Educational Matters
Въпроси на преподаването

АРИТМЕТИЧЕН ИЛИ АЛГЕБРИЧЕН МЕТОД ПРИ РЕШАВАНЕ НА ЗАДАЧИ В НАЧАЛНАТА УЧИЛИЩНА МАТЕМАТИКА

[1]Здравко Лалчев, [2]Маргарита Върбанова, [3]Ирина Вутова
[1]Софийски университет „Св. Климент Охридски“
[2]Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“
[3]Софийски университет „Св. Климент Охридски“

Резюме. Целта на настоящата статия е да очертае границите на математическото „покритие“ на аритметичните методи за решаване на задачи от началния курс по математика и да отговори на въпроса в кои случаи моделите на класическата методика на училищната аритметика са „безсилни“ и по тази причина е необходимо да се потърси „помощ“ от методиката на училищната алгебра. Казано по друг начин, целта е да се покаже кога алгебричният подход за решаване на аритметични задачи е логически неизбежен или технически оправдан. На основата на MZ-картата на задачата авторите формулират критерий за необходимост от въвеждане на неизвестно и използване на математически модел от съставни уравнения при решаване на аритметични задачи от началната училищна математика.

Keywords: MZ-card, inversion, equation, algebraic method, mathematical model, arithmetical knot

1. Предварителни бележки

Добре известно е, че при решаване на прави задачи (задачи, при които са известни „началото“ и редът на действията, заложени в аритметичната задача, и се търси „краят“), независимо от това дали задачите са елементарни, или съставни, не е необходимо да се построява математически модел от тип „уравнение“. Обикновено след извършване на елементарните действия и действията са „изпълними“ в указания ред в структурата на задачата се достига до нейния отговор. Това означава, че съществува определен ред (от „началото“ към „края“), в който елементарните задачи компоненти, съставящи MZ-картата на главната задача, са „решими“ и техните отговори в реда на тяхното решаване съставят решението на задачата. С други думи, решението на задачата се разделя на отделни последователни „стъпки“, които се „извървяват“ в една посока от „началото към края“ и не се налага „обръщане“ посоката на движение (с изключение евентуално на отделни вътрешни елементарни стъпки).

Не така стои въпросът при решаване на обратни задачи, т.е. задачи, при които са известни „краят“ и редът на аритметичните действия, заложени в задачата, и се търси „началото“. Обикновено в подобна ситуация „привържениците“ на аритметичните подходи търсят решение, прилагайки метода на „подмяна“ на задачата. Това ще рече, че чрез „специфични“ логически разсъждения (често пъти чрез допускане на отрицанието) „подменят“ задачата (или нейни задачи компоненти) с обратната на противоположната задача и след това решават аритметично получената „нова“ задача. В решението на „новата задача“ явно (или по често неявно) „участва“ логическата еквивалентност

$$p \to q \boxtimes q \to p$$

Подобно решение, макар и аритметиччно изкуствено, е трудно обяснимо за учениците. По тези причини подобно решение често пъти остава неразбрано.

Според нас, а и според други автори, при решаване на обратна съставна аритметична задача е по-естествено да се приложи алгебричният подход – построява се уравнение, което е математически модел на задачата, и след това се търсят корените на уравнението, което в повечето случаи е линейно. Така уравнението ни избавя от необходимостта да правим трудно обяснимата логическа „подмяна“ на задачата. Но и алгебричният подход в началната училищна математика си има своите методически „дефекти“. От една страна, (по необясними причини) съставните уравнения, дори и да са аритметични, за началната училищна математика те са „terra incognita“ и в повечето случаи решаващите задачата не познават (или нямат право да използват) метода на уравненията. От друга страна, често пъти уравнението, съставено като модел на задача от начална училищна математика, е прекалено сложно и практически нерешимо и за ученици от по-горните класове.

В тази връзка възникват въпросите: в кои случаи при решаване на обратна съставна аритметична задача е възможно да се намери решението, без да се съставя модел „уравнение“ или да се прави логическа „подмяна“ на задачата, в кои случаи моделът уравнение е целесъобразен и в кои случаи този модел е неизбежен.

2. Анализ на решенията на три аритметични задачи

За да отговорим на някои от въпросите, свързани с необходимостта, целесъобразността и неизбежността на модела „уравнение“ при решаване на обратни съставни аритметични задачи, ще разгледаме и сравним алгебричния и аритметичния метод при изучаване на три конкретни задачи от началния училищен курс по математика. (Решенията на задачите са апробирани в лекциите по математика със студенти – бъдещи начални учители, във Факултета по начална и предучилищна педагогика на Софийския университет „Св. Климент Охридски“).

Задача 1. *Намислих число. Умножих го по* 3. *От* 100 *извадих полученото. Двадесет и осем разделих на полученото число. От* 18 *извадих полученото. Полученото умножих по* 7. *Полученото разделих на* 2. *От полученото извадих* 25. *Към полученото прибавих* 76. *Получих* 100. *Кое число съм намислил*?

Задача 2. *Ангел и Борис имат общо* 146 *лева. Ангел дал половината от своите пари на Борис. Борис похарчил* 10 *лева и дал половината от останалите на Ангел. Ангел похарчил* 20 *лева и дал половината от останалите на Борис. Борис похарчил* 30 *лева и дал половината от останалите на Ангел. След като Ангел похарчил* 40 *лева, се оказало, че двамата имат поравно пари. По колко лева е имал всеки от тях първоначално*?

