

## ОБЩ ПОДХОД ЗА УСТАНОВЯВАНЕ НА ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ РАДИУСИ НА ДОПИРАЩИ СЕ ОКРЪЖНОСТИ

<sup>1</sup>Сава Гроздев, <sup>2</sup>Веселин Ненков

<sup>1</sup>Висше училище по застраховане и финанси

<sup>2</sup>Технически колеж – Ловеч

**Резюме.** Разгледана е една обща идея за намиране на зависимости между радиусите на допиращи се окръжности в равнината на даден триъгълник. В основата си тази идея съдържа формулата на Ойлер за разстоянието между центровете на описаната и вписаната окръжност на триъгълника и други връзки между радиусите на тези окръжности. Основните резултати са обединени във формулировката и доказателството на съответна лема.

*Keywords:* triangle, circle, circum-circle, in-circle, Sangaku

**1. Увод.** Много геометрични задачи в равнината на даден триъгълник са свързани с комбинации от окръжности. Такива комбинации често се съдържат в японските теореми „Сангаку“. Някои от тези теореми, публикувани в рубриката „Задачата на броя“ на списание „Математика и информатика“, са следните четири:

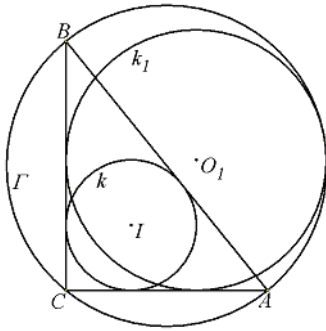
**Теорема 1.** В окръжност  $\Gamma$  е вписан правоъгълен триъгълник. Окръжността  $k_1$  с радиус  $r_1$  се допира до катетите на триъгълника и вътрешно до  $\Gamma$ . Ако вписаната в триъгълника окръжност има радиус  $r$ , то е изпълнено равенството  $r_1 = 2 \cdot r$  (фиг. 1). (Табов, 1990, 1990 а).

**Теорема 2.** Триъгълник  $ABC$  ( $BC < BA$ ) е вписан в окръжност  $\Gamma$ . Точката  $C'$  е от страната  $CA$  и  $BC' = BC$ . Окръжността  $k_1$  с радиус  $r_1$  се допира до раменете на  $\triangle BC'A$  и вътрешно до  $\Gamma$ . Ако вписаната в  $\triangle BC'A$  окръжност  $k_2$  има радиус  $r_2$ , то е изпълнено равенството  $r_1 = 2 \cdot r_2$  (фиг. 2). (Табов, 1998), (Михайлов, 1999).

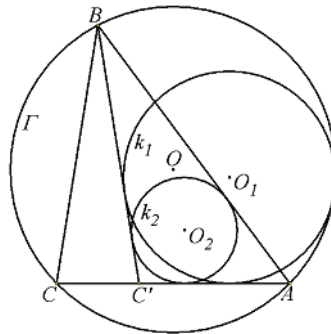
**Теорема 3.** Окръжността  $\Gamma_c$  минава през върховете  $A$  и  $B$  на  $\triangle ABC$  така, че върхът  $C$  да лежи вътре в  $\Gamma_c$ . Точката  $M$  е средата на  $AB$ , а точката  $N$  е средата на дъгата  $\widehat{AB}$ . Окръжността  $k'$  с радиус  $x$  се допира до страните  $AC$  и  $BC$  на  $\triangle ABC$  и вътрешно до  $\Gamma_c$ . Ако  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $MN = d$ , а вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност  $k$  има радиус

$r$ , то е изпълнено равенството  $x = r + \frac{2d(p-a)(p-b)}{cp}$  (фиг. 3). (Табов, 1999), (Цеков, 2000).

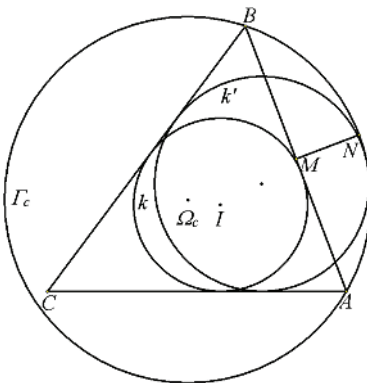
**Теорема 4.** Точките  $A, B, C$  и  $D$  лежат в този ред на окръжност  $\Gamma(O, r)$ , а  $E$  е пресечната точка на  $AC$  и  $BD$ . Окръжността  $k_1(O_1, r_1)$  е вписана в  $\triangle ABE$ , а окръжността  $k_2(O_2, r_2)$  е вписана в  $\triangle CDE$ . Ако окръжността  $k_3(O_3, r_3)$  се допира до отсечките  $AE$  и  $BE$  и до дъгата  $\widehat{AB}$ , а окръжността  $k_4(O_4, r_4)$  се допира до отсечките  $CE$  и  $DE$  и до дъгата  $\widehat{CD}$ , то е изпълнено равенството  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$  (фиг. 4). (Табов, 1999 а), (Антонов, 2000).



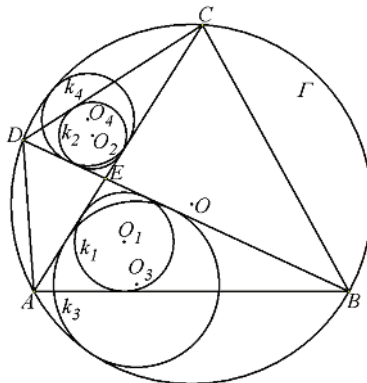
Фигура 1



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

Ако направим известен анализ на конфигурациите от окръжности, които се съдържат във формулираните японски теореми, ще установим, че във всяка тях участва по една окръжност, която минава през поне два върха на триъгълник, и една окръжност, която се допира поне до две от страните на същия триъгълник. Окръжност, която минава през два върха на  $\triangle ABC$ , ще наричаме *полуописана* за  $\triangle ABC$ , а окръжност, която се допира до две от правите  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$ , ще наричаме *полувписана* за  $\triangle ABC$ . Всяка от горните теореми се отнася до полувписани и полуописани окръжности и изисква определена изобретателност, за да се открие съответното ѝ доказателство. Оказва се обаче, че съществува обща идея, която може да се използва при доказване на зависимости между радиуси на окръжности от вида, в който присъстват във формулираните теореми „Сангаку“. Тази идея се съдържа в една основна лема, която дава възможност не само да докажем формулираните четири теореми, но и да покажем интересни обобщения на някои от тях. От своя страна, тези обобщения позволяват да се получат други интересни частни случаи.

