Educational Research
Научно-методически статии

ГЕНЕЗИС И РАЗВИТИЕ НА ТЕОРИЯТА НА РАВНОМЕРНОТО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ

Силвия Байчева, Васил Грозданов
Югозападен университет „Неофит Рилски“

Резюме. В статията си поставяме за цел да направим кратък исторически преглед на развитието на теорията на равномерното разпределение на редици. Ще засегнем само някои аспекти на тази теория, като ще проследим и анализираме примери за генезиса и развитието на съответните понятия и твърдения.

Keywords: Uniform Distribution Theory, Uniform Distribution of Sequences, Discrepancy, Diaphony.

Началото на теорията на равномерното разпределение на редици е още в Средновековието, като обикновено се свързва с името на френския математик и философ Николас Оресме[1)]. Прозренията на средновековния астроном за движението на астрономическите тела надминават времето си в множество аспекти. За това ясно говорят изследванията му за разположението на Земята – векове преди Коперник.[2)] Особена важност имат и разработките му върху проблеми, свързани с несъизмеримостта на небесните движения. В това отношение Оресме започва дебат с Аристотеловата позиция, че „божествените движения са „неизменни“, оставащи еднакви за цяла вечност“ (Plato, 1994: 279 – 280). Както посочва и Плато, този диспут е познат в историята на средновековната мисъл като дебат за съизмеримостта и несъизмеримостта, който се решава едва през шестнадесети век.

По отношение на несъизмеримостта на движението на небесните тела Оресме непосредствено приема резултатите на средновековния математик и физик Томас Брадуардайн от изследването му „Върху отношението между скоростта и движението“ (De ProportionibusVelocitatum in Motibus), публикувано през 1328 г. Както посочва Кени, Брадуардайн „развива теория за съотношенията, която той използва, за да представи как силите, съпротивлението и скоростите са корелативни в процеса на движението“ (Kenny, 2005: 98). Именно тази теория е основа за преодоляването на Аристотеловия закон за движението, както и база за изследването на Оресме.

В статията си „Доказателството на Оресме за гъстотата на ротациите на кръга чрез ирационален ъгъл“[3)] Ян фон Плато свързва името на Оресме с началото на развитието на теорията на равномерното разпределение, използвайки определени части от трактатите му, където Оресме загатва, че „несъизмеримото свързване би било еднакво разпределено във всички посоки“ (Plato, 1993: 432). Резултатите за подобна разпределеност, съгласно допълнението на Плато, са за първи път доказани от Бол, Серпински и Вайл едва през 1909 – 1910 г.

Преди обаче да се достигне до реалното извеждане на съвременната теория за равномерното разпределение на редици, трябва да се отчетат и важните опити на изследователите преди това. Ролята на Оресме се явява важна, тъй като той загатва в един неоформен вид това, което ще бъде доказано систематично едва през началото на XX век от Херман Вайл. Всички тези предварителни теоретични констатации са на базата на наблюдения, свързани с астрономически обекти. Те използват частични доводи, свързани с изследването на неравномерното разпределение. Важността идва от факта, че дават основата, върху която ще стъпят съвременните изследователи на теорията на равномерно разпределените редици.

Канадско-американският астроном и математик от XIX век Саймън Нюкомб поставя въпроса дали стойностите на дробните части на някои величини важат и за логаритмите, респ. дали последната част от една таблица на антилогаритми ще бъде по-използвана от първата част или всяка ще бъде използвана еднакво[4)]. Йорн Щойдинг използва именно интересния пример на Нюкомб от статистиката, непосредствено свързан с генезиса на все още неизведената теория за неравномерността на разпределението на редици, за това, че „книги, съдържащи списъци със стойности на логаритми, тези страници, започващи с цифрата 1, са по-използвани от другите страници“ (Steuding, 2014: 660).

