Олимпиади. Състезания
Olympiads.Competitions

МЕЖДУНАРОДНА ЖАУТИКОВСКА ОЛИМПИАДА

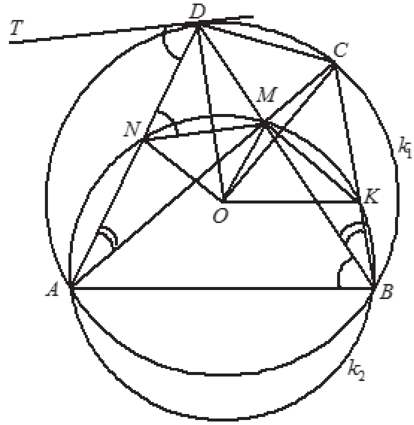
[1]Сава Гроздев, [2]Веселин Ненков
[1]Висше училище по застраховане и финанси
[2]Технически колеж –Ловеч

Резюме. Разгледани са задачите и техните решени от Международната Жаутиковска олимпиада през 2016 г. Решенията имат методически характер.

Задача 1. Даден е четириъгълник *ABCD* с пресечна точка *M* на диагоналите, който е вписан в окръжност с център *O*. Описаната окръжност около ΔABM пресича страните *BC* и *AD* съответно в точки *K* и *N*. Да се докаже, че четириъгълниците *NOMD* и *KOMC* са равнолицеви.

(Емил Стоянов, България)

Решение. Нека k_1 и k_2 са описаните окръжности съответно около дадения четириъгълник и ΔABM . Ъглите *CAD* и *DBC* са вписани в k_1 и се измерват с дъгата $\overset{\frown}{CD}$. Следователно $\measuredangle CAD = \measuredangle DBC$. Тези ъгли са вписани и в k_2 , откъдето заключаваме, че *MN* = *MK*. Освен това *OD* = *OC* като радиуси в k_1 . Получаваме, че четириъгълниците *NOMD* и *KOMC* имат равни диагонали. Ще докажем, че тези диагонали са два по два перпендикулярни. Нека *TD* е допирателната към k_1 в точката *D*. Тогава $\measuredangle ADT = \measuredangle ABD$, съответно като периферен и вписан ъгъл в k_1 , които се измерват с една съща дъга $\overset{\frown}{AD}$. От друга страна, $\measuredangle ABD = \measuredangle MND$, тъй като четириъгълникът *ABMN* е вписан в k_2 . Тогава $\measuredangle ADT = \measuredangle MND$ и следователно *TD* || *MN*. Заключаваме, че $MN \perp OD$. По същия начин $MK \perp OC$. Сега твърдението



следва от формулата за лице на четириъгълник с взаимно перпендикулярни диагонали.

Задача 2. Ако a_1, a_2, …, a_{100} е пермутация на числата 1, 2, …, 100, нека $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, …, $S_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$. Колко най-много са точните квадрати измежду числата S_1, S_2, …, S_{100}?

(Наири Седракян, Армения)

Решение. Към редицата S_1, S_2, …, S_{100} добавяме начален член $S_0 = 0$ и разглеждаме членовете $S_{n_0} < S_{n_1} < \ldots$, които са точни квадрати, т.е. $S_{n_k} = m_k^2$ (в частност $n_0 = m_0 = 0$). Тъй като $S_{100} = 5050 < 72^2$, числата m_k не надминават 71. Ако $m_{k+1} = m_k + 1$, разликата $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = 2m_k + 1$ е нечетна. Оттук следва, че поне едно от числата a_{n_k+1}, …, $a_{n_{k+1}}$ е нечетно. Тъй като нечетните числа, които не надминават 100, са общо 50, измежду разликите $m_{k+1} - m_k$ не повече от 50 са равни на 1. Ако допуснем, че точните квадрати в изходната редица са поне 61, то

$$m_{61} = (m_{61} - m_{60}) + (m_{60} - m_{59}) + \ldots + (m_1 - m_0) \geq 50 + 11.2 = 72,$$

което е невъзможно. Пример на редица с 60 точни квадрата може да се построи по следния начин. Ако $a_i = 2i - 1$ при $1 \leq i \leq 50$, можем да използваме всички нечетни числа и нека $S_i = i^2$. По-нататък нека $S_{54+4i} - S_{50+4i} = 204 + 8i$. Тогава $S_{54+4i} = (52 + 2i)^2$. Последните 18 члена на редицата са 30, 40, 64, 66, 68, 6, 8, 14, 16, 32, 38, 46, 54, 62, 22, 24, 48 и 56. Сега $S_{87} = 66^2 + 2.134 = 68^2$ и $S_{96} = 70^2$.

