y_P\right)^2x+y_Pz_0x_0\left(z_0x_P-x_0z_P\right)^2y+z_Px_0y_0\left(x_0y_P-y_0x_P\right)^2z\right](x+y+z)=0.$$

Последното уравнение може да се представи във вид на произведение по следния начин:

$$\left[\left(y_0z_P-z_0y_P\right)x+\left(z_0x_P-x_0z_P\right)y+\left(x_0y_P-y_0z_P\right)z\right]\times$$
$$\times\left[x_Py_0z_0\left(y_0z_P-z_0y_P\right)x+y_Pz_0x_0\left(z_0x_P-x_0z_P\right)y+z_Px_0y_0\left(x_0y_P-y_0z_P\right)z\right]=0.$$

Като вземем предвид уравненията (21) и (22), виждаме, че това уравнение се разпада на уравненията на правите p и q. Забелязаните следствия от равенството $x_0+y_0+z_0=0$ ни дават основание под *педална крива* π (*P, Q*) *на P и Q спрямо параболата* $\overline{k}(O)$ да разбираме двойката успоредни или съвпадащи прави p и q.

Интересно е да разберем кога правите p и q съвпадат, т.е. кога педалната крива π (*P, Q*) е двойна права. Правите p и q съвпадат тогава и само тогава, когато $P_a\left(0,\dfrac{x_0y_P-y_0x_P}{x_0},\dfrac{x_0z_P-z_0x_P}{x_0}\right)\equiv Q_a\left(0,\dfrac{y_0z_P\left(y_0x_P-x_0y_P\right)}{\vartheta_\pi(P)},\dfrac{z_0y_P\left(z_0x_P-x_0z_P\right)}{\vartheta_\pi(P)}\right)$. Следователно $\dfrac{x_0y_P-y_0x_P}{x_0}=\dfrac{y_0z_P\left(y_0x_P-x_0y_P\right)}{\vartheta_\pi(P)}$. Ако $y_0x_P-x_0y_P=0$, то $P_a\equiv C$ и $P_b\equiv C$. Оттук се получават съответно равенствата $\dfrac{x_0z_P-z_0x_P}{x_0}=1$ и $\dfrac{y_0z_P-z_0y_P}{y_0}=1$. Тогава $P_c\equiv C_1\left(-\dfrac{x_0}{z_0},-\dfrac{y_0}{z_0},0\right)$ е общата точка на Ойлеровата крива Ω и правата AB. Така получаваме, че $p\equiv q\equiv CC_1$. Ако $y_0x_P-x_0y_P\neq 0$, то $\vartheta_\pi(P)=x_0y_0z_P$. От (20) след известни преобразувания се получава равенството $\left(z_0x_P-x_0z_P\right)\left(y_0z_P-z_0y_P\right)=0$. Оттук $z_0x_P-x_0z_P=0$ или $y_0z_P-z_0y_P=0$. Тези случаи водят съответно до $p\equiv q\equiv AA_1$ и $p\equiv q\equiv BB_1$. Окончателно получаваме, че *педалната крива* π (*P, Q*) *е двойна права тогава и само тогава, когато точката P лежи върху някоя от правите* AA_1, BB_1 *и* CC_1.

Трябва да се отбележи, че когато точката P лежи върху страна на ΔABC, нейната спрегнатa точка е върхът, лежащ срещу тази страна. Ако $P\in AB$ ($P\neq A$, $P\neq B$), нейната спрегната точка е върхът C, а педалната крива π (*P, Q*) е напълно определена от точките P, P_a, P_b, C и C_1. Центърът на π (P, Q) е средата на отсечката PC. Накрая ще отбележим, че във всички възможни случаи за описаната крива $\overline{k}(O)$ педалната крива на ортоида H е Ойлеровата крива Ω .

