Contest Problems
Конкурсни задачи

Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Дадена е функцията $f(x)=x^2-mx+n$, където $m,n\in\mathbb{N}$. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$ и е изпълнено $\dfrac{f(-2)}{x_1+x_2}=\dfrac{f(-3)}{x_1x_2}=t\in\mathbb{N}$, да се намерят m и n.

Росен Николаев, Варна

Задача 2. Окръжност k с център O се допира до правата c в точка M. Точките A и B лежат върху c така, че M е между A и B. През точките A и B са построени допирателните a и b към k, които се пресичат в точка C. Ако $AM = m$, $BM = n$ и лицето на ΔABC е равно на $AM.BM$, да се намери дължината на OC.

Милен Найденов, Варна

Задача 3. Дадени са ΔABC и точка P от равнината му. Нека $A_1 = AP\cap BC$, $B_1 = PB\cap CA$ и $C_1 = CP\cap AB$. Описаните окръжности на триъгълниците ABB_1 и ACC_1 се пресичат за втори път в точката Q_a. Аналогично се получават точките Q_b и Q_c. Да се докаже, че правите AQ_a, BQ_b и CQ_c се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Краен срок за изпращане на решения 31 май 2016 г.

Конкурсът продължава и през настоящата година. В края на 2015 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2016 г.

Решенията трябват да бъдат представяни ясно, като всяка задача е задължително да бъде на отделен лист. Моля, изпращайте решенията и новите предложения на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg *и* vnenkov@mail.bg

Contest Problems
Конкурсни задачи

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1, 2015

Задача 1. Параметрите a и b в уравнението

$$5x^5 + 2x^4 + 4ax^3 - x^2 + 2bx + 4b - \mathrm{a} = 0$$

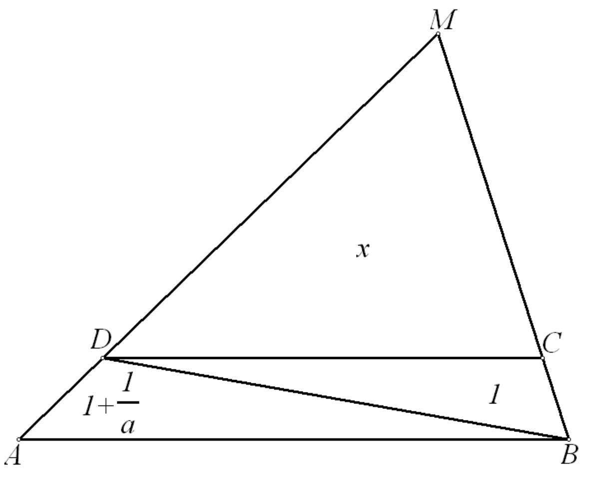
са такива, че то има за корени числата -1 и 2. Да се намерят останалите корени на уравнението.

Сава Гроздев, София и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение: Тъй като -1 и 2 са корени на даденото уравнение, то след заместване в уравнението се получават съответно равенствата: $-5a+2b = 4$ и $31a+8b = -188$. След решаване на получената система от две уравнения с две неизвестни се получава: $a = -4$ и $b = -8$. Заместваме намерените стойности за a, b и стигаме до уравнението $5x^5 + 2x^4 - 16x^3 - x^2 - 16x - 28 = 0$. Тъй като -1 и 2 са корени на това уравнение, се досещаме да го представим във вида $(x + 1)(x - 2)(5x^3 + 7x^2 + x + 14) = 0$. Лесно се вижда, че $5x^3 + 7x^2 + x + 14 = (x + 2)(5x^2 - 3x + 7)$. От първия множител следва, че $x = -2$ е корен на даденото уравнение. За дискриминанта на втория множител се получава стойност -131, което означава, че той има комплексни корени $\dfrac{3 \pm i\sqrt{131}}{10}$. Следователно уравнението има три реални корена $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ и два комплексни корена $x_4 = \dfrac{3 - i\sqrt{131}}{10}$ и $x_5 = \dfrac{3 + i\sqrt{131}}{10}$.

Задача 2. Трапец е разделен от единия си диагонал на два триъгълника с лица 1 и $1+\dfrac{1}{a}$. Да се намерят стойностите на a, при които лицето на триъгълника, образуван от малката основа на трапеца и продълженията на бедрата му, е точен квадрат.

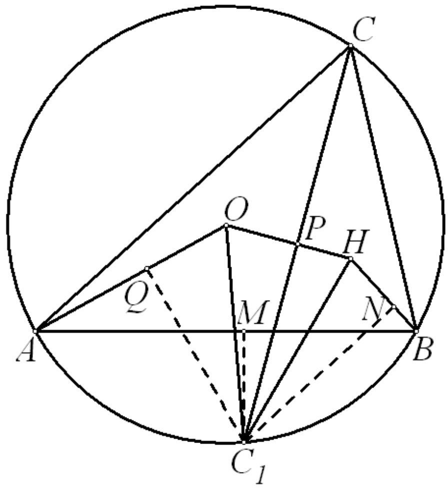
Милен Найденов, Варна



Решение. Нека лицето на триъгълника, образуван от малката основа на трапеца и продълженията на бедрата му, е x. От теоремата на Талес следва пропорцията $\frac{x}{1} = \frac{x+1}{1+\frac{1}{a}}$. Оттук намираме $x = a$. Следователно $a = k^2$ са всички търсени стойности на a, където $k \in \mathbb{N}$.

Задача 3. Точките O и H са съответно центърът на описаната окръжност и ортоцентърът на остроъгълния триъгълник ABC ($BC<AB<AC$). Точката C_1 е симетрична на C относно правата OH. Да се докаже, че ортогоналните проекции на C_1 върху правите, определящи страните на четириъгълника $ABHO$, са върхове на успоредник.

Хаим Хаимов, Варна



Решение: За елементите на триъгълника ще използваме стандартните означения. Освен това нека $\sphericalangle C_1CB = \delta$, $\sphericalangle AOH = \varphi$ и $\sphericalangle OHB = \psi$. Проекциите на точката C_1 върху правите AB, BH, HO и OA означаваме съответно с M, N, P и Q. Лесно се вижда, че $\sphericalangle AOB = 90° - \gamma$, $\sphericalangle ABH = 90° - \alpha$, $\sphericalangle AHB = 180° - \gamma$, $AH = 2R\cos\alpha$, $C_1H = CH = 2R\cos\gamma$. Тъй като $OC_1 = OC = R$, точката C_1 лежи върху описаната окръжност на ΔABC. Затова от синусовата теорема получаваме равенствата $BC_1 = 2R\sin\delta$ и $AC_1 = 2R\sin(\gamma - \delta)$. С помощта на синусовата теорема опреде-

ляме страните на четириъгълника $MNPQ$: $MN = BC_1 \sin\sphericalangle ABH = 2R\sin\delta\cos\alpha$, $PQ = OC_1\sin\sphericalangle AOH = R\sin\varphi$, $PN = C_1H\sin\sphericalangle OHB = 2R\cos\gamma\sin\psi$, $QM = AC_1\sin\sphericalangle OAB = 2R\sin(\gamma-\delta)\cos\psi$. Тъй като $AH\perp BC$ и $OH\perp C_1C$, то $\sphericalangle AHO = \sphericalangle C_1CB = \delta$. Но от синусовата теорема за ΔAOH имаме $\dfrac{OA}{\sin\sphericalangle AHO} = \dfrac{AH}{\sin\sphericalangle AOH} \Rightarrow \dfrac{R}{\sin\delta} = \dfrac{2R\cos\alpha}{\sin\varphi} \Rightarrow R\sin\varphi = 2R\sin\delta\cos\alpha \Rightarrow PQ = MN$.
От друга страна $\psi = \sphericalangle OHB = \sphericalangle AHB + \sphericalangle AHO = 180^\circ - \gamma + \delta$, откъдето намираме $PN = 2R\cos\gamma\sin\psi = 2R\cos\gamma\sin(\gamma-\delta) = QM$. Получените равенства $PQ = MN$ и $PN = QM$ означават, че четириъгълникът $MNPQ$ е успоредник.

Решения на задачите получихме от Анна Златева от Варна.