Задача 3. В Графландия има 60 града, всеки два от които са свързани с път с еднопосочно движение. Да се докаже, че четири от градовете могат да се оцветят в червено, а други четири – в зелено, така че пътищата между червените и зелените градове да са в посока от червен към зелен град.

(Александър Голованов, Русия)

Решение. Ще казваме, че град *А обслужва* град *В*, ако пътят между *А* и *В* е в посока от *А* към *В*. В този случай ще казваме още, че пътят между *А* и *В* *излиза* от *А*. Така, *А* обслужва четворката градове B_1, B_2, B_3 и B_4, ако пътищата между *А* и B_i са в посока от *А* към B_i за всяко $i = 1, 2, 3, 4$, т.е. пътищата между *А* и B_i излизат от *А*. Ако един град обслужва общо *k* града, то този град обслужва C_k^4 четворки градове. Нека броят на пътищата, които излизат от всичките 60 града, са k_1, k_2, …, k_{60}. Това са всички възможни пътища и техният общ брой е $C_{60}^2 = 30.59$. Общият брой обслужвани четворки градове е $S = C_{k_1}^4 + C_{k_2}^4 + \ldots + C_{k_{60}}^4$. Ще докажем, че най-малката стойност на тази сума, при условие че $k_1 + k_2 + \ldots + k_{60} = 30.59$, е равна на $30.C_{30}^4 + 30.C_{29}^4$. Наистина, множеството набори от цели неотрицателни числа $(k_1, k_2, \ldots, k_{60})$ със сума 30.59 е крайно и следователно един от тези набори определя минимална сума S. Да допуснем, че за разглежданото множество има две числа $m \geq 4$ и n така, че $m-n \geq 2$. Ако заменим m и n с $m-1$ и $n+1$, то сумата ще се намали ($C_m^4 + C_n^4 - C_{m-1}^4 - C_{n+1}^4 = C_{m-1}^3 - C_n^3 > 0$). По този начин най-малката стойност на сумата S се достига за набор от k_i, при който разликата на всеки две числа не надминава 1. Такъв набор е очевидно единствен и е съставен от 30 числа, равни на 30, и 30 числа, равни на 29.

И така, всичките 60 се града се обслужват от не по-малко от $30.C_{30}^4 + 30.C_{29}^4$ четворки. Лесно се проверява, че това число е по-голямо от $3.C_{60}^4$, т.е. от утроения брой на всички четворки. Това означава, че съществува четворка, която обслужва поне четири града, което трябваше да се докаже.

Задача 4. Намерете всички $k > 0$, за които съществува намаляваща функция $g \in \Re$ така, че $g(x) \geq kg(x+g(x))$ за всяко $x > 0$.

(Шукрат Исмаилов, Узбекистан)

Решение. Нека $0 < k \leq 1$. За всяка такава стойност на k е достатъчно да вземем $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Тогава $x + g(x) > x$ и $g(x) > g(x+g(x)) \geq kg(x+g(x))$ за всяко $x > 0$. Да обърнем внимание, че неравенството от условието на задачата е изпълнено и за всяка друга намаляваща функция $g \in \Re$.