4. Една крива от втора степен, получаваща се като геометрично място на спрегнати точки. Нека d е диаметър на описаната крива $\overline{k}(O)$, колинеарен с вектора $\vec{d}(\alpha,\beta,\gamma)$ $(\alpha+\beta+\gamma=0)$, а $U(x_U, y_U, z_U)$ е точка от d. Ще определим геометричното място k_d, което описва спрегнатата точка V (x, y, z), когато U се движи по диаметъра d. Тъй като двете точки са взаимно заменяеми, ще разглеждаме точката U като спрегната на V. Тогава координатите x_U, y_U и z_U на точката U се определят чрез координатите x, y и z на V с равенствата (8), (15) или (19) в различните случаи. Както преди, ще разгледаме трите случая поотделно.

4.1. Описана крива, центърът на която не лежи върху страна на триъгълника. Определяме диаметъра d с параметричните му уравнения:

$$x_U = x_0 + \alpha t,\ y_U = y_0 + \beta t,\ z_U = z_0 + \gamma t. \tag{25}$$

Като заместим координатите на P от (8) в първите две уравнения на (25), получаваме равенствата:

$$\frac{(1-2x_0)x_0yz}{(1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy} = x_0 + \alpha t,$$

$$\frac{(1-2y_0)y_0zx}{(1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy} = y_0 + \beta t.$$

След елиминиране на параметъра t от последните равенства се получава следното уравнение:

$$k_d :(\beta z_0-\gamma y_0)(1-2x_0)x_0yz+(\gamma x_0-\alpha z_0)(1-2y_0)y_0zx+(\alpha y_0-\beta x_0)(1-2z_0)z_0xy=0. \tag{26}$$

Кривата от втора степен, с уравнение (26), е търсеното геометрично място k_d. Тази крива минава през върховете на ΔABC, т.е. k_d е описана за ΔABC. Освен това координатите на ортоида $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$ удовлетворяват уравнението на k_d. Следователно H е точка от k_d. По-нататък е интересно да определим вида на кривата k_d. За целта намираме броя на общите точки на k_d с безкрайната права, която има уравнение $x + y + z = 0$. След заместване на z от последното равенство в (26) и извършване на някои елементарни преобразувания получаваме

$$\left(\gamma x_0-\alpha z_0\right)\left(1-2y_0\right)y_0x^2+2x_0y_0\left[\alpha\left(1-2y_0\right)-\beta\left(1-2x_0\right)\right]xy+\left(\beta z_0-\gamma y_0\right)\left(1-2x_0\right)x_0y^2=0.$$

Дискриминантата на последното уравнение е следната:

(27) $$D'=-x_0y_0z_0\left[\left(1-2x_0\right)x_0\beta\gamma+\left(1-2y_0\right)y_0\gamma\alpha+\left(1-2z_0\right)z_0\alpha\beta\right].$$

Първо, да отбележим, че когато е изпълнено равенството $\left(1-2x_0\right)x_0\beta\gamma+\left(1-2y_0\right)y_0\gamma\alpha+\left(1-2z_0\right)z_0\alpha\beta=0$, векторът $\vec{d}$ е асимптотичен за $\overline{k}(O)$ (Grozdev & Nenkov, 2015). Следователно $D'=0$ тогава и само тогава, когато $\vec{d}$ е асимптотичен за $\overline{k}(O)$. Това означава, че k_d е парабола тогава и само тогава, когато $\overline{k}(O)$ е хипербола и d е нейна асимптота. Освен това, когато $\overline{k}(O)$ е хипербола, има точно две криви k_d, които са параболи с оси, успоредни на асимптотите на $\overline{k}(O)$. Когато $\overline{k}(O)$ е хипербола, педалните криви са хиперболи, чиито асимптоти са успоредни на асимптотите на $\overline{k}(O)$. От друга страна, е известно, че Ойлеровата крива Ω и описаната крива $\overline{k}(O)$ са хомотетични (Гроздев & Ненков, 2014,3). Затова оста на параболата k_d е успоредна с асимптота на Ойлеровата крива Ω. По друг начин казано, центърът на параболата k_d (нейната безкрайна точка) лежи върху Ойлеровата крива Ω (съвпада с някоя от двете безкрайни точки на Ω).