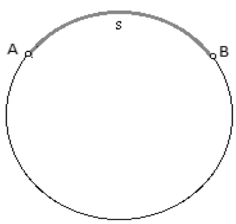
Споменатата по-горе констатация обаче за времето си не е придобила известност и не е била забелязана от изследователската общност. За сметка на това в началото на XX век физикът Франк Бенефорд преоткрива това явление. Щойдинг пише: „Едно разпределение на множество от числа се казва, че е разпределение на Бенефорд, ако водещото число за величината $log_{10}(1 + \frac{1}{k})$ е равно на $k \in \{1,2, ..., 9\}$. Така, малко повече от тридесет процента от числата с разпределение на Бенефорд, са с водеща цифра 1 в множеството от данни и само около шест процента започват с цифра 7“ (Steuding, 2014: 660).[5)]

Основна роля за формулирането на теорията на равномерното разпределение играе немският математик Леополд Кронекер. Теоремата на Кронекер гласи, че за дадено ирационално α редицата $\{n\alpha\}$ лежи плътно в единичния интервал, когато n е естествено число, или с други думи – дробната част на множеството от ирационални числа от вид а $n\alpha$ лежи плътно в единичния интервал.

Този резултат на теоремата на Кронекер за апроксимацията според Щойдинг се доближава значително до представените изводи на Оресме.

Малко след това астрономът Пиърс Бол успява да даде количествена интерпретация на качествения резултат на Кронекер. Както посочва Щойдинг, Бол изхожда от предпоставки, свързани с някои астрономически въпроси, чието геометрическо доказване се отличава със сложността си. В статията си той дава обосновка на теорията за неравномерното разпределение. Бол дава следния пример с прежда: взема се прежда с безкраен брой възли, разположени така, че първият от тях е в началото на преждата, а другите са равно отдалечени един от друг на разстояние и $r > 0$. Нека да увием преждата около кръг с обиколка 1. Върху кръга да изберем дъга AB с дължина s, такава, че $0 \leq s \leq 1$.[6)]

Примерът на Бол илюстративно може да се представи със следната фигура:



Броя на първите n възли, които са разположени върху дъгата AB, ще означим с $\varphi(n)$ и ще ги наричаме функция на разпределение. Бол стига до извода, че границата на отношението $\frac{\varphi(n)}{k}$ е равна на разстоянието s на дъгата AB при n клонящо към безкрайност. Същият пример е анализиран, но при ирационалната стойност на r, където той посочва, че „никога двата възела от преждата не могат да попаднат в еднаква крайна точка от отсечката AB, това е изводимо от ирационалността на r“ (Bohl, 1909: 227)[7)].

На базата на разсъжденията на Бол Щойдинг интерпретира идеите му на осъвременен математически език, като представя следната дефиниция:

„Редицата $\xi=(x_n)_{n \geq 0}$ от реални числа се нарича равномерно разпределена по модул 1, ако за всички α, β с $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, отношението на дробни части на x_n, които попадат в интервалът $[\alpha,\beta)$, съответстват на дължината му в следния смисъл:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq n \leq N : \{x_n\} \in [\alpha, \beta)\} = \beta - \alpha.“$$

(Steuding, 2014: 665).

В началните години на XX век теорията на равномерното разпределение отбелязва съществен напредък. Главно, той се свързва с името на Кронекер и изследването му върху поведението на дробните части на линейните форми. Друг пример виждаме и в работите на Бол, Серпински и Вайл върху разпределението на редицата $\{n\,\theta\}$, където θ е ирационално число. Задачата за разпределението на редицата $\{n\,\theta\}$, е възникнала във връзка с теорията на отклонението на небесното тяло от неговата траектория поради притегляне от други небесни тела.