Преди да формулираме и докажем въпросната лема, ще се уговорим, че за елементите на даден  $\triangle ABC$  ще използваме стандартните означения за неговите елементи, т.е.  $|BC|=a$ ,  $|CA|=b$ ,  $|AB|=c$ ,  $p = \frac{a+b+c}{2}$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$ ,  $\angle ACB = \gamma$ ,  $R$  – радиус на описаната окръжност,  $r$  – радиус на вписаната окръжност,  $r_a$ ,  $r_b$ ,  $r_c$  – радиуси на външноописаните окръжности, допиращи се съответно до страните  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Освен това центровете на описаната окръжност  $\Gamma$  и на вписаната окръжност  $k$  на  $\triangle ABC$  ще означаваме съответно с  $O$  и  $I$ .

**2. Основна помощна теорема.** Едно общо твърдение, което свързва радиусите на допиращи се полуописани и полуописани окръжности за даден  $\triangle ABC$ , ще докажем в следващата лема. Тази лема се намира в основата на всички следващи доказателства и я формулираме по следния начин:

**Лема.** *Окръжност  $\Gamma_c(\Omega_c, R_c)$  минава през върховете  $A$  и  $B$  на даден триъгълник  $ABC$ , описаната окръжност на който има за център точката  $O$ . Ако окръжността  $k_c(O_c, \rho_c)$  се допира до правите  $AC$  и  $BC$  и до  $\Gamma_c(\Omega_c, R_c)$ , то е изпълнено равенството:*

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c^2 - \\
 (*) \quad & -\epsilon' \left[ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left( r \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} T \right) + 2\epsilon \epsilon' R_c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right] \rho_c + \\
 & + r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} (r \cos \gamma - T) = 0,
 \end{aligned}$$



Доказателството ще проведем в следната последователност:

1) От правоъгълните триъгълници  $AII$ ,  $CIN$  и  $CO_1N_1$  се получават съответно следващите три равенства:

$$(1) \quad AI = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad CI = \frac{r}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad CO_c = \frac{\rho_c}{\sin \frac{\gamma}{2}}.$$

2) От правоъгълните триъгълници  $AMO$  и  $AM\Omega_c$  и синусовата теорема за  $\Delta ABC$  получаваме съответно следващите две равенства:

$$(2) \quad OM^2 = R^2 - \frac{c^2}{4} = R^2 \cos \gamma, \quad \Omega_c M^2 = R_c^2 - \frac{c^2}{4} = R_c^2 - R^2 \sin^2 \gamma.$$

3) Тъй като  $ML = \frac{|a-b|}{2}$ , от правоъгълния триъгълник  $MIL$  получаваме

$$(3) \quad IM^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + r^2.$$

4) Нека  $\Omega_c \neq M$  и  $\angle IMO_c = \psi$ . Ако  $O \neq M$ , то  $\angle IMO = \psi$ , когато  $O$  и  $\Omega_c$  са от една и съща страна на  $M$  или  $\Omega_c \equiv O$  и  $\angle IMO = \pi - \psi$ , когато  $O$  и  $\Omega_c$  са от различни страни на  $M$ . От косинусовата теорема за  $\Delta IOM$  имаме  $IO^2 = IM^2 + OM^2 - 2\varepsilon_1 \cdot OM \cdot IM \cdot \cos \psi$ , където  $\varepsilon_1 = 1$ , ако  $\angle IMO = \psi$  и  $\varepsilon_1 = -1$ , ако  $\angle IMO = \pi - \psi$ . Сега, след заместване в последното равенство на (3), на второто равенство от (2) и използване на формулата на Ойлер  $OI^2 = R^2 - 2Rr$ , формулите

$$(4) \quad (p-a)(p-b) = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2},$$

$$(5) \quad r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$$

получаваме последователно равенствата:

$$\begin{aligned} IM \cdot \cos \psi &= \varepsilon_1 \frac{OM^2 + IM^2 - OI^2}{2 \cdot OM} = \varepsilon_1 \frac{-(p-a)(p-b) + r^2 + 2Rr}{2R|\cos \gamma|} = \varepsilon_1 \frac{-r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + r^2 + 2Rr}{2R|\cos \gamma|} = \\ &= \varepsilon_1 \frac{-r^2 \sin \frac{\gamma}{2} + 2Rr \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{2R|\cos \gamma| \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \varepsilon_1 \frac{-r^2 \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{r^2}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}}{2R|\cos \gamma| \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} = \varepsilon_1 \frac{r^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)}{4R|\cos \gamma| \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = \\ &= \varepsilon_1 \frac{r^2 \cos \gamma}{r|\cos \gamma|} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 r, \end{aligned}$$

където  $\varepsilon_2 = 1$ , когато  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  и  $\varepsilon_2 = -1$ , когато  $\gamma > \frac{\pi}{2}$ .

Ако  $O \equiv M$ , то  $\psi = \frac{\pi}{2} - \angle AMI$ , когато  $\Omega_c$  и  $C$  са в една и съща полуравнина спрямо  $AB$ , и  $\psi = \frac{\pi}{2} - \angle AMI$ , когато  $\Omega_c$  и  $C$  са в различни полуравнини спрямо  $AB$ .

От синусовата теорема за  $\triangle AMI$  получаваме равенството  $\frac{\sin \angle AMI}{AI} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{IM}$ , което, комбинирано с първото равенство (1), води до  $IM \cos \psi = \varepsilon_2 r$ . В този случай полагаме  $\varepsilon_1 = 1$ . Така получаваме, че при произволно положение на  $O$  в равнината на  $\triangle ABC$  е изпълнено равенството

$$(6) \quad IM \cos \psi = \varepsilon_1 \varepsilon_2 r.$$

5) Ако  $\Omega_c \neq M$ , то от (3), (6), второто равенство от (2) и косинусовата теорема за  $\triangle I\Omega_c M$  се получава равенството

$$(7) \quad I\Omega_c^2 = r^2 + R_c^2 - (p-a)(p-b) - 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 r \sqrt{R_c^2 - R^2 \sin^2 \gamma}.$$

Ако  $\Omega_c \equiv M$ , то  $R_c = \frac{c}{2}$  и подкоренната величина в (7) е равна на нула. Освен това от правоъгълния триъгълник  $ILM$  и (3) следва  $I\Omega_c^2 = IM^2 = IL^2 + ML^2 = r^2 + \frac{(a-b)^2}{4}$ .

$$\text{От друга страна, } R_c^2 - (p-a)(p-b) = \frac{c^2}{4} - (p-a)(p-b) = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Следователно равенството (7) е в сила и когато  $\Omega_c \equiv M$ . Това означава, че равенството (7) е изпълнено при всички положения на  $\Omega_c$  в равнината на  $\triangle ABC$ .