Сега ще разгледаме останалите възможности за знака на израза D'. Общите точки на диаметъра d с $\overline{k}(O)$ са общите решения на уравненията (4) и (25). Тези уравнения водят до равенството

$$\left[\left(1-2x_0\right)x_0\beta\gamma+\left(1-2y_0\right)y_0\gamma\alpha+\left(1-2z_0\right)z_0\alpha\beta\right]t^2+x_0y_0z_0=0.$$

Последното уравнение по отношение на t има две решения, когато изразът D' е положителен, и няма нито едно решение, когато изразът D' е отрицателен. Следователно кривата k_d е хипербола, когато диаметърът d пресича $\overline{k}(O)$, и е елипса, когато d няма общи точки с $\overline{k}(O)$. Случаят на елипса е възможен само когато $\overline{k}(O)$ е хипербола. Когато геометричното място k_d е хипербола, Симсъновите прави на точките (Ненков, 2007), в които d пресича $\overline{k}(O)$, са асимптотите на k_d. Доказателството на този факт се получава по същия начин, както това е направено в (Grozdev & Nenkov, 2015).

Координатите на центъра $T\left(x_T,y_T,z_T\right)$ определяме чрез коефициентите на k_d по начина, показан в (Гроздев & Ненков, 2015). Получаваме равенствата

$$x_T = -\frac{(1-2x_0)(z_0\beta - y_0\gamma)\left[(1-2z_0)\beta-(1-2y_0)\gamma\right]}{2s(d)},$$

$$(28) \qquad y_T = -\frac{(1-2y_0)(x_0\gamma - z_0\alpha)\left[(1-2x_0)\gamma-(1-2z_0)\alpha\right]}{2s(d)},$$

$$z_T = -\frac{(1-2z_0)(y_0\alpha - x_0\beta)\left[(1-2y_0)\alpha-(1-2x_0)\beta\right]}{2s(d)},$$

където

$$(29) \qquad s(d) = (1-2x_0)x_0\beta\gamma + (1-2y_0)y_0\gamma\alpha + (1-2z_0)z_0\alpha\beta .$$

След извършване на известни пресмятания установяваме, че координатите (28) удовлетворяват уравнението (1). Следователно T лежи върху Ойлеровата крива Ω .

Остана да обърнем внимание на случая, когато геометричното място k_d е разпадаща се крива. Това се случва само когато някой от коефициентите в (26) е равен на нула. Ако например е изпълнено равенството $\alpha y_0 - \beta x_0 = 0$, от (26) следва, че кривата k_d има следното уравнение $\left[(1-2y_0)x-(1-2x_0)y\right]z = 0$. Първият множител води до уравнението на правата $h_c \equiv CH$, а вторият – до уравнението на правата AB. Въпреки че се нарушава еднозначността, за удобство ще предполагаме, че всяка точка от правата AB е спрегнат образ на върха C (в обратна посока това вече беше определено). Така получаваме, че в този случай кривата k_d представлява две реални пресичащи се прави CH и AB. Тази разпадаща се крива се състои от спрегнатите точки на точките от диаметъра CO и има за център точката $CH \cap AB = C_1\left(\frac{1-2x_0}{2z_0}, \frac{1-2y_0}{2z_0}, 0\right)$. Координатите на C_1 се получават и по формулите (28). Освен това C_1 лежи върху Ойлеровата крива Ω .

4.2. Описана крива, центърът на която лежи върху страна на триъгълника. Нека $O(x_0, y_0, z_0) \equiv M_c\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ и $C_1(l, m, 0)$ $(l+m=1)$. Първо ще разгледаме случая, когато диаметърът d е различен от AB. Параметричните уравнения на d са следните:

$$(30) \qquad x_U = \frac{1}{2} + \alpha t,\ y_U = \frac{1}{2} + \beta t,\ z_U = \gamma t .$$

Като заместим координатите на P от (15) в първите две уравнения на (30), получаваме равенствата: $\dfrac{lyz}{lyz+mzx+xy}=\dfrac{1}{2}+\alpha t$, $\dfrac{mzx}{lyz+mzx+xy}=\dfrac{1}{2}+\beta t$. След елиминиране на параметъра t от последните равенства се получава следното уравнение:

$$(31) \qquad k_d : l\gamma yz - m\gamma zx + (\beta-\alpha)xy = 0.$$

Кривата от втора степен с уравнение (26) е търсеното геометрично място k_d. Тази крива минава през върховете на ΔABC, т.е. k_d е описана за ΔABC. Освен това, тъй като $H \equiv C(0,0,1)$, то ортоидът H е точка от k_d. По-нататък определяме вида на кривата k_d след заместване на $z=-x-y$ в (31). Получаваме уравнението

$$(\gamma x_0-\alpha z_0)(1-2y_0)y_0x^2+2x_0y_0\left[\alpha(1-2y_0)-\beta(1-2x_0)\right]xy+(\beta z_0-\gamma y_0)(1-2x_0)x_0y^2=0$$