Най-значителен принос за развитието на теорията на равномерното разпределение на редици се свързва с името на немския математик Херман Вайл. Той въвежда за първи път широко използвания днес термин „равномерно разпределена редица“. В рамките на систематичната си статия „За равномерното разпределение на числата по модул едно“[8)] от 1916 г. той извежда два основополагащи критерия за равномерното разпределение на редици. Първият от тях е познат като интегрален критерий на Вайл, а вторият е свързан с експоненциалната сума и е известен под наименованието експоненциален критерий на Вайл. Именно това изследване на немския математик полага основните на множество фундаментални дисциплини, както отбелязва и Витали Бергелсон, „той развива теорията на равномерното разпределение, която днес се свързва със значителен брой математически дисциплини, включващи теорията на числата, комбинаторика, теория на вероятностите, хармоничен анализ и ергодичната теория“[9)].

Голяма част от аналитичната теория на числата се основава на идеите, залегнали в статията на Вайл. Въпреки че Бол, Серпински и Вайл достигат до едни и същи заключения, но по различен начин по отношение на редицата $\{n\,\theta\}$, то в историята на математиката тази редица е останала с названието „редица на Вайл“.

За първи път едно систематизирано и модерно изложение на теорията на равномерно разпределените редици е представено от Кьойперс и Нидерайтер в тяхната забележително книга от 1976 г. „Равномерно разпределени редици“ (вж: Kuipers, L., Niederreiter, H., 1974).

Следвайки Вайл, дефиницията и теоремите, които ще разгледаме в съвременен аспект, показват, че равномерно разпределените редици могат да се използват за приблизително пресмятане на определени интеграли от много широк клас от функции. Много съвременни математици като Каселс, Циглер, Хелмберг и други извеждат също така в модерен математически вид критериите на Вайл (вж: Cassels, 1957: 64 – 74, Cigler; Helmberg, 1961: 7).

Когато се разглежда въпросът за равномерното разпределение на многомерни редици, то теорията в този случай изглежда така: нека $s \geq 1$ е фиксирано цяло число, което навсякъде ще означава размерност. Нека $\xi=(x_n)_{n\geq 0}$ е произволна редица от точки в s-мерния единичен куб $[0,1)^s$.

Нека $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_s) \in [0,1)^s$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, ..., b_s) \in [0,1)^s$ са два вектора. Ще означаваме

$\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{b}$, ако за всяко j, $j = 1, 2, ..., s$ е в сила неравенството $a_j \le b_j$. Нека $J = \prod_{j=1}^{s} [a_j, b_j)$ е съответният подинтервал на $[0,1)^s$. Нека $N \ge 1$ е произволно цяло число. Тогава да означим

$$A_N(\xi; J) = \{n: 0 \le \mathrm{n} \le \mathrm{N} - 1, x_{\mathrm{n}} \in J\},$$

т.е. $A_N(\xi; J)$ означава броя на точките x_{n} от началния участък на редицата, съдържащ първите N точки, които попадат в подинтервала J.

Дефиниция 1. (Херман Вайл) Редицата ξ се нарича равномерно разпределена в $[0,1)^s$, ако граничното равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N(\xi; J)}{N} = \prod_{j=1}^{s} (\mathrm{b_j} - \mathrm{a_j})$$

е изпълнено за всеки подинтервал J на $[0,1)^s$.

В сила е следната теорема:

Теорема 1. (Интегрален критерий на Вайл) Редицата $\xi = (x_n)_{\mathrm{n} \ge 0}$ е равномерно разпределена в $[0,1)^s$ тогава и само тогава, когато за всяка комплекснозначна непрекъсната функция f, дефинирана над единичния интервал $[0,1)^s$, е в сила граничното равенство

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(\boldsymbol{x}_n) = \int_{[0,1)^s} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}.$$

Тази теорема показва, че равномерно разпределените редици могат да се използват за приближено пресмятане на определени интеграли от много широк клас от функции. Квадратурният процес, построен за функциите от този клас, е сходящ тогава и само тогава, когато възлите, които се използват в процеса на численото интегриране, са първите N члена на равномерно разпределена редица. Оттук идва и идеята за основното приложение на равномерно разпределените редици, а именно в теорията и практиката на численото интегриране.