6) Нека  $\Omega_c \neq M$  и  $\angle CM\Omega_c = \vartheta$ . Ако  $O \neq M$ , то  $\angle CMO = \vartheta$ , когато  $O$  и  $\Omega_c$  са от една и съща страна на  $M$ , или  $\Omega_c \equiv O$  и  $\angle CMO = \pi - \vartheta$ , когато  $O$  и  $\Omega_c$  са от различни страни на  $M$ . От косинусовата теорема за  $\triangle CMO$  имаме  $CO^2 = CM^2 + OM^2 - 2\varepsilon_1 \cdot OM \cdot CM \cdot \cos \vartheta$ , където  $\varepsilon_1 = 1$ , ако  $\angle CMO = \vartheta$  и  $\varepsilon_1 = -1$ , ако  $\angle CMO = \pi - \vartheta$ . Сега, след заместване в последното равенство на първото равенство от (2) и използване на известните формули

$$(8) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma,$$

$$(9) \quad CM^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2),$$

както в 4) получаваме равенството:

$$(10) \quad CM \cdot \cos \vartheta = 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 R \sin \alpha \sin \beta,$$

където  $\varepsilon_2 = 1$ , когато  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  и  $\varepsilon_2 = -1$ , когато  $\gamma > \frac{\pi}{2}$ .

Ако  $O \equiv M$ , то  $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \angle AMC$ , когато  $\Omega_c$  и  $C$  са в една и съща полуравнина спрямо  $AB$ , и  $\vartheta = \frac{\pi}{2} + \angle AMC$ , когато  $\Omega_c$  и  $C$  са в различни полуравнини спрямо  $AB$ . От синусовата теорема за  $\triangle AMC$  получаваме равенството  $\frac{\sin \angle AMC}{AC} = \frac{\sin \alpha}{CM}$ , което, комбинирано със синусовата теорема  $AC = 2R \sin \beta$  за  $\triangle ABC$ , води до  $CM \cos \vartheta = 2\epsilon_2 R \sin \alpha \sin \beta$ . В този случай полагаме  $\epsilon_1 = 1$  и отново се получава равенството (10). Следователно (10) е изпълнено при произволно положение на  $O$  в равнината на  $\triangle ABC$ .

7) Ако  $\Omega_c \neq M$ , то от (8), (9), (10), второто равенство от (2), синусовата теорема за  $\triangle ABC$  и косинусовата теорема за  $\triangle C\Omega_c M$  се получава равенството

$$(11) \quad C\Omega_c^2 = R_c^2 + 4R^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - 4\epsilon_1 \epsilon_2 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{R_c^2 - R^2 \sin \gamma}.$$

Ако  $\Omega_c \equiv M$ , то  $R_c = \frac{c}{2}$  и подкоренната величина в (7) е равна на нула. Освен това от (8), (9) и синусовата теорема за  $\triangle ABC$  следва  $C\Omega_c^2 = CM^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = R_c^2 + 4R^2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$ . Следователно равенството (11) е в сила и когато  $\Omega_c \equiv M$ . Трябва да се отбележи и случаят, при който  $\Omega_c \equiv C$ . Това означава, че равенството (11) е изпълнено при всички положения на  $\Omega_c$  в равнината на  $\triangle ABC$ .

8) Нека  $\angle IC\Omega_c = \varphi$ . Тогава  $\angle O_c C \Omega_c = \varphi$ , ако точката  $O_c$  лежи в  $\angle ACB$  и  $\angle O_c C \Omega_c = \pi - \varphi$ , ако точката  $O_c$  лежи в ъгъла, противоположен на  $\angle ACB$ . От косинусовата теорема за триъгълниците  $CI\Omega_c$  и  $CO_1\Omega_c$  се получават съответно равенствата  $I\Omega_c^2 = CI^2 + C\Omega_c^2 - 2.CI.C\Omega_c^2 \cdot \cos \varphi$  и  $O_c\Omega_c^2 = CO_1^2 + C\Omega_c^2 - 2.\epsilon'.CO_1.C\Omega_c \cos \varphi$ , където  $\epsilon' = 1$ , ако  $\angle O_c C \Omega_c = \varphi$  и  $\epsilon' = -1$ , ако  $\angle O_c C \Omega_c = \pi - \varphi$ . След елиминиране на  $\cos \varphi$  от последните равенства получаваме

$$(12) \quad CI.O_c\Omega_c^2 - \epsilon'.CO_c.I\Omega_c^2 = (C\Omega_c^2 - \epsilon'.CO_c.CI)(CI - \epsilon'.CO_c).$$

9) Разстоянието между  $O_c$  и  $\Omega_c$  се намира по формулата

$$(13) \quad O_c\Omega_c = R_c + \epsilon''.\rho_c, \text{ където } \epsilon'' = 1, \text{ когато } k_c \text{ се допира външно до } \Gamma_c, \text{ и } \epsilon'' = -1, \text{ когато } k_c \text{ се допира вътрешно до } \Gamma_c.$$

Заместваме (1), (5), (7), (11) и (13) в (12) и след известни преобразувания получаваме равенството

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c^2 - \varepsilon' \left[ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left( r \cos^2 \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2} T \right) + 2\varepsilon \varepsilon'' R_c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right] \rho_c + r \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} (r \cos \gamma - T) = 0,$$

където  $T = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sqrt{16 R_c^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2} - r^2 \sin^2 \gamma}$ .

С това лемата е напълно доказана.

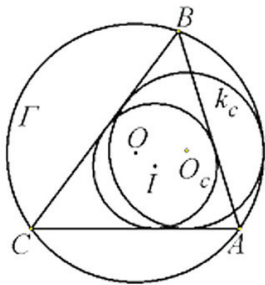
**3. Полуписани окръжности, допиращи се до описаната окръжност на триъгълника.** Общността, която се съдържа във формулировката на лемата, позволява в теорема 1 да заменим правоъгълния триъгълник с произволен. Тогава в лемата имаме  $\Gamma_c \equiv \Gamma$ ,  $\Omega_c \equiv O$ ,  $R_c = R$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon' = 1$ ,  $\varepsilon'' = -1$ . От (5) получаваме, че  $T = r \varepsilon_2 |\cos \gamma| = r \cos \gamma$ . Сега от лемата след елементарни преобразувания следва равенството  $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c^2 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} r \rho_c = 0$ . Единственото решение на това уравнение, което има геометричен смисъл, е  $\rho_c = \frac{r}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}$ . Така получаваме обобщение на теорема 1, което е съдържанието на следната

**Теорема 5.** Ако  $ABC$  е произволен триъгълник, а окръжността  $k_c$  с радиус  $\rho_c$  се допира до страните  $AC$  и  $BC$  и вътрешно до описаната около  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$ , то е изпълнено равенството  $\rho_c = \frac{r}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}$  (фиг. 6). (Ненков, 1991).