Дискриминантата на последното уравнение е следната

$$(32) \qquad D''=-(lyz+mzx+xy).$$

Първо да отбележим, че равенството $D''=0$ е изпълнено тогава и само тогава, когато векторът $\vec{d}$ е асимптотичен за $\overline{k}(O)$ (Grozdev & Nenkov, 2015). Това означава, че k_d е парабола тогава и само тогава, когато $\overline{k}(O)$ е хипербола и d е нейна асимптота. Освен това, когато $\overline{k}(O)$ е хипербола, има точно две криви k_d, които са параболи с оси, успоредни на асимптотите на $\overline{k}(O)$. Когато $\overline{k}(O)$ е хипербола, педалните криви са хиперболи, чиито асимптоти са успоредни на асимптотите на $\overline{k}(O)$. От друга страна, Ойлеровата крива Ω и описаната крива $\overline{k}(O)$ са хомотетични. Затова оста на параболата k_d е успоредна с асимптота на Ойлеровата крива Ω. По друг начин казано, центърът на параболата k_d (нейната безкрайна точка) лежи върху Ойлеровата крива Ω (съвпада с някоя от двете безкрайни точки на Ω).

Сега ще разгледаме останалите възможности за знака на израза D''. Общите точки на диаметъра d с $\overline{k}(O)$ са общите решения на уравненията (11) и (30). Тези уравнения водят до равенството $(lyz+mzx+xy)t^2+\dfrac{1}{4}=0$. Последното уравнение по отношение на t има две решения, когато изразът D'' е положителен, и няма нито едно решение, когато изразът D'' е отрицателен. Следователно кривата k_d е хипербола, когато диаметърът d пресича $\overline{k}(O)$, и е елипса, когато d няма общи точки с $\overline{k}(O)$. Случаят на елипса е възможен само когато $\overline{k}(O)$ е хипербола. Когато геометричното място k_d е хипербола, Симсъновите прави на точките (Ненков, 2007), в които d пресича $\overline{k}(O)$, са асимптотите на k_d. Доказателството на този факт се получава по същия начин, както това е направено в (Grozdev & Nenkov, 2015).

Координатите на центъра $T\,(x_T, y_T, z_T)$ определяме чрез коефициентите на k_d по начина, показан в (Гроздев & Ненков, 2015). Получаваме равенствата

$$(33)\quad x_T=\frac{l\beta\gamma}{2(l\beta\gamma+m\gamma\alpha+\alpha\beta)},\ y_T=\frac{m\gamma\alpha}{2(l\beta\gamma+m\gamma\alpha+\alpha\beta)},\ z_T=\frac{l\beta\gamma+m\gamma\alpha+2\alpha\beta}{2(l\beta\gamma+m\gamma\alpha+\alpha\beta)}.$$

След извършване на известни пресмятания установяваме, че координатите (33) удовлетворяват уравнението (2). Следователно T лежи върху Ойлеровата крива Ω.

Да обърнем внимание на случая, когато геометричното място k_d е разпадаща се крива. Това се случва само когато някой от коефициентите в (31) е равен на нула. Единствената възможност е да бъде изпълнено равенството $\alpha - \beta = 0$. Затова можем да считаме, че $\alpha = 1$, $\beta = 1$ и $\gamma = -2$ $\gamma=-2$ са координатите на вектора $\vec{d}$. Следователно $d \equiv CM_c$. От (31) следва, че кривата k_d има следното уравнение $(mx - ly)\,z = 0$. Първият множител води до уравнението на правата CC_1, а вторият – до уравнението на правата AB. Тук отново ще предполагаме, че всяка точка от правата AB е спрегнат образ на върха C. Така получаваме, че в този случай кривата k_d представлява две реални пресичащи се прави CC_1 и AB. Тази разпадаща се крива се състои от спрегнатите точки на точките от диаметъра CM_c и има за център точката $C_1\,(l, m, 0)$. Координатите на центъра C_1 се получават и по формулите (33). Освен това C_1 лежи върху Ойлеровата крива Ω.