Нека за произволни вектори $k = (k_1, ..., k_s) \in \mathbf{Z}^s$ и $x = (x_1, ..., x_s) \in [0,1)^s$ да означим $< \boldsymbol{k}, \boldsymbol{x} > = k_1 x_1 + ... + k_s x_s$, т.е. това е скаларното произведение на векторите $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{x}$. Като положим в Теорема 1 $f(x)$ да бъде $e^{2\pi k i < k,x>}$ и използваме факта, че за всеки вектор $\boldsymbol{k} \ne \mathbf{0}$ е в сила равенството

$$\int_{[0,1]^s} e^{2\pi i < k,x >} dx = 0,$$

се получава следният резултат:

Теорема 2. (Екпоненциален критерий на Вайл) *Редицата* $\xi=(x_n)_{n\geq 0}$ *е равномерно разпределена в* $[0,1)^s$ *тогава и само тогава, когат, граничното равенство*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i<\boldsymbol{k},x_n>} = 0$$

е изпълнено за всяко цяло $\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^s$ *и* $\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0}$.

Това е първият резултат, който показва, че тригонометричната функционална система може да се използва като апарат за изследването на равномерността на редици.

За да се сравнят две редици или да отговорим на въпроса „Коя от две редици е по-добре разпределена“, се въвеждат количествени характеристики, показващи степента на отклонение на едно конкретно разпределение от идеалното разпределение, афиширано в дефиниция 1. Количествените характеристики биват два вида – ***геометрични*** (дискрепанс) и ***аналитични*** (диафония).

В следващите две дефиниции ще представим някои количествени мерки за неравномерността на разпределението на редици в $[0,1)^s$. Те ни позволяват да направим разлика между редици с много добро разпределение и редици, които са с просто разпределение. За първи път терминът дискрепанс (отклонение) е въведен от холандския математик Ван дер Корпут през 1935г.[10)]

Дефиниция ***2 (Екстремален дискрепанс).*** *За всяко цяло число* $N\geq 1$ ***екстремалният дискрепанс*** $D_N(\xi)$ *на първите N елемента на редицата* ξ *се дефинира като*

$$D_N(\xi) = \sup_{J\subseteq[0,1)^s}\left|\frac{A_N(\xi;J)}{N} - \prod_{j=1}^{s}(b_j - a_j)\right|,$$

където супремумът се взема по всички подинтервали J на единичния куб $[0,1)^s$. Диафонията представлява една аналитична количествена мярка за измерване на неравномерността на разпределението на редици в s-мерния единичен куб. За пръв път терминът „диафония“ се среща в знаменитата работата на Петер Цинтерхоф от 1976 г. и днес е известен в литературата под наименованието „classical diaphony“[11)]. В следващата дефиниция ще представим тъй наречената класическа диафония на Цинтерхоф:

Дефиниция 3. *За произволно цяло число* $N\geq 1$ *диафонията на първите N елемента на редицата* ξ *се дефинира чрез равенството*

$$F_N(\xi) = \left\{\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbf{Z}^s\setminus\{0\}} R^{-2}(\boldsymbol{k})\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i<\boldsymbol{k},x_n>}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

където за всеки вектор $k = (k_1, ..., k_s) \in \mathbf{Z}^s$ *коефициентът* $R(k)$ *се дефинира като* $R(k) = \prod_{j=1}^{s} R[k_j)$ *и за всяко цяло число* k *коефициентът* $R(k)$ *се определя като*

$$R = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ |k|, & k \neq 0, \end{cases}$$

Ролята на диафонията и дискрепанса като количествени мерки за равномерното разпределение на редици се дава от следния резултат:

Теорема 3. Редицата ξ от точки в $[0,1)^s$ е равномерно разпределена тогава и само тогава, когато са в сила следните гранични равенства:

$$\lim_{N\to\infty} D_N(\xi) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{N\to\infty} F_N(\xi) = 0.$$

През 2016 г. ще се навършат 100 години от излизането на статията на Вайл, където за първи път в явен вид се дефинира понятието равномерно разпределена редица.

Днес на много места по света се извършват научни изследвания с теоретичен и приложен характер, които съществено обогатяват тази прекрасна математическа теория. С голямо удоволствие отбелязваме факта, че в разглежданата научна област – равномерно разпределение на редици, работят и български математици, които дават своя принос за нейното развитие.

БЕЛЕЖКИ

1. Интересен факт е, че много от изследванията на Оресме са преоткрити едва в началото на XX век. Както посочва Курце в математико-биографичното си изследване от 1830 г. върху трактатите на средновековния мислител, „и до днес Никола Оресме е подминаван с мълчание от изследователите по математика“ (Curtze, 1830: 2).
2. Вж: Steuding, J., 2014, One hundred years Uniform Distribution Modulo One and recent Applications to Riemann's Zeta-Function, In: Topics in Mathematical Analysis and Application, Vol. 94, pp. 659 – 698. Също така в изследването на Курце се посочва и преоткриването на трактата “Tractatus de latitudinibusformarum“ едва през шестнадесети век, съдържащ и основата на Декартовата аналитична геометрия. Вж: Curtze, M., 1830, Die Mathematischen Schriften des Nicole Oresme. (Circa 1320 – 1382). Ein Mathematisch-Bibliographischer Versuch, S. 20.
3. Oresme‘s Proof of the Density of Rotations of a Circle through an Irrational Angle.
4. Вж: Newcomb, S., 1881.
5. За илюстративни примери на детерминистичната редица, следваща закона на Бенфорд, както и математическото доказателство на базата на пример, вж: Steuding, 2014: 660 – 665.

6. Вж: Bohl, P., 1909, Über ein in der Theorie der säkularenStörungenvorkommendes Problem, In: Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1909, Band 135, Berlin: Verlag von Georg Reimer. S. 224.
7. В статията Бол доказва, че функцията на разпределението има линеен характер, като разглежда и доказва двата случая – при r като рационално число и като ирационално число. Вж: Bohl, 1909: 232 – 233.
8. Weyl, H., 1916, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, In: Mathematische Annalen, 1869, Berlin.
9. Bergelson, 2004: 1.
10. Вж: Van der Corput, Verteilungsfunktionen. I. Mitt.", Proc. Akad. Wet. Amsterdam (inGerman) 38: 813 – 821.
11. Вж. P. Zinterhof, Ubereinige Abschätzungenbeider Approximation von Funktionenmit Gleichverteilungsmethoden, Sitzungsber, Osterr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.II 185 (1976), S. 121 – 132.

ЛИТЕРАТУРА

Steuding, J. (2014). One hundred years Uniform Distribution Modulo One and recent Applications to Riemann's Zeta-Function, *Topics in Mathematical Analysis and Application*, Vol. 94, pp. 659 – 698.

Plato, J. von. (1993). Oresme's Proof of the Density of Rotations of a Circle through an Irrational Angle, *Historia Mathematica 20*, pp. 428 – 433.

Plato, J. von. (1994), *Creating Modern Probability*, USA: Cambridge University Press.

Newcomb, S. (1881). Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers, *American Journal of Mathematics*, Vol. 4, 1/1881, pp. 39 – 40.

Bohl, P. (1909). Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1909, Band 135, Berlin: Verlag von Georg Reimer.

Cassels, J. (1957). *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge: Cambridge University Press.

Bergelson, V. (2004). Some Historical Remarks and Modern Questions around the Ergodic Theorem, *Dynamics of Complex Systems, 1404,* pp. 1 – 11.

Weyl, H., (1916). Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Mathematische Annalen*, Berlin.

Drmota, M., Tochy, R. (1997). *Sequences, Discrepancies and Applications*, Berlin: Springer-Verlag.

Kenny, A. (2005). *Medieval Philosophy*, New York: Oxford University Press.

Curtze, M. (1830). *Die Mathematischen Schriften des Nicole Oresme. (Circa 1320 – 1382). Ein Mathematisch-Bibliographischer Versuch*, Berlin: Verlag von S. Calvary&Comp.

Cigler, J., Helmberg, G. (1961). Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 1961, Band 64, S. 1 – 50.
Kuipers, L., Niederreiter, H. (1974). *Uniform Distribution of Sequences*, New York: John Wiley.
Zinterhof, P. (1976). *Uber einige Abschätzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungs methoden*, Sitzungsber, Osterr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.II 185 (1976), 121 – 132.
Van der Corput. (1935). Verteilungsfunktionen. I. Mitt., *Proc. Akad. Wet. Amsterdam (in German) 38*, 813–821

REFERENCES

Steuding, J. (2014). One hundred years Uniform Distribution Modulo One and recent Applications to Riemann's Zeta-Function, *Topics in Mathematical Analysis and Application*, Vol. 94, pp. 659 – 698.
Plato, J. von. (1993). Oresme's Proof of the Density of Rotations of a Circle through an Irrational Angle, *Historia Mathematica 20*, pp. 428 – 433.
Plato, J. von. (1994), *Creating Modern Probability*, USA: Cambridge University Press.
Newcomb, S. (1881). Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers, *American Journal of Mathematics*, Vol. 4, 1/1881, pp. 39 – 40.
Bohl, P. (1909). Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1909, Band 135, Berlin: Verlag von Georg Reimer.
Cassels, J. (1957). *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge: Cambridge University Press.
Bergelson, V. (2004). Some Historical Remarks and Modern Questions around the Ergodic Theorem, *Dynamics of Complex Systems, 1404,* pp. 1 – 11.
Weyl, H., (1916). Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Mathematische Annalen*, Berlin.
Drmota, M., Tochy, R. (1997). *Sequences, Discrepancies and Applications*, Berlin: Springer-Verlag.
Kenny, A. (2005). *Medieval Philosophy*, New York: Oxford University Press.
Curtze, M. (1830). *Die Mathematischen Schriften des Nicole Oresme. (Circa 1320 – 1382). Ein Mathematisch-Bibliographischer Versuch*, Berlin: Verlag von S. Calvary&Comp.
Cigler, J., Helmberg, G. (1961). Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 1961, Band 64, S. 1 – 50.
Kuipers, L., Niederreiter, H. (1974). *Uniform Distribution of Sequences*, New York: John Wiley.

Zinterhof, P. (1976). *Uber einige Abschätzungen bei der Approximation von Funktionen mit Gleichverteilungs methoden*, Sitzungsber, Osterr. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl.II 185 (1976), 121 – 132.

Van der Corput. (1935). Verteilungsfunktionen. I. Mitt., *Proc. Akad. Wet. Amsterdam (in German) 38*, 813–821

GENESIS AND DEVELOPMENT OF THE THEORY OF UNIFORM DISTRIBUTION

Abstract. The aim of the paper is to propose a brief historical overview of the development of the theory of the uniform distribution of sequences. We will discuss only some aspects of the theory, tracing and analyzing specific examples of the genesis and the development of corresponding concepts and statements.

✉ **Mrs. Sylviya Baycheva, PhD Student**
South-West University
66, Ivan Michailov Str.
2700 Blagoevgrad, Bulgaria
E-mail: silvilota@abv.bg

✉ **Dr. Vassil Grozdanov, Assoc. Prof.**
South-West University
66, Ivan Michailov Str.
2700 Blagoevgrad, Bulgaria
E-mail: vassgrozdanov@yahoo.com