Нека $k > 1$ и да допуснем, че съществува намаляваща функция $g \in \Re$, за която $g(x) \geq kg(x+g(x))$ за всяко $x > 0$. Ако $s = \dfrac{1}{k}$, то $sg(x) \geq g(x+g(x))$. Нека $x > 0$ е фиксирано. Разглеждаме редицата $x_0 = x$, $x_{n+1} = x_n + g(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Тъй като $g(x_{n+1}) = g(x_n + g(x_n)) \leq sg(x_n)$, по индукция следва, че $g(x_n) \leq s^n g(x)$. По-нататък имаме

$$x_n = x_0 + g(x_0) + g(x_1) + \ldots + g(x_{n-1}) \leq x + g(x) = sg(x) + \ldots + s^{n-1}g(x) =$$

$$= x + (1 + s + \ldots + s^{n-1})g(x) < x + \frac{1}{1-s}g(x),$$

откъдето $g(x_n) > g\left(x + \dfrac{1}{1-s}g(x)\right)$ и следователно $g\left(x + \dfrac{1}{1-s}g(x)\right) < s^n g(x)$ за всяко естествено число n. Последното е очевидно невъзможно, защото, от една страна, $g\left(x + \dfrac{1}{1-s}g(x)\right) > 0$, а от друга, $\lim\limits_{n\to\infty} s^n = 0$.

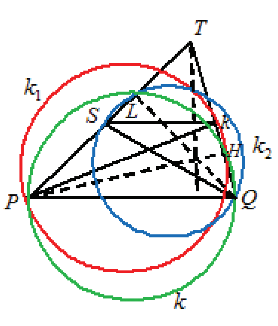
Задача 5. Даден е изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, противоположните страни на който са две по две успоредни. Правите BD и AE, AC и DF, CE и BF се пресичат съответно в точките M, N и K. Да се докаже, че перпендикулярите от M, N и K съответно към правите AB, CD и EF се пресичат в една точка.

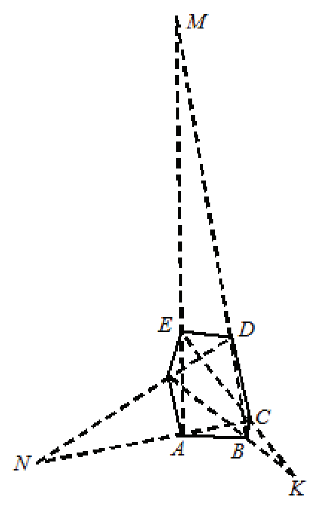
(Наири Седракян, Армения)

Решение

Лема. Нека T е пресечната точка на бедрата PS и QR на трапеца $PQRS$. Да се докаже, че височината в ΔPQT от върха T лежи на радикалната ос на окръжностите с диаметри PR и QS, т.е. с диаметри – диагоналите на трапеца.

Доказателство. Нека k_1 и k_2 са окръжностите с диаметри PR и QS, а k е окръжността с диаметър PQ. С PH означаваме общата хорда на k_1 и k. Тъй като $\measuredangle PHR = \measuredangle PHQ = 90^0$ (опират се на диаметри в съответните окръжности), точката H лежи на QR и PH е височина в ΔPQT. Аналогично, ако QL е общата хорда на k_2 и k, то $\measuredangle QLS = \measuredangle QLP = 90^0$ (опират се на диаметри в съответните окръжности) и заключаваме, че точката L лежи на PT и QL е височина в ΔPQT. Пресечната точка на PH и QL е ортоцентър на ΔPQT, който има равни степени относно k_1 и k_2, поради което лежи на радикалната им ос. По същия начин следва, че на тази радикална ос лежи и ортоцентърът на ΔSRT. Тъй като перпендикулярната права през T към PQ минава и през двата ортоцентъра, то тази права е радикалната ос на k_1 и k_2.





В решението на задачата прилагаме лемата трикратно за трапеците $ABDE$, $CDFA$ и $EFBC$. Перпендикулярите от M, N и K съответно към правите AB, CD и EF са радикални оси последователно на окръжностите с диаметри BE и AD, AD и CF, CF и BE. Следователно тези три перпендикуляра са пресичат в една точка, която е радикалният център на трите окръжности.

Задача 6. Едно естествено число q се нарича *удобен знаменател* за реалното число α, ако $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{10q}$ за някое цяло число p. Да се докаже, че ако за две ирационални числа α и β множествата на удобните им знаменатели съвпадат, то $\alpha + \beta$ или $\alpha - \beta$ е цяло число.