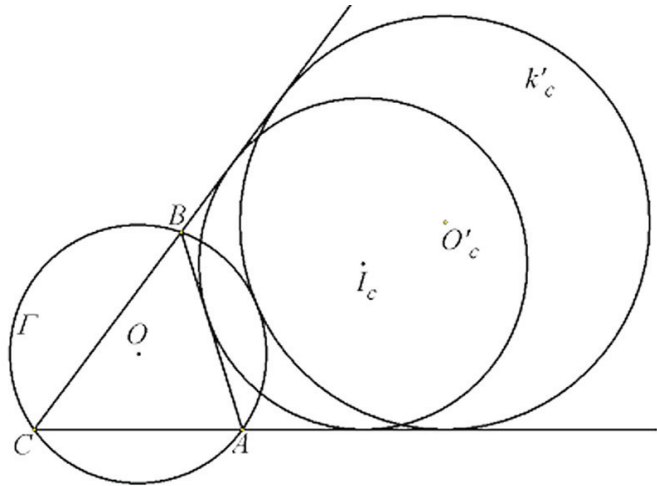
Ако в теорема 5 заменим вътрешнодопиращата се до  $\Gamma$  окръжност  $k_c(O_c, \rho_c)$  с външнодопираща се окръжност  $k'_c(O'_c, \rho'_c)$ , в лемата имаме  $\Gamma_c \equiv \Gamma$ ,  $R_c = R$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$ . От (5) отново получаваме, че  $T = r \varepsilon_2 |\cos \gamma| = r \cos \gamma$ . Сега от лемата след елементарни преобразувания следва равенството  $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c'^2 - \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} r \rho_c' = 0$ . Като вземем предвид, че е изпълнено равенството  $r_c = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$ , получаваме  $\cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c'^2 - r_c \rho_c' = 0$ . Единственото решение на това уравнение, което има геометричен смисъл, е  $\rho_c' = \frac{r_c}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}$ . Така получаваме и следната



**Теорема 6.** Ако  $ABC$  е произволен триъгълник, а окръжността  $k_c$  с радиус  $\rho'_c$  се допира до раменете на  $\angle ACB$  и външно до описаната около  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$ , то е изпълнено равенството  $\rho'_c = \frac{r_c}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}$  (фиг. 7). (Ненков, 1991).



Фигура 6



Фигура 7

От теорема 6 при  $\gamma = \frac{\pi}{2}$  и  $\gamma = \frac{\pi}{3}$  се получават съответно равенствата  $\rho'_c = 2r_c$  и  $\rho'_c = \frac{4}{3}r_c$ . Първото от тези равенства е аналог на теорема 1.

**4. Полуописани окръжности, породени от върхови секущи на триъгълника.** Втората японска теорема се отнася до окръжност, която е полуописана в  $\Delta BC'A$ , който, от своя страна, е част от дадения  $\Delta ABC$ . Допълнението на  $\Delta BC'A$  до  $\Delta ABC$  е равнобедреният триъгълник  $CC'B$ , за който  $\angle BCC' = \pi - 2\gamma$ . Тук можем да разгледаме по-общия случай, в който  $\angle BCC' = \omega$  и  $0 \leq \omega < \beta$ . Тогава ъглите на  $\Delta BC'A$  са  $\angle C'AB = \alpha$ ,  $\angle ACC' = \beta - \omega$  и  $\angle BC'C = \gamma + \omega$ .

Означаваме вписаната в  $\Delta BC'A$  окръжност с  $k(\omega)$ , а нейния радиус с  $\rho(\omega)$ . Разглеждаме окръжностите  $k_c(\omega)$  и  $k'_c(\omega)$ , допиращи се съответно вътрешно и външно до  $\Gamma$  и до раменете на  $\angle AC'B$  (фиг. 8, 9). Радиусите на  $k_c(\omega)$  и  $k'_c(\omega)$  означаваме съответно с  $\rho_c(\omega)$  и  $\rho'_c(\omega)$ .

От синусовата теорема за  $\Delta BC'A$  се получават равенствата  $C'A = \frac{\sin(\beta - \omega)}{\sin(\gamma + \omega)} \cdot c$ ,  $BC' = \frac{\sin \alpha}{\sin(\gamma + \omega)} \cdot c$ . Освен това от синусовата теорема за  $\Delta ABC$  имаме  $c = 2R \sin \gamma$ .

От тези три равенства за полупериметъра  $p' = \frac{BC' + C'A + AB}{2}$  на  $\Delta BC'A$  намираме  $p' = 2R \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \omega}{2} \sin \gamma}{\sin \frac{\gamma + \omega}{2}}$ . От друга страна, от геометрията на триъгълника е известно, че за  $p'$  е изпълнено равенството  $p' = \rho(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \omega}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma + \omega}{2}$ . Сега от последните две равенства получаваме

$$(14) \quad R = \frac{\rho(\omega) \cdot \cos \frac{\gamma + \omega}{2}}{2 \sin \gamma \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta - \gamma}{2}}.$$

Прилагаме лемата за  $\Delta BC'A$  при  $\Gamma_c \equiv \Gamma$ ,  $\Omega_c \equiv O$ ,  $R_c = R$ ,  $r = \rho(\omega)$ . От (5) и (14) получаваме, че  $T = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot \rho(\omega) \sin(\gamma + \omega) |\operatorname{ctg} \gamma| = \rho(\omega) \sin(\gamma + \omega) \operatorname{ctg} \gamma$ . Разглеждаме случаите за окръжностите  $k_c(\omega)$  и  $k'_c(\omega)$  едновременно. Затова с  $t$  ще означаваме общо радиусите на тези окръжности. Сега заместваем в (\*) и след елементарни преобразувания получаваме квадратното относно  $t$  уравнение

$$(15) \quad \begin{aligned} & \sin \frac{\beta - \omega}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \gamma \cos^2 \frac{\gamma + \omega}{2} t^2 - \\ & - \varepsilon' \cos \frac{\gamma + \omega}{2} \left( \cos \frac{\beta - \alpha - \omega}{2} \cdot \sin \frac{\gamma - \omega}{2} + \varepsilon \varepsilon'' \sin^2 \frac{\gamma + \omega}{2} \right) \rho(\omega) t - \\ & - \cos \frac{\beta - \omega}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \omega \rho(\omega) = 0. \end{aligned}$$

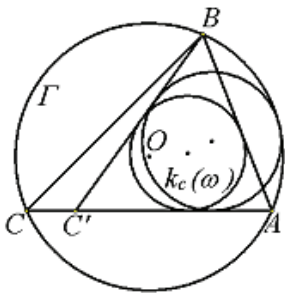
Сега да отбележим, че са изпълнени следните равенства:

$$(16) \quad \begin{aligned} & \cos \frac{\beta - \alpha - \omega}{2} \cdot \sin \frac{\gamma - \omega}{2} - \sin^2 \frac{\gamma + \omega}{2} = \\ & = 2 \cdot \left( \sin \frac{\beta - \omega}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\omega}{2} - \cos \frac{\beta - \omega}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right), \end{aligned}$$

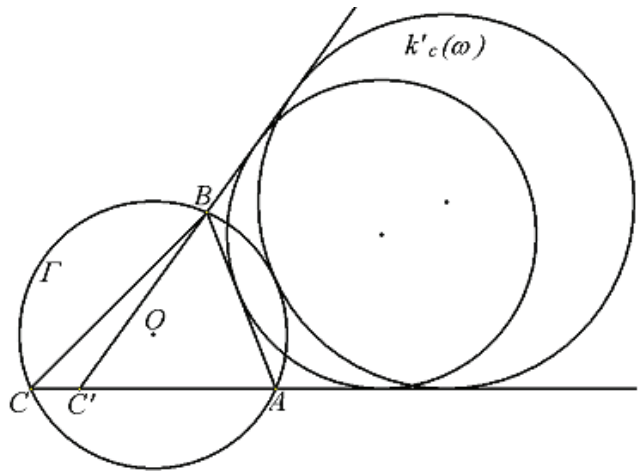
$$(17) \quad \begin{aligned} & \cos \frac{\beta - \alpha - \omega}{2} \cdot \sin \frac{\gamma - \omega}{2} - \sin^2 \frac{\gamma + \omega}{2} = \\ & = 2 \cdot \left( \cos \frac{\beta - \omega}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\omega}{2} - \sin \frac{\beta - \omega}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

За окръжността  $k_c(\omega)$  имаме  $\varepsilon' = 1$ ,  $\varepsilon'' = -1$  и  $t = \rho_c(\omega)$ . Като вземем предвид равенството (16), установяваме, че единственото решение на уравнението (15), което има геометричен смисъл, е  $\rho_c(\omega) = \frac{\rho(\omega) \cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \omega}{2}}$ . Така получаваме обобщение на теорема 1, което е съдържанието на следната

**Теорема 7.** Точката  $C'$  от страната  $CA$  на  $\Delta ABC$  е такава, че  $\angle CBC' = \omega$  ( $0 \leq \omega < \beta$ ). Окръжността  $k_c(\omega)$  с радиус  $\rho_c(\omega)$  се допира до раменете на  $\angle BC'A$  и вътрешно до описаната около  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$ . Ако радиусът на вписаната в  $\Delta ABC'$  окръжност е  $\rho(\omega)$ , то е изпълнено равенството  $\rho_c(\omega) = \frac{\rho(\omega) \cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \omega}{2}}$  (фиг. 8).



Фигура 8



Фигура 9

За окръжността  $k'_c(\omega)$  имаме  $\varepsilon' = 1$ ,  $\varepsilon'' = 1$  и  $t = \rho'_c(\omega)$ . Като вземем предвид равенството (17), установяваме, че единственото решение на уравнението (15), което има геометричен смисъл, е

$$\rho'_c(\omega) = \frac{\rho(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \omega}{2}}.$$

Ако радиусът на външнописаната за  $\Delta ABC'$  окръжност, която се допира до страната му  $AB$ , е  $\bar{\rho}(\omega)$ , то от геометрията на триъгълника е известно, че  $\bar{\rho}(\omega) = \rho(\omega) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \omega}{2}$ . Така получаваме следната

**Теорема 8.** Точката  $C'$  от страната  $CA$  на  $\Delta ABC$  е такава, че  $\angle CBC' = \omega$  ( $0 \leq \omega < \beta$ ). Окръжността  $k'_c(\omega)$  с радиус  $\rho'_c(\omega)$  се допира до раменете на  $\angle BC'A$  и външно до описаната около  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$ . Ако радиусът на външнописаната за  $\Delta ABC'$  окръжност, която се допира до страната му  $AB$ , е  $\bar{\rho}(\omega)$ , то е изпълнено равенството 
$$\rho'_c(\omega) = \frac{\bar{\rho}(\omega) \cos \frac{\omega}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \omega}{2}} \quad (\text{фиг. 9}).$$

Сега теорема 2 лесно се получава като частен случай на теорема 7 при  $\omega = \pi - 2\gamma$ . Интересно е обаче да се отбележи, че има друг случай, в който  $\Delta CC'B$  е равнобедрен. Това се случва, когато  $CC' = BC'$ , т.е. когато  $\angle CBC' = \omega = \gamma$ . В този случай от теорема 7 получаваме следното

**Следствие 1.** Ако  $C'$  е такава точка от страната  $CA$ , че  $BC' = BC$ , то 
$$\rho'_c(\omega) = \frac{\rho(\omega)}{\cos \gamma}.$$

Аналогично от теорема 8 се получават аналози на теорема 2 и следствие 1, които формулираме по следния начин.

**Следствие 2.** Ако  $C'$  е такава точка от страната  $CA$ , че  $BC' = BC$ , то 
$$\rho'_c(\omega) = 2\bar{\rho}(\omega).$$

**Следствие 3.** Ако  $C'$  е такава точка от страната  $CA$ , че  $CC' = BC'$ , то 
$$\rho'_c(\omega) = \frac{\bar{\rho}(\omega)}{\cos \gamma}.$$

Освен формулираните следствия трябва да се отбележи, че теореми 5 и 6 се получават като частни случаи съответно на теореми 7 и 8 при  $\omega = 0$ .

**5. Няколко връзки между допиращи се полуописани и полувписани окръжности.** Като се вземе предвид особеното положение на върха  $C$  в теорема 4, тя може се включи в един от случаите на основната лема. Това ни дава основание да обобщим теорема 4 и за останалите случаи, които не присъстват в нейната формулировка. Обобщението на Сангаку теоремата изглежда по следния начин:

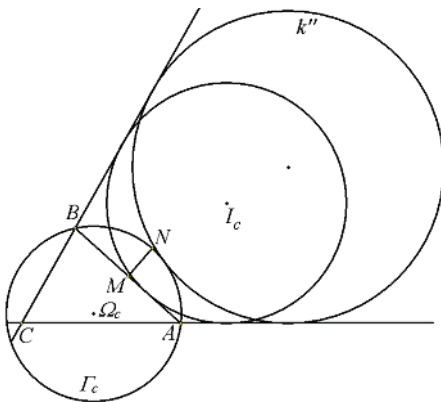
**Теорема 9.** Окръжността  $\Gamma_c$  минава през върховете  $A$  и  $B$  на  $\triangle ABC$  така, че върхът  $C$  да лежи вътре в  $\Gamma_c$ . Точката  $M$  е средата на  $\angle AB$ , а точката  $N$  е средата на дъгата  $\widehat{AB}$ , като  $MN = d$ . Тогава

а) ако окръжността  $k'$  с радиус  $x$  се допира до раменете на  $\angle ACB$  и вътрешно до  $\Gamma_c$ , то  $x = r_c + \frac{2d(p-a)(p-b)}{cp}$  (фиг. 3);

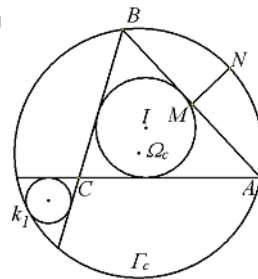
б) ако окръжността  $k''$  с радиус  $y$  се допира до раменете на  $\angle ACB$  и външно до  $\Gamma_c$ , то  $y = r_c + \frac{2d(p-a)(p-b)}{c(p-c)}$  (фиг. 10);

в) ако окръжността  $k_1$  с радиус  $u$  се допира до раменете на ъгъла, противоположен на  $\angle ACB$ , и вътрешно до  $\Gamma_c$ , то  $u = -r_c + \frac{c(p-a)(p-b)}{2dp}$  (фиг. 11);

г) ако окръжността  $k_2$  с радиус  $v$  се допира до раменете на ъгъла, противоположен на  $\angle ACB$ , и външно до  $\Gamma_c$ , то  $v = -r_c + \frac{c(p-a)(p-b)}{2d(p-c)}$  (фиг. 12).



Фигура 10



Фигура 11

От метричната зависимост между пресичащи се хорди в окръжност, приложена за диаметъра през  $M$  и хордата  $AB$  в окръжността  $\Gamma_c$ , се получава равенството

$$R_c = \frac{c^2 + 4d^2}{8d} \text{ (фиг. 3).}$$

Оттук и синусовата теорема за  $\Delta ABC$  следва  $R_c = \frac{R \sin^2 \gamma + d^2}{2d}$ .

Сега за израза  $T$  в лемата намираме

$$T = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 |R^2 \sin \gamma - d^2| r}{2Rd} = \frac{(R^2 \sin \gamma - d^2) r}{2Rd}.$$

Ще използваме  $t$  като общо означение за радиусите  $x$  и  $y$  на окръжностите  $k'$  и  $k_2$ . Заместваме намерените изрази за  $R_c$ ,  $T$  и  $\varepsilon' \varepsilon'' = -1$  в (\*) и след елементарни преобразувания получаваме квадратното относно  $t$  уравнение

$$2Rd \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} t^2 - \\ - \varepsilon' r \left[ d \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left( d + 2R \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) + 2R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \left( d - 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) \right] t + \\ + r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \left( d + 2R \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right) \left( d - 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) = 0.$$

Решенията на това уравнение са следните:  $t_1 = \varepsilon' \left( r + \frac{rd}{2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right)$  и

$$t_2 = \varepsilon' \frac{r}{d} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \left( d - 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) = \varepsilon' \frac{r_c}{d} \left( d - 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2} \right) \text{ (тъй като } r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = r_c \text{).}$$

Ако  $N'$  е средата на дъгата  $\widehat{AB}$  от описаната за  $\Delta ABC$  окръжност  $\Gamma$ , то  $d' = MN' > MN = d$  и  $d' = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$  ( $C$  лежи в  $\Gamma_c$ ). Тогава  $d - 2R \sin^2 \frac{\gamma}{2} = d - d' < 0$ . Когато  $\varepsilon' = 1$ , получаваме, че  $t_1 > 0$  и  $t_2 < 0$ . Следователно вътрешнодопиращата се до  $\Gamma_c$  окръжност  $k'$  има радиус  $x = t_1$ . Като вземем предвид формулите на Ойлер, изразяващи тригонометричните функции на ъглите на  $\Delta ABC$  чрез страните му, и равенството (5), получаваме  $x = r + \frac{2d(p-a)(p-b)}{cp}$ . Когато  $\varepsilon' = -1$ , получаваме, че  $t_1 < 0$  и  $t_2 > 0$ . Следователно външнодопиращата се до  $\Gamma_c$  окръжност  $k_2$  има радиус  $y = t_2$ . Както в предишния случай получаваме  $y = -r_c + \frac{c(p-a)(p-b)}{2d(p-c)}$ . Така доказахме твърдения а) и г) на теорема 9.

Нека сега  $z$  е общо означение за радиусите  $y$  и  $u$  на окръжностите  $k''$  и  $k_1$ . Заместваме изразите за  $R_c$ ,  $T$  и  $\varepsilon' \varepsilon'' = 1$  в (\*) и след елементарни преобразувания получаваме квадратното относно  $z$  уравнение

Корените на това уравнение са следните

$$z_1 = \varepsilon' \left( r - \frac{rR \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{2d} \right) \text{ и } z_2 = \varepsilon' r \cdot \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{ctg} \frac{\beta}{2} \left( 1 + \frac{d}{2R \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \right) = \varepsilon' \left( r_c + \frac{dr \text{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{ctg} \frac{\beta}{2}}{2R \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \right).$$

Както в предишния случай намираме, че ако  $\varepsilon' = -1$ , то

$$u = z_1 = -r + \frac{c(p-a)(p-b)}{2dp}, \text{ а при } \varepsilon' = 1 \text{ имаме } y = z_2 = r_c + \frac{2d(p-a)(p-b)}{c(p-c)}.$$

С това теорема 9 е напълно доказана, като нейното твърдение а) съвпада с теорема 3.

**6. Доказателство на теорема 4.** Сега, като използваме основно съдържанието на две от твърденията на теорема 9, ще покажем едно доказателство на Сангаку твърдението, формулирано в началото като теоремата 4.

Пресечната точка на хордите  $AC$  и  $BD$  означаваме с  $E$  (фиг. 3). Нека  $p_{ab}$  и  $p_{cd}$  са полупериметрите съответно на триъгълниците  $ABE$  и  $CDE$ . Освен това с  $d_{ab}$  означаваме разстоянието между средата на по-малката дъга  $\widehat{AB}$  и средата на отсечката  $AB$ , а с  $d_{cd}$  – разстоянието между средата на по-малката дъга  $\widehat{CD}$  и средата на отсечката  $CD$ .

От твърдения а) и в) на теорема 9, приложени към  $\triangle ABE$ , следват съответно равенствата:  $r_3 = r_1 + \frac{2 \cdot d(p_{ab} - |BE|)(p_{ab} - |AE|)}{c \cdot p_{ab}}$  и  $r_4 = -r_1 + \frac{c \cdot (p_{ab} - |BE|)(p_{ab} - |AE|)}{2 \cdot d \cdot p_{ab}}$ .

Оттук получаваме, че е изпълнено следното равенство:

$$(18) \quad (r_3 - r_1)(r_4 + r_1) = (p_{ab} - |BE|)^2 (p_{ab} - |AE|)^2.$$

Тъй като  $\triangle CDE \sim \triangle BAE$ , то  $\frac{|CE|}{|BE|} = \frac{|DE|}{|AE|} = \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{p_{cd}}{p_{ab}} = \frac{r_2}{r_1}$ .

Сега твърдения а) и в) на теорема 9, приложени към  $\triangle CDE$ , водят съответно до равенствата:

$$r_3 = -r_2 + \frac{|CD|(p_{cd} - |CE|)(p_{cd} - |DE|)}{2d'p_{cd}} = -r_2 + \frac{r_2^2(p_{ab} - |AE|)(p_{ab} - |BE|)}{r_1^2 d'p_{ab}},$$

$$r_4 = r_2 + \frac{2d'(p_{cd} - |CE|)(p_{cd} - |DE|)}{|CD|p_{cd}} = r_2 + \frac{d'r_2^2(p_{ab} - |AE|)(p_{ab} - |BE|)}{2r_1^2 p_{ab}}.$$

От последните две равенства получаваме следната зависимост:

$$(19) \quad (r_4 - r_2)(r_3 + r_2) = \frac{r_2^2}{r_1^2} (p_{ab} - |BE|)^2 (p_{ab} - |AE|)^2.$$

След почленно деление на (19) и (18) се получава

$$r_1^2 (r_4 - r_2)(r_3 + r_2) = r_2^2 (r_4 + r_1)(r_3 - r_1). \text{ След известни преобразувания на}$$

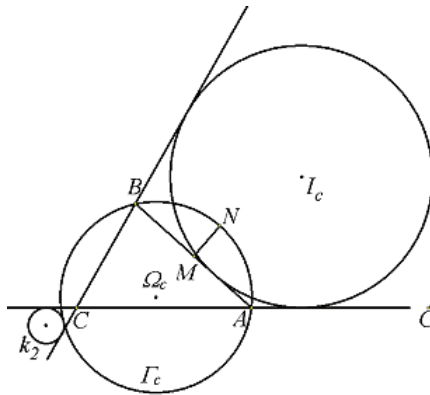
последното равенство получаваме  $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}.$

С това теорема 4 е доказана с помощта на теорема 9.

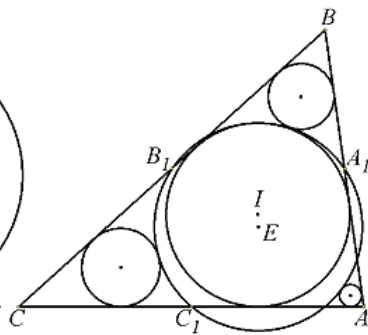
**7. Полуписани окръжности, допиращи се до Ойлеровата окръжност на триъгълника.** Сега ще разгледаме едно твърдение, което е в стила на теоремите Сангаку. В него основната лема се прилага три пъти. Това твърдение се формулира по следния начин.

**Теорема 10.** *Ако всяка от трите окръжности  $k_a(\rho_a)$ ,  $k_b(\rho_b)$ ,  $k_c(\rho_c)$  се допира до две от страните на  $\triangle ABC$  и външно до Ойлеровата му окръжност (фиг. 13), то е изпълнено равенството:*

$$(20) \quad \sqrt{(r - 2\rho_b)(r - 2\rho_c)} + \sqrt{(r - 2\rho_c)(r - 2\rho_a)} + \sqrt{(r - 2\rho_a)(r - 2\rho_b)} = r.$$



Фигура 12



Фигура 13

Нека точките  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  са средите съответно на страните  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$



(фиг. 13), а  $k_c(\rho_c)$  се допира до страните  $AC$  и  $BC$ . Прилагаме лемата за  $\Delta A_1B_1C$ , Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$  и  $k_c(\rho_c)$ . Тъй като  $\Delta A_1B_1C$  е хомотетичен на  $\Delta ABC$  с коефициент на хомотетия  $-\frac{1}{2}$ , то в лемата заместваме  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $R_c$  и  $r$  съответно с  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\frac{R}{2}$  и  $\frac{r}{2}$ . Освен това, тъй като  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  и  $k_c(\rho_c)$  се допира до Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$ , то  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon' = \varepsilon'' = 1$ .

Сега от равенството (\*) след известни преобразувания получаваме

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c^2 - \left( 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \gamma \right) r \rho_c + r^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \gamma = 0$$

В това равенство заместваме  $r = r_c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$  и го преобразуваме до следното равенство:

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \rho_c^2 - \left( 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \gamma \right) r_c \rho_c + r_c^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \gamma = 0$$

Последното равенство, разглеждано като уравнение относно  $\rho_c$ , има следните решения:  $\rho'_c = r_c$  и  $\rho''_c = \frac{r_c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cos \gamma}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = -\frac{\cos \gamma}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} r_c$ .

Следователно съществуват две окръжности  $k'_c(\rho'_c)$  и  $k''_c(\rho''_c)$ , допиращи се до раменете на  $\angle ACB$  и външно до Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$ .

Тъй като  $\rho'_c = r_c$ , то  $k'_c(\rho'_c)$  е външно вписана окръжност за  $\Delta ABC$ , която се допира до продълженията на страните  $AC$  и  $BC$ . Следователно  $k_c(\rho_c) \neq k'_c(\rho'_c)$ . (Току-що покажахме, че външно вписаната окръжност  $\Delta ABC$ , допираща се до страната му  $AB$ , се допира до Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$ . По същия начин при  $\varepsilon'' = -1$  се показва, че вписаната в  $\Delta ABC$  окръжност също се допира до Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$ . Така получаваме още едно доказателство на известната теорема на Фойербах, която твърди, че вписаната и външно вписаните окръжности на даден триъгълник се допират до Ойлеровата окръжност на  $\Delta ABC$ .)

От друга страна, тъй като  $\frac{\cos \gamma}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}} = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{2\rho''_c}{r}$ , то  $2\rho''_c < r$ , т.е.  $k''_c(\rho''_c)$  се съдържа в криволинейния триъгълник, образуван от страните  $AC$  и  $BC$  и вписаната окръжност  $k(r)$ . Следователно  $k_c(\rho_c) \equiv k''_c(\rho''_c)$  и  $\rho_c \equiv \rho''_c$ , т.е.  $\rho_c = \frac{\cos \gamma}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} r$ . (Ако  $\gamma > \frac{\gamma}{2}$  и  $k_c(\rho_c)$  е окръжността, допираща

се до раменете на ъгъла, противоположен на  $\angle ACB$  и вътрешно до Ойлеровата окръжност на  $\triangle ABC$ , то по същия начин се показва, че  $\rho_c = -\frac{\cos \gamma}{2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} r$ .

Сега от израза за  $\rho_c$  получаваме  $tg^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{r - 2\rho_c}{r}$ .

Ако  $k_a(\rho_a)$  се допира до страните  $CA$  и  $BA$ , а  $k_b(\rho_b)$  се допира до страните  $AB$  и  $CB$ , то по аналогичен начин се получават равенствата  $tg^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{r - 2\rho_a}{r}$ ,  $tg^2 \frac{\beta}{2} = \frac{r - 2\rho_b}{r}$ .

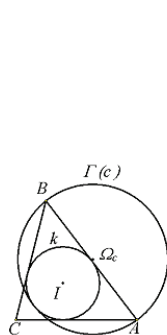
Сега, като използваме равенството  $tg \frac{\alpha}{2} tg \frac{\beta}{2} + tg \frac{\beta}{2} tg \frac{\gamma}{2} + tg \frac{\gamma}{2} tg \frac{\alpha}{2} = 1$ , получаваме

$$\sqrt{(r - 2\rho_b)(r - 2\rho_c)} + \sqrt{(r - 2\rho_c)(r - 2\rho_a)} + \sqrt{(r - 2\rho_a)(r - 2\rho_b)} = r.$$

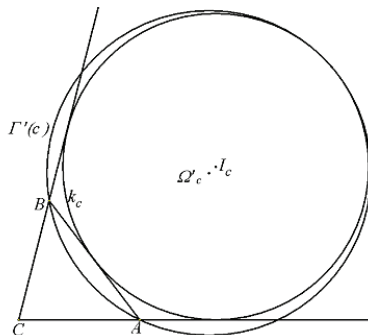
**8. Полуописани окръжности, допиращи се до вписаната окръжност на триъгълника.** Сега ще покажем как се получават някои зависимости между радиуси на допиращи се окръжности с частично използване на лемата. Поточно, като използваме част от доказателството ѝ, ще покажем, че е в сила следната

**Теорема 11.** *Ако окръжност  $\Gamma_c$  с радиус  $R_c$  минава през върховете  $A$  и  $B$  на  $\triangle ABC$  и се допира до вписаната окръжност  $k(r)$  (фиг. 14), то е изпълнено равенството*

$$R_c = \frac{r \left( \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$



Фигура 14



Фигура 15

От пункт 5) е известно, че разстоянието между центровете  $I$  и  $\Omega_c$  на окръжностите  $k(r)$  и  $\Gamma_c(\Omega_c)$  се намира чрез равенството (7). Тъй като  $k(r)$  се допира вътрешно до  $\Gamma_c(\Omega_c)$ , то е изпълнено равенството  $|I\Omega_c| = R_c - r$ . Сега от (7) следва  $(R_c - r)^2 = r^2 + R_c^2 - (p-a)(p-b) - 2\varepsilon_1\varepsilon_2r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}$ , което е еквивалентно с равенството  $2r.R_c - (p-a)(p-b) = 2\varepsilon_1\varepsilon_2r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}$ . След използване на (4) последното се преобразува в  $2r.R_c - r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = 2\varepsilon_1\varepsilon_2r\sqrt{R_c^2 - R^2\sin^2\gamma}$ . След повдигане в квадрат на двете страни на това равенство и извършване на някои преобразувания получаваме  $R_c = \frac{r\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}$ . С това теорема 11 е доказана.

По аналогичен начин се получава и следната

**Теорема 12.** Ако окръжност  $\Gamma'_c$  с радиус  $R'_c$  минава през върховете  $A$  и  $B$  на  $\triangle ABC$  и се допира до външноописаната окръжност  $k_c(r_c)$  (фиг. 15), то е изпълнено равенството

$$R'_c = \frac{r_c\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

**9. Заключение.** С разгледаните теореми показахме един общ подход за доказване на твърдения, които са подобни на тези теореми. Разбира се, разгледаните теореми могат да се докажат и по други начини. Няколко доказателства на теорема 1 се съдържат в (Табов, 1990а), а доказателства на теореми 2, 3 и 4, различни от приведените по-горе, се съдържат съответно в (Михайлов, 1999), Цеков, 2000) и (Антонов, 2000).

Тъй като лемата описва всички случаи, в които могат да попаднат разгледаните окръжности, нейната формулировка изглежда много сложна. Но в конкретна ситуация може да се приложи само онази нейна част, която е подходяща за случая. Основното е, че в лемата е разработена една обща идея за доказване на определен вид задачи. Също така, както е показано в теореми 11 и 12, могат да се използват елементи от доказателството на лемата при решаването на някои задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

- Антонов, А. (2000). Мозайка от два триъгълника и пет окръжности. *Математика и информатика*, (4), 75 – 78.
- Михайлов, Б. (1999). Решение на задачата от кн. 2, 1998. *Математика и информатика*, (2), 79.
- Ненков, В. (1991). Отношение на радиусите на две окръжности. *Обучението по математика и информатика*, (1), 63 – 64.
- Табов, Й. (1990). Задачата на броя. *Обучението по математика и информатика*, (1).
- Табов, Й. (1990 а). Общ коментар на решенията на задачата от брой 1, 1990 г. *Обучението по математика и информатика*, (1), 61 – 62.
- Табов, Й. (1998). Задачата на броя. *Математика и информатика*, (2).
- Табов, Й. (1999). Задачата на броя. *Математика и информатика*, (3).
- Табов, Й. (1999 а). Задачата на броя. *Математика и информатика*, (4).
- Цеков, В. (2000). За задачата на брой 3, 1999. *Математика и информатика*, (2 – 3), 108 – 109.
- Grozdev, S., V. Nenkov (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications (REMIA 2010), Proceedings of the Anniversary International Conference Dedicated to the 40-th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University, 10 – 12 December, 2010, Plovdiv*, 349 – 354.

## REFERENCE

- Antonov, A. (2000). Mozayka ot dva triagalnika i pet okrazhnosti. *Matematika i informatika*, (4). 75 – 78.
- Mihaylov, B. (1999). Reshenie na zadachata ot kn. 2, 1998. *Matematika i informatika*, (2). 79.
- Nenkov, V. (1991). Otnoshenie na radiusite na dve okrazhnosti. *Obuchenieto po matematika i informatika*, (1), 63 – 64.
- Tabov, Y. (1990). Zadachata na broya. *Obuchenieto po matematika i informatika*, (1).
- Tabov, Y. (1990 a). Obsht komentar na resheniyata na zadachata ot broy 1, 1990 g. *Obuchenieto po matematika i informatika*, (1), 61 – 62.
- Tabov, Y. (1998). Zadachata na broya. *Matematika i informatika* (2).
- Tabov, Y. (1999). Zadachata na broya. *Matematika i informatika* (3).
- Tabov, Y. (1999 a). Zadachata na broya. *Matematika i informatika* (4).
- Tsekov, V. (2000). Za zadachata na broy 3, 1999. *Matematika i informatika*, (2 – 3), 108 – 109.
- Grozdev, S., V. Nenkov (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications*

(REMI 2010), *Proceedings of the Anniversary International Conference Dedicated to the 40-th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University, 10-12 December, 2010, Plovdiv, 349 – 354.*

## **A GENERAL APPROACH TO ESTABLISH RELATIONS AMONG THE RADII OF TANGENT CIRCLES**

**Abstract.** A general idea is considered to establish relations among the radii of tangent circles in the plane of a given triangle. The idea is based on Euler's formula for the distance between the radii of the circum-circle and the in-circle of the triangle and also on some other relations between the radii in question. The main results are unified in the formulation of a corresponding lemma.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**  
University of Finance, Business and Entrepreneurship  
1, Gusla Str.  
1618 Sofia, Bulgaria  
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**  
Technical College Lovech  
31, Sajko Saev Str.  
Lovech, Bulgaria  
E-mail: vnenkov@mail.bg