Задача 3. *Въпросите в конспекта за изпита са общо* 50. *За всеки въпрос с правилен отговор се присъждат по* 2 *точки, при липса на отговор за съответния въпрос не се присъждат точки и за всеки въпрос с грешен отговор се отнема по една точка. Студентът А не е отговорил на* 12 *въпроса и е получил общо* 52 *точки. На колко въпроса е отговорил А правилно*?

Решение на задача 1

Алгебричен подход

След като означим с буквата x търсеното число и следвайки последователно „действията“ в текста на задачата, достигаме до уравнението:

$$((((18 - (28 : (100 - (x.3)))) .7) : 2) - 25) + 76 = 100.$$

Уравнението е аритметично и може да бъде решено по метода на „неизвестния компонент“, както е показано по-долу:

$$((((18 - (28 : (100 - (x.3)))) .7) : 2) - 25) + 76 = 100$$
$$(((18 - (28 : (100 - (x.3)))) .7) : 2) - 25 = 24 \quad (100 - 76)$$
$$((18 - (28 : (100 - (x.3)))) .7) : 2 = 49 \quad (24 +25)$$
$$(18 - (28 : (100 - (x.3)))) .7 = 98 \quad (49 . 2)$$
$$18 - (28 : (100 - (x.3))) = 14 \quad (98 :7)$$
$$28 : (100 - (x.3)) = 4 \quad (18 - 14)$$
$$100 - (x.3) = 7 \quad (28 : 4)$$
$$x.3 = 93 \quad (100 - 7)$$
$$x = 31 \quad (93 : 3)$$

Отговор. Намисленото число е 31.

Аритметичен подход

Нека построим MZ-карта на задачата (сх. 1).

Карта на задачата

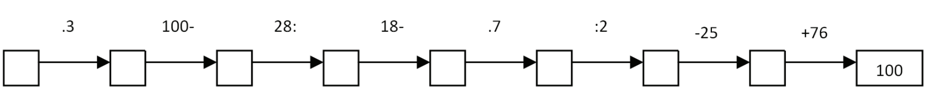


Схема 1

От схемата се вижда, че картата е „верижна“ диаграма, съставена от линейно свързани елементарни задачи компоненти. В тази диаграма всяка следваща задача е зависима от предходната, т.е. втората е зависима от първата, третата е зависима от втората и т.н., последната е зависима от предпоследната. Освен това всички задачи компоненти, с изключение на последната, са неопределени. Докато последната задача компонента е определена, т.е. тя може да бъде решена. От своя страна, решението на последната задача компонента прави предпоследната задача компонента определена. Решението на предпоследната задача компонента прави определена третата от края към началото задача и т.н. Продължавайки този процес, достигаме до момента, в който е определена и първата задача компонента. Нейното решение е отговорът на главната задача. (На сх. 1а е представена картата на решението.)

Карта на решението

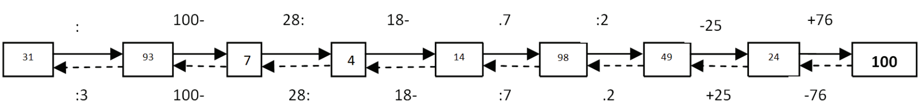


Схема 1а

Коментар

Математическият модел на задачата е аритметично уравнение, което позволява задачата да бъде решена по метода на неизвестния компонент.

MZ-картата на задачата е „верижна“ диаграма, което позволява задачата да бъде решена по метода на инверсията (обръщането), без да се налага въвеждане на неизвестно и съставяне на уравнение.

Извод. Алгебричният подход за решение на задачата чрез съставяне на уравнение е естествен и възможен, но **не е необходим,** тъй като задачата може лесно да бъде решена аритметично с помощта на построяването на MZ-карта и използване на метода инверсия.

Решение на задача 2

Алгебричен подход

Нека означим едно от числата (например числото на парите на Ангел) с буквата x. Тогава второто число (парите на Борис) е $146 - x$.

След като Ангел дал половината от парите си на Борис, то парите на Ангел са станали $x : 2$, а парите на Борис станали $(146 - x) + (x : 2)$.

След като Борис похарчил 10 лв. и дал половината от останалите пари на Ангел, то парите на Борис станали $((146 - x + x : 2) - 10) : 2$, а парите на Ангел станали $(x : 2) + (((146 - x + x : 2) - 10) : 2)$.

След като Ангел похарчил 20 лв. и дал половината от останалите пари на Борис, то парите на Ангел станали (x : 2 + (146 – x + x : 2 – 10) : 2 – 20) : 2, а парите на Борис станали

(((146 – x + x : 2) – 10) : 2) + ((x : 2 + (146 – x + x : 2 – 10) : 2 – 20) : 2).

След като Борис похарчил 30 лв. и дал половината от останалите пари на Ангел, то парите на Борис станали..........и т.н., докато стигнем до последното изречение:

„След като Ангел похарчил 40 лева, се оказало, че двамата имат поравно пари“.

За да се състави уравнението, е необходимо да се приравнят изразите за парите на двамата, след като завършат указаните действия.

Аритметичен подход

Да построим MZ-карта на задачата (сх. 2).

(Като се вземе предвид, че в посочените в текста на задачата действия са похарчени общо 10 + 20 + 30 + 40 = 100 лв., то останалите пари в края са 46 лв, т.е. всеки от двамата на края има по 23 лв. Това означава, че в последните квадратчета на първия и на втория ред са записани числата 23 и 23.)

Карта на задачата

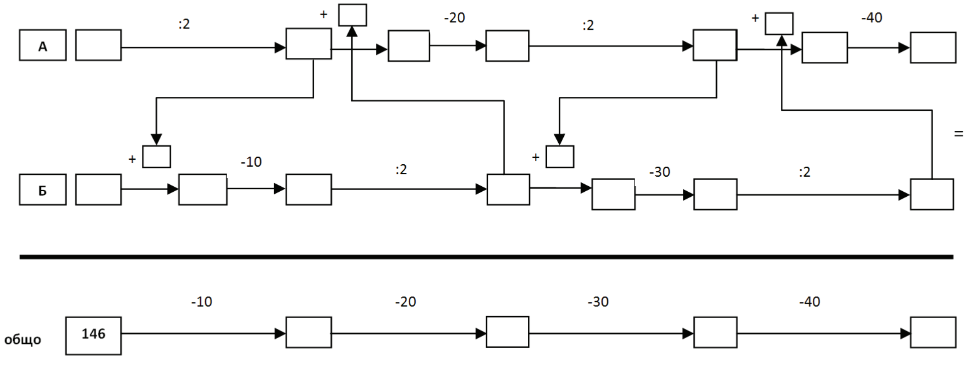


Схема 2

Да направим анализ на картата.

От картата се вижда, че структурата на задачата е композиция от 12 зависими две по две елемементарни задачи компоненти – първите 10 от които са неопределени, а последните две задачи са определени. Последното обстоятелство позволява последните две задачи да бъдат решени, с което девета и десета задача компонента стават определени. Този процес (инверсията) може да продължи, докато се достигне до първата и втората задача компонента (сх.2а). След като и те бъдат решени, се достига до отговора на задачата.

Карта на решението

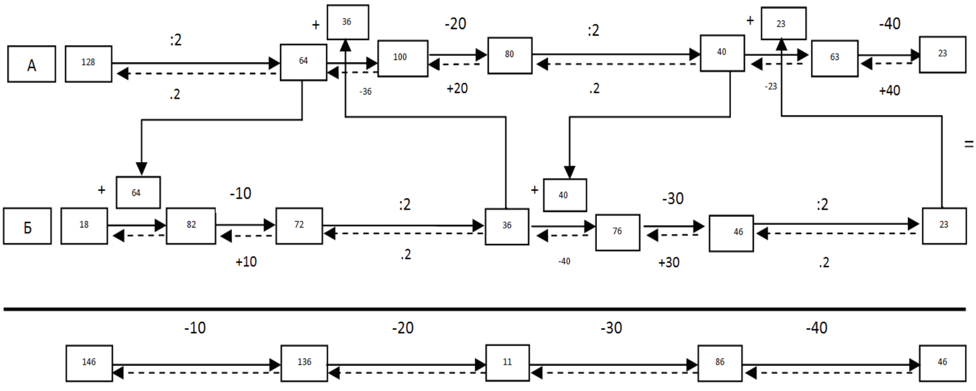


Схема 2а

Коментар

Задачата по принцип може да бъде решена алгебрично, но математическият модел (уравнението) на задачата е твърде сложен. При построяване на уравнението решаващият трябва да съставя сложни алгебрични изрази, а при неговото решаване да извършва сложни алгебрични преобразувания, което не е по силите на ученика.

MZ-картата на задачата е съставена от елементарни задачи компоненти, чиито диаграми стават „проходими“ след своето обръщане. Това означава, че картата позволява задачата да бъде решена по метода на инверсията (обръщането).

Извод. В случая алгебричният подход за решаване на задачата е неподходящ, тъй като моделирането чрез уравнение е практически неприложимо и по тази причина не е **целесъобразно**. В случая аритметичното решение с помощта на MZ-картата по метода на инверсията е най-подходящо за ученици от началните класове.

Решение на задача 3

Построяваме MZ-карта на задачата, (сх.3).

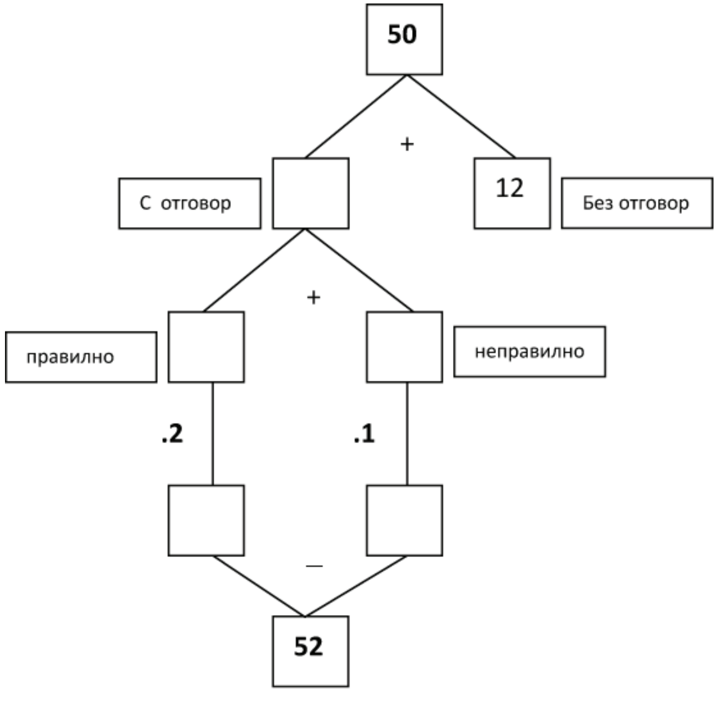


Схема 3

На картата отделяме пет задачи компоненти: (1) 50 = □ + 12; (2) □ = □ + □; (3) □ . 2 = □; (4) □ . 1 = □; (5) □– □ = 52.

От картата се вижда, че само задача (1) е определена, а задачи (2), (3), (4) и (5) са неопределени, като при това задача (2) е напълно неопределена (и трите квадратчета са празни), а задачи (2), (3), (4) и (5) са неопределни частично (по две квадратчета са празни). Тъй като задача (2) е зависима от задача (1), то след решаване на задача (1) задача (2) придобива вида 38 = □ + □ и става частично неопределена. Тогава картата придобива вида, показан на схема 3а.

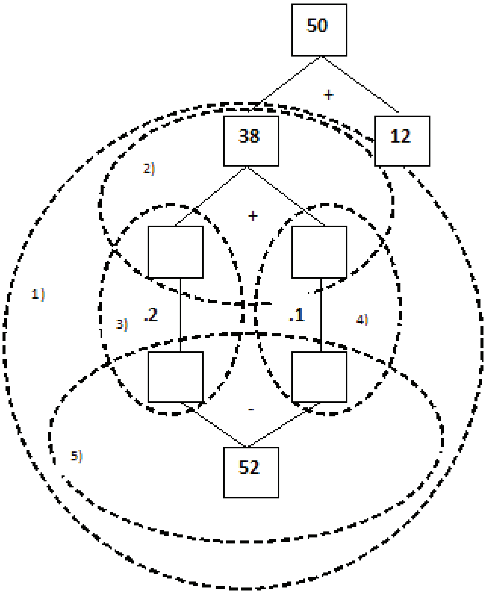


Схема 3а

От допълнената карта (сх. 3а) се вижда, че задачите (2) 38 = □ + □; (3) □ . 2 = □; (4) □ . 1 = □; (5) □– □ = 52 са взаимозависими. (Задача (2) е зависима от задачи (3) и (4); задача (3) е зависима от (2) и (5); задача (4) е зависима от (2) и (5); задача (5) е зависима от (3) и (4).) Също така се вижда, че посочените задачи образуват „затворена конфигурация“, към която няма „вход“, защото задачите както в началото, така и в края на системата са неопределени. При това положение решението на задачата чрез последователното „попълване“ на картата не може да бъде реализирано. Казано по друг начин, на картата се появи аритметичен „възел“ от задачи компоненти, който засега е неразрешим (сх. 3а)

За да се „развърже“ аритметичният „възел“, появил се в структурата на задачата, е необходимо в едно от квадратчетата (например в първото квадратче на задача (2)) да се постави буква (x) вместо неизвестното. (Числото x е броят на правилните отговори.) Въвеждането на буквата x „отваря“ вратите за „попълване“ и на другите квадратчета. Например второто събираемо в задача компонента (2) е 38 – x. Попълнената карта след въвеждане на неизестното x е представена на схема 3б.

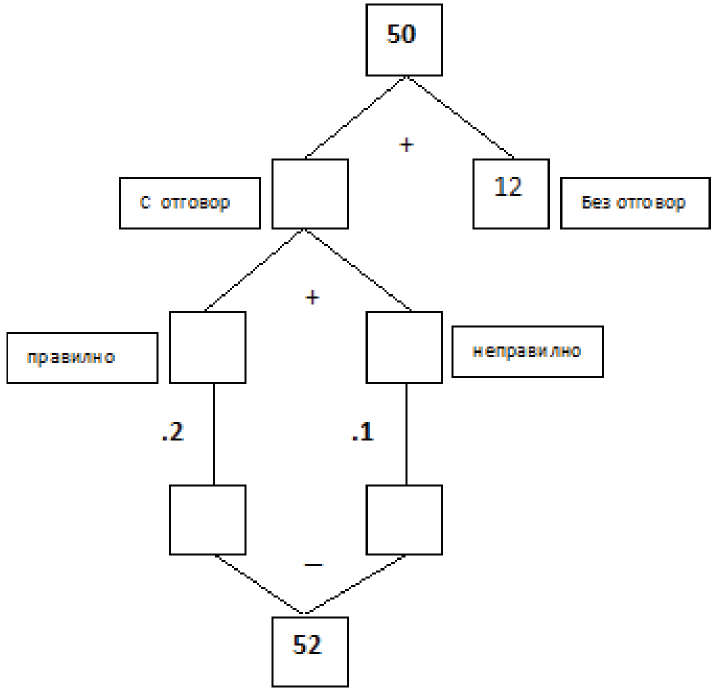


Схема 3б

От картата на сх.3б се вижда, че в двете „празни“ квадратчета на задачата компонента (5) се оказват съответно изразите $2x$ и $38 - x$. Като се изпълни операцията изваждане, от задача (5) се достига до равенство с буква (уравнение):

$$2x - (38 - x) = 52.$$

След решаване на уравнението се достига до извода: $x = 30$.

Отговор. Броят на правилните отговори е 30.

Коментар

В MZ-картата на задачата се появи аритметичен „възел“, който възпрепятства попълването на картата на решението. Попълването може да продължи едва след като в едно от празните квадратчета бъде поставено число, означено с буква (x). В този случай търсенето на аритметично решение на задачата е нецелесъобразно и по тази причина алгебричният метод при решаването чрез съставяне на уравнение е не само необходим, но той е и практически **неизбежен**.

3. Малко повече за аритметичения възел в структурата на задачата

Както беше показано, в MZ-картата на задача 3 се появи „затворена конфигурация“ от взаимно свързани неопределени елементарни задачи компоненти. Попълването на празните квадратчета на задачите от тази група по метода на инверсията е невъзможно, тъй като няма определена задача, с която да продължи попълването. Въпросната група от задачи компоненти ние нарекохме условно „аритметичен възел“. В тази точка ще се опитаме да представим същността на понятието „аритметичен възел“. Отначало с помощта на конкретен пример ще изясним понятието **елементарен аритметичен възел**. За целта да разгледаме следната задача:

Да се намерят две числа, чийто сбор е 92 *и тяхната разлика е* 18.

Математическият модел на задачата е линейна система от две уравнения с две неизвестни.

По конкретно, нека с x да означим едното (по-голямото) число и с y другото число. Тогава търсената двойка числа са решение на системата уравнения:

$$x + y = 92 \text{ и } x - y = 18.$$

Сега да направим MZ-карта на задачата и да отделим задачите компоненти (сх.4).

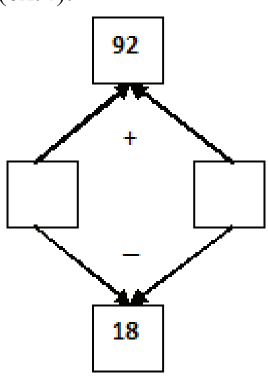


Схема 4

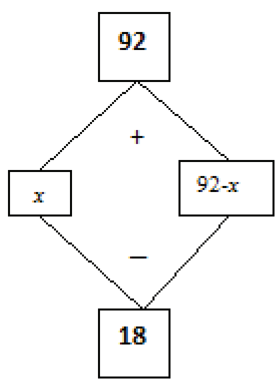


Схема 4а

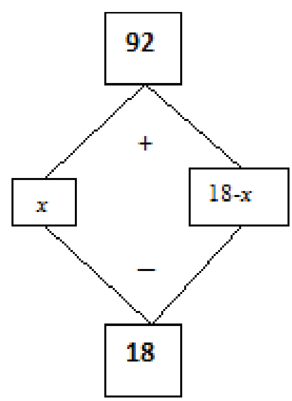


Схема 4б

От картата се вижда, че структурата на задачата е изградена от четири квадратчета, разположени във върховете на четириъгълник, така че в двата срещуположни върха се намират известните числа, а в другите два срещуположни върха са неизвестните числа. Освен това двойките стрелки, определящи операциите, излизат от празните квадратчета и са насочени към запълнените квадратчета. Така главната задача е съставена от двойка взаимносвързани и неопределени сами за себе си задачи компоненти. Тъй като и двете задачи компоненти са неопределени, то решението на задачата чрез попълване на картата не може да започне.

Посочената четириъгълна конфигурация от двойка взаимносвързани и неопределени елементарни аритметични задачи ще наричаме **елементарен аритметичен възел**. Върховете на четириъгълника, в които се намират известните числа, ще наричаме „**пълни**“, а другата двойка ще наричаме „**празни**“.

Вижда се, че при наличие на аритметичен възел попълването на картата на задачата е невъзможно без „допълнителна информация“.„Попълването“ на картата може да продължи, след като се „запълни“ едно от празните квадратчета. В този смисъл може да се каже, че наличието на аритметичен възел в MZ-картата на задачата е причина (критерий, достатъчно основание) са въвеждане на буква, с която е означено неизвестно число.

Ако в едно от празните квадратчета се постави число, означено с буква (например x), то двете задачи стават определени (условно) и „попълването“ може да продължи с уговорката, че в празните квадратчета се появяват не конкретни числа, а числови изрази, в които участва и буквата x. Ако неизвестното е въведено в лявото празно квадратче (за първото неизвестно число), то до второто (дясното) празно квадратче може да се достигне по два начина, (сх. 4а и сх.4б).

Първият начин довежда до уравнението $x - (92 - x) = 18$.

Вторият начин довежда до уравнението $x + (x - 18) = 92$.

Така направените по-горе разсъждения водят до извода, че ако в MZ-картата на задачата се „оформи“ аритметичен възел, „излизането“ от него може да стане алгебрично чрез въвеждане на неизвестно и съставяне на уравнение.

Същността на понятието елементарен аритметичен възел не се променя, ако едната или двете аритметични операции се заменят с аритметични релации. Като пример ще разгледаме следната

Задача: *Да се намерят две числа, чийто сбор е* 108 *и второто число е* 3 *пъти по-малко от първото.*

Ако се построи MZ-картата на задачата (сх.5) и се отделят задачите компоненти на главната задача, се вижда, че двете задачи компоненти са зависими една от друга, а също така и двете са неопределни. Това означава, че двойката задачи компоненти образува аритметичен възел (сх.5а).

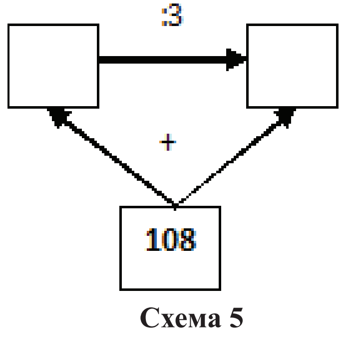


Схема 5

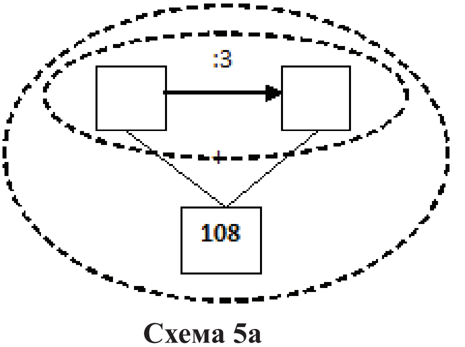


Схема 5а

За да се излезе от възела, е необходимо едно от двете търсени числа, например второто, да бъде означено с x и да се допълни картата (сх.5б). Така се достига до уравнението: $3x + x = 81$. От последното уравнение се намира второто число.

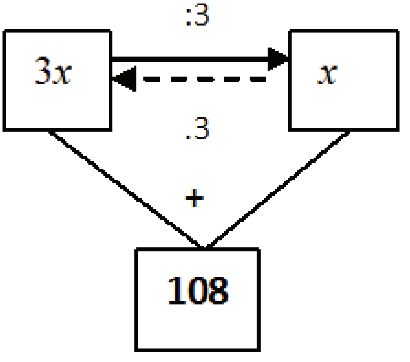


Схема 5б

Обикновено в съставната задача, в аритметичния възел, участват повече от две задачи, т.е. възелът не е елементарен. Това може да се види и в MZ-картата на задача 3 от първата точка на статията (сх.3).

Независимо че аритметичният възел в задачата не е елементарен, това не променя неговата същност и начина за излизане от него. След въвеждане на неизвестно в едно от празните квадратчета на една от задачите компоненти, свързани с „пълен“ връх на възела, и „попълване“ на останалите квадратчета на възела се достига до уравнение, от което се намира неизвестното число.

Проведените по-горе разсъждения ни дават основание да приемем наличието на аритметичен възел в MZ-картата на задачата за достатъчна причина (критерий) за въвеждане на неизвестно и построяване на алгебричен модел уравнение на задачата.

4. Приложение

В тази точка ще разгледаме решенията на две задачи, в структурата на всяка от които има аритметичен възел. Това означава, че за целите на решението на всяка от тях ще постъпим алгебрично, т.е. ще въведем буква и ще съставим уравнение.

Задача 1. *Един фермер занесъл в мелница* 65 *чувала ръж и* 45 *чувала ечемик. Един чувал с ръж е с* 20 *кг по-тежък от един чувал с ечемик, а цялото количество с ръж е с* 2800 *кг повече от ечемика. Колко килограма е тежал един чувал с ечемик*?

Решение: Построяваме MZ-карта на задачата (сх.6)

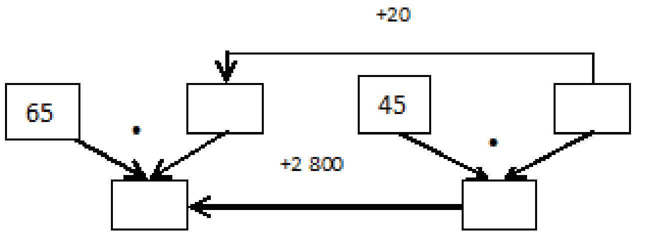
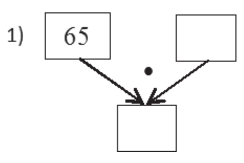
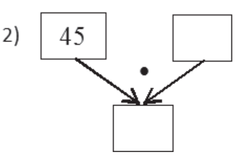


Схема 6

От картата се вижда, че структурата на задачата е композиция от четири елементарни задачи компоненти, (сх. 6а, 6б, 6в, 6г).





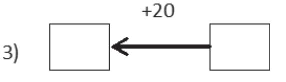


Схема 6а **Схема 6б** **Схема 6в**

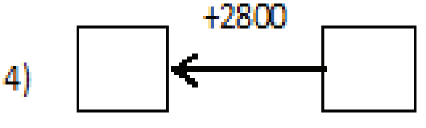


Схема 6г

В случая четирите задачи компоненти са неопределени, като зад. (1) и зад. (2) са независими; зад. (3) е зависима от (1) и (2); зад. (4) е също зависима от (1) и (2). Следователно четворката задачи компоненти образува аритметичен възел. Ето защо при решаването се налага въвеждането на буква за означаване на неизвестено число в задачата. Тъй като се търси колко килограма тежи един чувал с ечемик, то е целесъобразно и удобно да се означат с x килограмите ечемик в един чувал. Тогава задача (2) става определена и полученото произведение е $45.x$. Задача (3) също се преобразува в определена и полученият сбор е $20 + x$. Резултатът на зад. (3) преобразува зад. (1) в определена и произведението (резултатът) е $65.\,(20 + x)$. Но това „квадратче“ е елемент и на зад. (4), която е преобразувана в определена след решаването на зад. (2). Така се получава изразът $45.x + 2800$, който е резултат на задача (4) (виж сх. 6д).

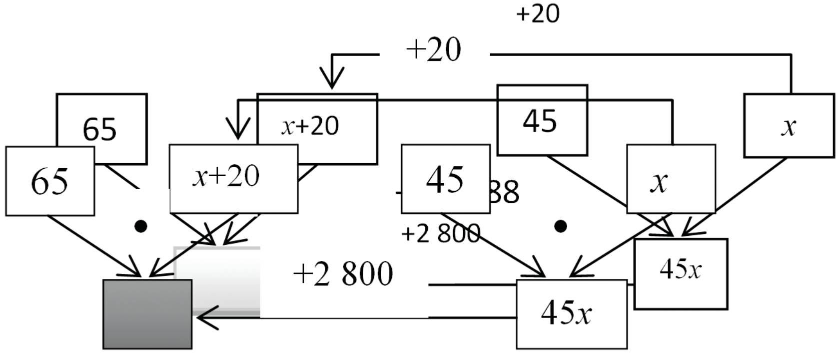


Схема 6д

Тъй като резултатите на задача (1) и на задача (4) „съвпадат“ (тези числа са представени с едно и също квадратче, оцветено в сиво на картата), то е вярно равенството (уравнението):

$$65 \,.\, (20 + x) = 45.\, x + 2800 \,.$$

Математическият модел (уравнението) може да се реши „аритметично“, т.е. с прилагане само на аритметични средства, както е показано по-долу:

$$65 \,.\, (20 + x) = 45 \,.\, x + 2\,800, \text{ т.е.}$$
$$1300 + 65 \,.\, x = 45.\, x + 2\,800, \text{ т.е.}$$
$$2\,800 = 1\,300 + 65 \,.\, x - 45\text{–}x, \text{ т.е.}$$
$$2\,800 = 1300 + 20.\, x, \text{ т.е.}$$
$$20 \,.\, x = 2\,800 - 1\,300, \text{ т.е.}$$
$$20 \,.\, x = 1\,500, \text{ т.е.}$$
$$x = 75.$$

(Решаването на уравнението се основава на знания за зависимостта между компонентите при действие събиране (едното от събираемите е равно на разликата от сбора и другото събираемо), правилото за намиране на неизвестен множител (неизвестният множител се намира, като се раздели частното на другия множител) и разпределителното свойство на умножението по отношение на действие изваждане.)

Отговор. Един чувал с ечемик тежи 75 кг.

Задача 2. *Лицето на правоъгълник е равно на лицето на квадрат със страна 24 см. Широчината на правоъгълника е 9 пъти по-къса от дължината му. На колко сантиметра е равна обиколката на правоъгълника?*

Решение

Построяваме MZ-карта на задачата (сх. 7)

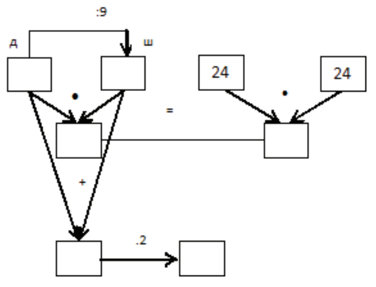


Схема 7

От направената карта се вижда, че задачата е композиция от шест задачи компоненти. Само една от тях е определена, а останалите са неопределени и са зависими една от друга, а също така и от определената.

След попълване на решението на определената задача (сх.7а) една от неопределените задачи се преобразува в определена (сх. 7б).

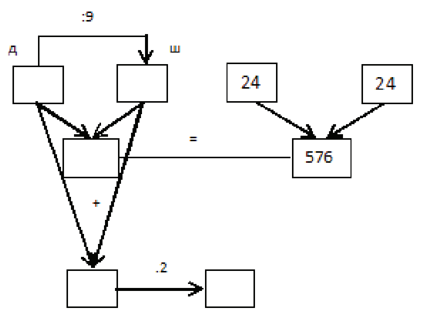


Схема 7а

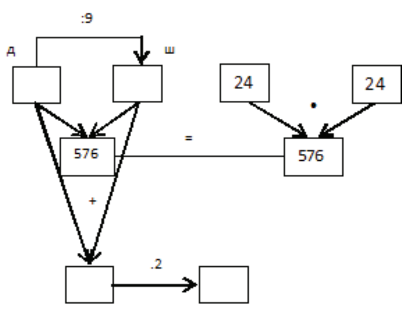


Схема 7б

От картата от сх. 7б се вижда ясно, че в структурата на задачата на този етап има четири свързани елементарни задачи, които са неопределени и образуват аритметичен възел. По тази причина на този етап не е възможно да продължи процесът на аритметичното решение, без да се въведе буквено означение на един от неизвестните обекти в задачата. В случая, за да се избегне действието деление и съответно дробен коефициент пред неизвестното, е удачно да означим с x широчината на правоъгълника. Така за дължината и за лицето на правоъгълника получаваме съответно изразите $9.x$ и $9.\,x.\,x$. Като вземем предвид, че в квадратчето за лицето вече е записано числото 576, (сх.7в), достигаме до уравнението:

$$9.\, x\, .\, x = 576.$$

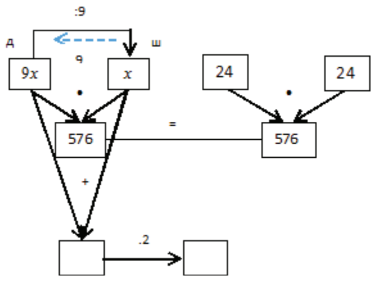


Схема7в

За да решим полученото уравнение, използваме знания за действието умножение, за съдружителното свойство на умножението и за намиране на неизвестен множител. И така:

$9.\, x.x = 576$, т.е.

$9.\, (x.x) = 576$, т.е.

$(x.x) = 576{:}\ 9$, т.е.

$x.x = 64$, т.е.

$x.x = 8\ .\ 8$, т.е.

$x = 8$

Заместваме x с получената стойност 8 и останалите две задачи компоненти се преобразуват в определени (сх. 7г и сх. 7д).

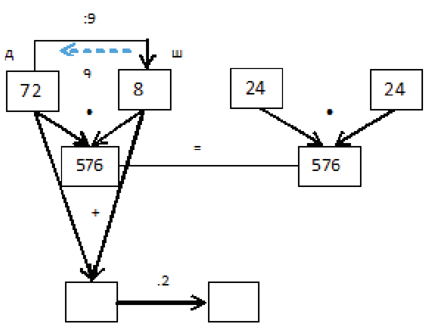


Схема 7г

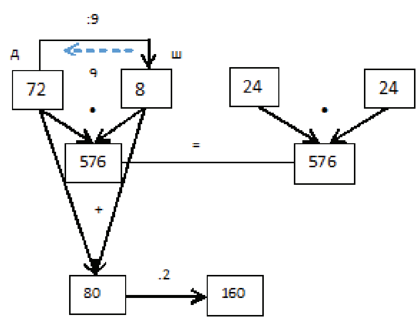


Схема 7д

Отговор. Обиколката на правоъгълника е 160 см.

4. Заключителни бележки

В статията беше показано, че с построяване на MZ-карти на аритметичните задачи се установява и наличието или отсъствието на аритметични възли в структурата на задачата. Тази „диагностика“ дава възможност да се уточни и методът за решаване на съответната задача. Ако в структурата на задачата няма аритметичен възел, задачата е решима аритметично само с попълване на каратата. Ако в структурата на задачата има аритметичен възел, то за решението е необходимо да се въведе означение на едно от неизвестните числа и да се състави математически модел от тип „уравнение“. MZ-картата на задачата играе важна помощна роля не само при уточняване на неизвестното, но и при съставяне на уравнението, тъй като дейността „съставяне“ на уравнението е аналогична на „попълване“ на картата.

ЛИТЕРАТУРА

Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика, Пловдив*: Астарта.

Динева, Е. (2013). *Задачи по математика за избираема подготовка за IV клас.* Бургас: Калоянов – ЕООД.

Лалчев, З., Върбанова, М. (2014). Инверсията – метод в началната училищна математика. *Математика и информатика, 57 (3)*, 215 – 246

Лалчев, З., Върбанова, М. (2015). Съставни аритметични задачи. Структурно-технологичен модел и MZ-карта на задачата. Текстови задачи. *Математика и информатика, 58 (4)*, 343 – 374

Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга 2. За учителя в началните класове.* София: Св. Климент Охридски.

Lalchev, Z., Varbanova, M. & Voutova, I. (2005). *Equations or transformations in primary school mathematics? Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Educations* MEDCONF 2005, 355 – 364.

REFERENCES

Varbanova, M. (2013). *Strukturno-funktsionalno modelirane v nachalnata uchilishtna matematika.* Plovdiv: Astarta.

Dineva, E. (2013). *Zadachi po matematika za izbiraema podgotovka za IV klas*. Burgas: Kaloyanov – EOOD.

Lalchev, Z., Varbanova, M. (2014). Inversiyata – metod v nachalnata uchilishtna matematika. *Matematika i informatika*, 57 (3), 215 – 246

Lalchev, Z., Varbanova, M. (2015). Sastavni aritmetichni zadachi.

Strukturno-tehnologichen model i MZ-karta na zadachata. Tekstovi zadachi. *Matematika i informatika*. 58 (4), 343 – 374
Lalchev, Z. (2009). *Matematika v zadachi i metodi. Kniga 2. Za uchitelya v nachalnite klasove.* Sofiya: Sv. Kliment Ohridski.
Lalchev, Z., Varbanova, M. & Voutova, I. (2005). Equations or transformations in primary school mathematics? *Proceedings of the 4th Mediterranean Conference on Mathematics Educations MEDCONF 2005*, 355 – 364.

ARITHMETICAL OR ALGEBRAIC METHOD IN SOLVING PRIMARY SCHOOL MATHEMATICAL PROBLEMS

Abstract. The purpose of the present paper is to outline the boundaries of the mathematical „cover“ of the arithmetical approaches in solving primary course mathematical problems. The paper studies the cases when classical didactic models of school arithmetics are „helpless“ and provoke searching of „help“ from school algebra didactics. In other words, the purpose is to show when the algebraic approach is logically unavoidable or technically excusable in solving primary school arithmetical problems. On the basis of the MZ-card of the problem the authors formulate a criterion for the necessity of introducing an unknown variable and applying a mathematical model of compound equations in solving primary school mathematical problems.

✉**Prof. Zdravko Lalchev, PhD**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1574 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉**Prof. Margarita Varbanova, PhD**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of VelikoTarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg

✉**Dr. Irina Voutova, Assist. Prof**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Sofia
5, James Boucher Blvd.
1164 Sofia, Bulgaria
E-mail: irinazv@abv.bg