Нека сега $d \equiv AB$. Тогава върхът C е спрегната точка на всяка точка U от d. Следователно търсеното геометрично място k_d е точката C, която също лежи върху Ойлеровата крива Ω. Тук можем да разглеждаме k_d като две комплексно спрегнати пресичащи се прави през реалната точка C. „В някакъв смисъл всяка комплексна точка е оторизирала върха C да я представлява като нейна реална спрегната на точка от правата AB“. По този начин геометричното k_d можем също да разглеждаме като крива от втора степен с център C, лежащ върху Ойлеровата крива Ω.

4.3. Описана крива с безкраен център. Тъй като за координатите на центъра $O(x_0, y_0, z_0)$ е изпълнено равенството $x_0 + y_0 + z_0 = 0$, диаметърът d е напълно определен от точка $P(x_P, y_P, z_P)$ $(x_P + y_P + z_P = 1)$ и вектора $\vec{O}(x_0, y_0, z_0)$. Параметричните уравнения на диаметъра d са следните:

$$(34)\qquad x_U = x_P + x_0 t,\ y_U = y_P + y_0 t,\ z_U = z_P + z_0 t.$$

Като заместим координатите на P от (19) в първите две уравнения на (34), получаваме равенствата: $\dfrac{x_0^2 yz}{x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy} = x_P + x_0 t$, $\dfrac{y_0^2 yz}{x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy} = y_P + y_0 t$.

След елиминиране на параметъра t от последните равенства се получава следното уравнение:

$$(35)\qquad k_d:\left(y_0z_P-z_0y_P\right)x_0^2yz+\left(z_0x_P-x_0z_P\right)y_0^2zx+\left(x_0y_P-y_0x_P\right)z_0^2xy=0\,.$$

Кривата от втора степен с уравнение (35) е търсеното геометрично място k_d. Тази крива минава през върховете на ΔABC, т.е. k_d е описана за ΔABC. Освен това, тъй като $H \equiv O(x_0, y_0, z_0)$, то ортоидът H е точка от k_d. Следователно H е точка от k_d. По-нататък ще определим вида на кривата k_d. Броят на общите точки на k_d с безкрайната права се определя от уравнението

$$\left(z_0x_P-x_0z_P\right)y_0^2x^2+x_0y_0\left[x_0\left(1-2y_P\right)-y_0\left(1-2x_P\right)\right]xy+\left(y_0z_P-z_0y_P\right)x_0^2y^2=0\,.$$

От последното уравнение намираме, че безкрайните точки на k_d са $O(x_0, y_0, z_0)$ и $S\left(\left(y_0z_P-z_0y_P\right)x_0,\left(z_0x_P-x_0z_P\right)y_0,\left(x_0y_P-y_0x_P\right)z_0\right)$. Следователно кривата k_d е хипербола.

Координатите на центъра $T\,(x_T, y_T, z_T)$ определяме чрез коефициентите на k_d по начина, показан в (Гроздев & Ненков, 2015). Получаваме равенствата

$$(36)\qquad \begin{aligned} x_T&=-\frac{2\vartheta_\pi+\left(y_0z_P+z_0y_P\right)x_0}{y_0z_0},\\ y_T&=-\frac{2\vartheta_\pi+\left(z_0x_P+x_0z_P\right)y_0}{z_0x_0},\\ z_T&=-\frac{2\vartheta_\pi+\left(x_0y_P+y_0x_P\right)z_0}{x_0y_0}, \end{aligned}$$

където ϑ_π се изразява с равенството (20).

Тъй като правата $p \equiv d$, минаваща през P, е колинеарна с вектора $\overrightarrow{O}\left(x_0,y_0,z_0\right)$, то разглежданият диаметър принадлежи на едното асимптотично направление за хиперболата k_d. Освен това от (21) и (36) следва, че центърът T на k_d лежи върху правата $p \equiv d$. Следователно *диаметърът d е асимптота на k_d*. Нека сега M е средата на отсечката, определена от спрегнатите точки U и V. Лесно се проверява, че когато точката U описва диаметъра d, точката M описва правата

$$(37)\quad m:\left(y_0z_P+z_0y_P\right)x_0x+\left(z_0x_P+x_0z_P\right)y_0y+\left(x_0y_P+y_0z_P\right)z_0z=0\,.$$

Правата m е колинеарна с вектора

$$\overrightarrow{S}\left(\left(y_0z_P-z_0y_P\right)x_0,\left(z_0x_P-x_0z_P\right)y_0,\left(x_0y_P-y_0x_P\right)z_0\right).$$

Следователно *втората асимптота на k_d е успоредна на правата m*.

След извършване на известни пресмятания установяваме, че координатите (36) удовлетворяват уравнението (3). Следователно T лежи върху Ойлеровата крива Ω.

Остана да обърнем внимание на случая, когато геометричното място k_d е разпадаща се крива. Това се случва само когато някой от коефициентите в (35) е равен на нула. Ако например е изпълнено равенството $y_0x_P - x_0y_P = 0$, от (36) следва, че кривата k_d има следното уравнение $\left(y_0x - x_0y\right)z = 0$. Първият множител води до уравнението на правата $h_c \equiv CC_1$, а вторият – до уравнението на правата AB. Тук отново ще предполагаме, че всяка точка от правата AB е спрегнат образ на върха C. Така получаваме, че в този случай кривата k_d представлява две реални пресичащи се прави CC_1 и AB. Тази разпадаща се крива се състои от спрегнатите точки на точките от диаметъра CO и има за център точката $P_c \equiv C_1\left(-\frac{x_0}{z_0}, -\frac{y_0}{z_0}, 0\right)$. Координатите на C_1 се получават и по формулите (36). Освен това C_1 лежи върху Ойлеровата крива Ω. Този случай се получава, когато педалната крива е двойната права CC_1.

Получените резултати, отнасящи се за геометричното място k_d, което описва точката, спрегната на точката, движеща се по диаметър, можем да обобщим по следния начин:

Теорема 2. *Ако d е диаметър на описаната за ΔABC крива $\overline{k}(O)$, то геометричното място k_d е крива от втора степен, която е описана около ΔABC, минава през ортоида H и има за център точка от Ойлеровата крива Ω, асоциирана с $\overline{k}(O)$.*

5. Доказателство на обобщената теорема на Грифитс. Нека d е диаметър на $\overline{k}(O)$, а P произволна точка от d. Ако d е асимптота за $\overline{k}(O)$, педалната крива на всяка точка P от диаметъра d е хипербола, една от безкрайните точки на която е центърът на параболата k_d, т.е. безкрайната точка на d, която е безкрайна точка и на Ойлеровата крива Ω. Ако d не е асимптота и не съвпада с никоя от правите BC, CA и AB, след извършване на несложни пресмятания се установява, че координатите (28) и (33) удовлетворяват съответно уравненията (10) и (17). Следователно центърът T на кривата k_d лежи върху педалната крива на всяка точка P от диаметъра d. Освен това според Теорема 2 точката T лежи върху Ойлеровата крива Ω. Следователно педалните криви на точките от диаметъра d пресичат Ойлеровата крива Ω в постоянна точка T. Ако $d \equiv AB$, педалната крива на всяка точка P от AB минава през върха C. Освен това Ойлеровата крива Ω също минава през C. Така отново получаваме, че всички педални криви и Ойлеровата крива

Ω имат обща точка. По този начин Теорема 1 е доказана за всички диаметри на всички централни криви.

Нека сега $\overline{k}(O)$ е парабола. Диаметърът $d \equiv p$ е асимптота на хиперболата k_d и минава през центъра й T. Освен това според Теорема 2 точката T лежи върху Ойлеровата крива Ω. Следователно T е обща точка на Ойлеровата крива Ω и диаметъра d, който е общ елемент на всички педални криви, определени от точките на диаметъра d. По този начин получаваме, че Теорема 1 е изпълнена и в случай, че $\overline{k}(O)$ е парабола.