(Александър Голованов, Русия)

Решение. Нека $q_1 < q_2 < \ldots$ са всички удобни знаменатели за ирационалните числа α и β. Ясно е, че всяко q_i съществува единствено p_i, за което $|q_i\alpha - p_i| < \frac{1}{10}$. Ще наречем това p_i *удобен числител*, съответстващ на q_i. Първоначално ще разгледаме случая $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{10}$. Нека $p_1 < p_2 < \ldots$ са удобните числители за α, а $p_1^{'} < p_2^{'} < \ldots$ са удобните числители за β. По индукция ще докажем, че $p_i = p_i^{'}$ за всяко естествено i. Очевидно $p_1 = p_1^{'} = 0$. Нека $p_k = p_k^{'}$. Ако $q_{k+1} = q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k$ (защото $|p_k - q_k\alpha| < \frac{1}{10}$ и $|p_{k+1} - q_{k+1}\alpha| = |p_{k+1} - q_k\alpha| < \frac{1}{10}$) и аналогично $p_{k+1}^{'} = p_k^{'}$. Оттук $p_{k+1} = p_{k+1}^{'}$. В случай, че $q_{k+1} > q_k + 1$, то $p_{k+1} = p_k + 1$. Наистина, в растящата аритметична прогресия с първи член $(q_k + 1)\alpha$ и разлика $\alpha < \frac{1}{10}$ първият член е по-малък от $(p_k + 1) - \frac{1}{10}$ и следователно това е така и за членовете, които отстоят от $p_k + 1$ на разстояние, по-малко от $\frac{1}{10}$. Аналогично $p_{k+1}^{'} = p_k^{'} + 1$ и индукцията е завършена. Тъй като $|q_k\alpha - p_k| < \frac{1}{10}$ и $|q_k\beta - p_k| < \frac{1}{10}$, заключаваме, че $|q_k(\alpha - \beta)| < \frac{1}{5}$ за всяко k и следователно $\alpha = \beta$.

В случая, когато α и β са произволни, разглеждаме числата $q_1\alpha$ и $q_1\beta$. При необходимост можем да променим знаците, поради което можем да считаме, че $0 < \{q_1\alpha\}, \{q_1\beta\} < \frac{1}{10}$. За числата $\{q_1\alpha\}$ и $\{q_1\beta\}$ е изпълнено условието на задачата и следователно $\{q_1\alpha\} = \{q_1\beta\}$. Това означава, че числото $q_1\alpha - q_1\beta = r$ е цяло и следователно $\alpha - \beta = \frac{r}{q_1}$ е рационално число. Да допуснем, че тази разлика не е цяло число. Тогава можем да умножим числото $\frac{r}{q_1}$ с подходящо естествено число k и да си подсигурим дробната чст да се намира в интервала $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Сега ще използваме, че за произволни $0 \le u < v \le 1$ и произволно рационално число θ може да се намери естествено число n, така че $\{n\theta\} \in (u;v)$. В частност, съществува n, за което $\{nq_1\alpha\}$ е заключено между $\left\{\frac{-kr}{q_1} - \frac{1}{10}\right\}$ и $\left\{\frac{-kr}{q_1} + \frac{1}{10}\right\}$. Тогава числото $(nq_1 + k)\alpha$ се намира от най-близкото цяло число на разстояние, по-малко от $\frac{1}{10}$. Но тогава и $(nq_1 + k)\beta$ ще се намира от най-близкото цяло число на разстояние, по-малко от $\frac{1}{10}$, което противоречи на условието $\{(nq_1 + k)\alpha - (nq_1 + k)\beta\} = \left\{nr + \frac{kr}{q_1}\right\} \in \left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

INTERNATIONAL ZHAUTIKOV OLYMPIAD

Abstract. The problems of the International Zhautikov Olympiad in 2016 and their solutions are considered. Methodological solutions are proposed.

✉**Prof. Sava Grozdev, DSc**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla Str.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉**Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev Str.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg