РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2015

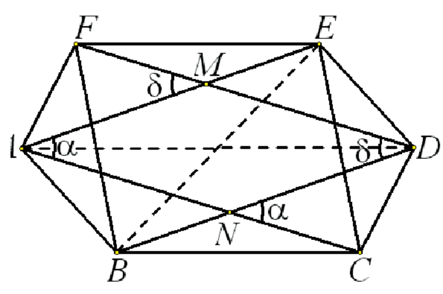
Задача 1. Естествените числа a и b удовлетворяват равенството $9^a = b^2 + 53$. Да се намерят корените на уравнението $ax^2 + bx - \sqrt{a(b+1)} = 0$.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение. Даденото равенство е еквивалентно с $(3^a - b)(3^a + b) = 53$. Тъй като 53 е просто число, то $3^a - b = 1$ и $3^a + b = 53$. След почленно събиране на последните равенства получаваме $2.3^a = 54$. Следователно $3^a = 27$, $3^a = 3^3$, $a = 3$. Оттук и едно от горните равенства получаваме $b = 26$. Сега квадратното уравнение е следното $3x^2 + 26x - 9 = 0$. Неговите корени са $x_1 = -9$ и $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Задача 2. Нека $ABCDEF$ е изпъкнал шестоъгълник, в който поне два от диагоналите, свързващи срещуположни върхове, разполовяват лицето му. Ако S е лицето на шестоъгълника, а S_1 и S_2 са лицата съответно на триъгълниците ACE и BDF, да се докаже, че $S = 2\sqrt{S_1 S_2}$.

Хаим Хаимов, Варна



Решение. Означаваме $\measuredangle EAC$ и $\measuredangle BDF$ съответно с α и δ. Без ограничение можем да считаме, че диагоналите, разполовяващи лицето на шестоъгълника $ABCDEF$, са AD и BE. Тогава $S_{ADEF} = \frac{S}{2}$ и $S_{ABEF} = \frac{S}{2}$. Оттук $S_{ADEF} = S_{ABEF}$. Тъй като $S_{ADEF} = S_{AEF} + S_{ADE}$ и $S_{ABEF} = S_{AEF} + S_{ABE}$, то от последното равенство следва $S_{AEF} + S_{ADE} = S_{AEF} + S_{ABE}$, т.е. $S_{ADE} = S_{ABE}$. Оттук получаваме, че $BD \parallel AE$, което означава, че $\measuredangle AMF = \measuredangle BDF = \delta$ и $\measuredangle DNC = \measuredangle EAC = \alpha$ (вж. чертежа). Сега да запишем желаното равенство във вида $2S_1.2S_2 = S^2$. Като вземем предвид равенствата $2S_1 = 2S_{ACE} = AE.AC.\sin\alpha$ и $2S_2 = 2S_{BDF} = BD.DF.\sin\delta$, последното добива вида $(AE.AC.\sin\alpha).(BD.DF.\sin\delta) = S^2$. Това равенство може да се запише още по следния начин $(AE.DF.\sin\delta).(AC.BD.\sin\alpha)=S^2$. Но $AE.DF.\sin\delta=2S_{ADEF}=2.\frac{S}{2}=S$ и $AC.BD.\sin\alpha=2S_{ABCD}=2.\frac{S}{2}=S$. Оттук следва, че последното равенство е изпълнено, а следователно и това, което трябваше да се докаже. С това задачата е решена.

Задача 3. Основата $ABCD$ на пирамида $MABCD$ е ромб с диагонали $AC=3k$ и $BD=k$ $(k\in\mathbb{R})$. Да се докаже, че ако дължината на околния ръб MA е равна на $2k$, то останалите три околни ръба са страни на правоъгълен триъгълник.

Милен Найденов, Варна

Решение: Нека $AC\cap BD=O$ и $MO=m$. Прилагаме формулата за изразяване на медианата чрез дължините да страните за ΔACM и ΔBDM, след което получаваме съответно равенствата $2AM^2+2CM^2-AC^2=4MO^2$ и $2BM^2+2DM^2-BD^2=4MO^2$. Като вземем предвид условието, тези равенства записваме съответно във вида: $CM^2=2m^2+\frac{k^2}{2}$ и $BM^2+DM^2=2m^2+\frac{k^2}{2}$. Последните две равенства означават, че $BM^2+DM^2=CM^2$. Оттук според теоремата, обратна на Питагоровата теорема, следва, че съществува правоъгълен триъгълник с катети BM и DM и хипотенуза CM.