6. Заключение. Проведеното доказателство на Теорема 1 обхваща както пропуснатите в (Grozdev & Nenkov, 2015) случаи, така и разгледаните на същото място Фойербахови конфигурации. Въпреки че педалните криви изглеждат по-екзотично, когато описаната крива е парабола, проведеното тук доказателство придава смисъл на обобщена теорема на Грифитс и за параболи. Трябва обаче да се отбележи, че проведеното в (Grozdev & Nenkov, 2015) доказателство на Теорема 1 съдържа допълнителни геометрични характеристики на обширния клас от криви, образуван от Фойербахови конфигурации. Накрая ще обърнем внимание, че описаните резултати за централни криви обобщават тези, които са получени в (Гроздев & Ненков, 2012) и (Гроздев & Ненков, 2014, 2). Резултатите за параболи съвпадат с тези в (Гроздев & Ненков, 2012) и (Гроздев & Ненков, 2014,2), но са записани по друг начин.

ЛИТЕРАТУРА

Гроздев, С., В. Ненков. (2012). Две двойки точки, породени от асоциирани спрямо триъгълник централни конични сечения. *Математика и информатика, 1*, 60 – 83.

Гроздев, С., В. Ненков (2014,1). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник, *Математика и информатика, 2*, 2014, 139 – 154.

Гроздев, С., В. Ненков. (2014, 2). Педална крива на точка спрямо Фойербахова конфигурация, *Математика и информатика, 6*, 617 – 625.

Гроздев, С., В. Ненков. (2014, 3). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. *Сборник материалов международной научной конференции.* Архангельск: САФУ, 35 – 54.

Гроздев, С., В. Ненков. (2015). Конични сечения с колинеарни центрове. *Математика и математическо образование, 44*, 291 – 298.

Ненков, В. (2007). Две описани конични сечения и две породени от тях множества от прави. *Математика и математическо образование, 36*, 392 – 396.

Паскалев, Г., И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: „Народна просвета".

Grozdev, S., V. Nenkov. (2015). A Generalization of the Griffiths' Theorem for Conics with Intersecting Diameters. *Math Problems*.

REFERENCES

Grozdev, S., V. Nenkov. (2012). Dve dvoyki tochki, porodeni ot asotsiirani spryamo triagalnik tsentralni konichni secheniya. *Matematika i informatika*, 1, 60 – 83.

Grozdev, S., V. Nenkov (2014,1). Homotetichni konichni secheniya v ravninata na triagalnik, *Matematika i informatika*, 2, 2014, 139 – 154.

Grozdev, S., V. Nenkov. (2014, 2). Pedalna kriva na tochka spryamo Foyerbahova konfiguratsiya, Matematika i informatika, 6, 617 – 625.

Grozdev, S., V. Nenkov. (2014, 3). Obobshteniya nekotorayh klassicheskih teorem geometrii treugolynika. Teoreticheskie i prikladnaye aspektay matematiki, informatiki i obrazovaniya. *Sbornik materialov mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii*. Arhangelysk: SAFU, 35 – 54.

Grozdev, S., V. Nenkov. (2015). Konichni secheniya s kolinearni tsentrove. *Matematika i matematichesko obrazovanie*, 44, 291 – 298.

Nenkov, V. (2007). Dve opisani konichni secheniya i dve porodeni ot tyah mnozhestva ot pravi. *Matematika i matematichesko obrazovanie*, 36, 392 – 396.

Paskalev, G., I. Chobanov. (1985). *Zabelezhitelni tochki v triagalnika. Sofiya*: Narodna prosveta.

Grozdev, S., V. Nenkov. (2015). A Generalization of the Griffiths' Theorem for Conics with Intersecting Diameters. *Math Problems*.

FULL GENARIZATION OF THE GRIFFITS THEOREM WITH CONICS

Abstract. The present paper considers a generalization of the remarkable Griffits theorem from the geometry of triangle. This generalization contains the special one, obtained by the authors in (Grozdev & Nenkov, 2015).

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg