Educational Technologies
Образователни технологии

ЧЕВИАНА И СИМЕДИАНА В ТРИЪГЪЛНИК. ТЕОРЕМА НА СТЮАРТ

Румяна Несторова
Враца

Резюме. В статията се разглеждат понятията чевиана, симедиана, теорема на Стюарт и някои техни приложения в несложни задачи. Целта е подходящо надграждане на геометричните познания на учениците за медиана, височина и ъглополовяща на триъгълник. Предложената разработка е насочена към гимназиалните учители, търсещи възможности за развитие на една от ключовите компетентности – математическата компетентност.

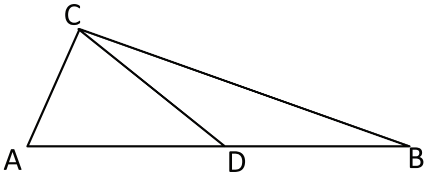
Keywords: mathematical competence, cevian, symmedian, Stewart' s theorem

В отговор на очакванията към българското училищно образование и преосмисляне на философията му основна задача на българския учител е да формира у учениците не просто знания и умения, а ключови компетентности, ориентирани към личностно развитие на ученика през целия му живот. Основните начини за развитие на компетентностите са обогатяване на знанията, усъвършенстване на уменията и придобиване на опит. Предложената разработка е в помощ на учителите, търсещи възможности за разширяване на математическата ключова компетентност. Понятията медиана, ъглополовяща и височина в триъгълник са основни геометрични понятия в прогимназиален и гимназиален етап на обучението по математика. Запознаването на учениците от гимназиален етап в ЗИП/ПП, СИП или извънкласните форми на работа по математика с понятията чевиана, симедиана, теоремата на Стюарт и някои техни приложения е подходящо разширяване на тези геометрични познания.

Определение 1. **Чевиана**[1)] от даден връх в триъгълник се нарича всяка отсечка, която съединява върха с точка от срещулежащата му страна или нейното продължение.

В някои източници вместо понятието чевиана се използва понятието недиана (Коларов et al. 1989, с.18), (Гроздев & Лесов, 2012), (Гроздев et al., 2012), (Grozdev, 2007), (Grozdev & Nenkov, 2010).

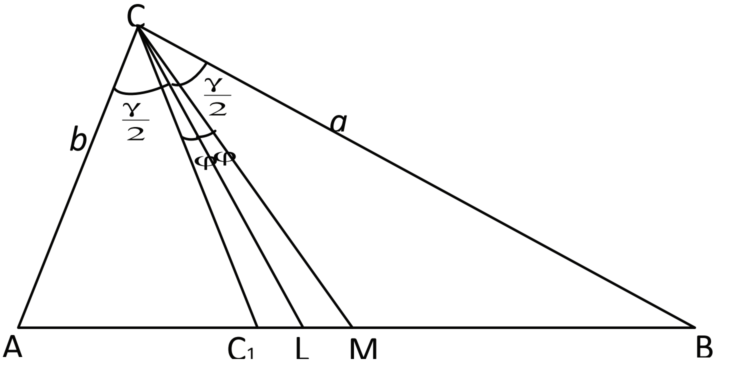
В разработката ще използваме термина недиана, синоним на термина чевиана.



Чертеж 1

На черт. 1 отсечката *CD*, където *D* – произволна точка от страната *AB* или продължението ѝ, е недиана от върха *C* в $\Delta\ ABC$.

Определение 2. **Симедиана** от даден връх в триъгълник се нарича отсечка, която съединява върха с точка от срещулежащата му страна и сключва с ъглополовящата от същия връх ъгъл, равен на ъгъла между ъглополовящата и медианата на триъгълника от дадения връх.



Чертеж 2

На черт. 2 са построени симедианата CC_1 ($C_1 \in AB$), ъглополовящата *CL* на $\angle ACB = \gamma$ ($L \in AB$), медианата *CM* ($M \in AB$) и съгласно определението $\angle C_1CL = \angle LCM = \varphi$.

От определенията за медиана, ъглополовяща и височина в даден триъгълник и дадените по-горе определения следва, че можем да разглеждаме медианата, ъглополовящата, височината и симедианата от даден връх в произволен триъгълник като **частни случаи на недианата** от този връх.

При означенията на черт. 1:

1) ако точката D е среда на $AB \Leftrightarrow AD = DB$, то отсечката CD е медианата m_c от върха C в ΔABC;

2) ако точката D лежи на страната AB и $\angle ACD = \angle BCD = \frac{\gamma}{2}$, то отсечката CD е ъглополовящата l_c на $\angle ACB = \gamma$ в ΔABC;

3) ако точката D лежи на страната AB и $CD \perp AB$, то отсечката CD е височината h_c от върха C в ΔABC;

4) ако точката D лежи на страната AB и $\angle(CD, l_c) = \angle(l_c, m_c)$, където l_c и m_c са съответно ъглополовящата и медианата от върха C, то отсечката CD е симедианата от върха C в ΔABC.

Теорема (аналог на теоремата за ъглополовящата). Всяка вътрешна симедиана в триъгълник дели срещулежащата страна на отсечки, пропорционални на квадратите на дължините на прилежащите към тях страни.

Доказателство. Ще докажем теоремата за симедианата CC_1 при означенията на черт. 2, т.е. ще докажем, че $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{b^2}{a^2}$ Аналогично теоремата се доказва и за останалите симедиани.

За лицата на ΔAC_1C и ΔBMC е в сила равенството

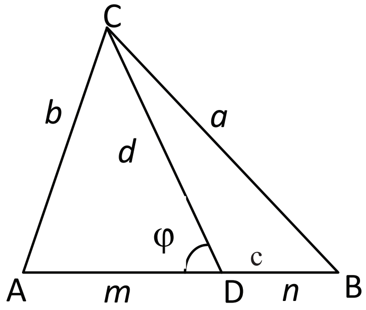
$$\frac{S_{\Delta AC_1C}}{S_{\Delta BMC}} = \frac{\frac{1}{2}.AC_1.h_{AC_1}}{\frac{1}{2}.BM.h_{BM}} = \frac{\frac{1}{2}.AC.CC_1.\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right)}{\frac{1}{2}.BC.CM.\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \varphi\right)}, \text{ но } h_{AC_1} = h_{BM} \Rightarrow \frac{AC_1}{BM} = \frac{AC.CC_1}{BC.CM} \qquad (1)$$

Аналогично за лицата на Δ AMC и Δ BC$_1$C имаме

$$\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta BC_1C}} = \frac{\frac{1}{2}.AM.h_{AM}}{\frac{1}{2}.BC_1.h_{BC_1}} = \frac{\frac{1}{2}.AC.CM.\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)}{\frac{1}{2}.BC.CC_1.\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \varphi\right)}, \text{ но } h_{AM} = h_{BC_1} \Rightarrow \frac{AM}{BC_1} = \frac{AC.CM}{BC.CC_1} \qquad (2)$$

От $AM=BM$ (CM – медиана) и почленното умножаване на (1) и (2) получаваме $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{b^2}{a^2}$.

Теорема на Стюарт[2)]. Нека е даден ΔABC със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и произволна точка D, лежаща на страната AB. Ако $CD = d$, $AD = m$, и $DB = n$, то $c.(d^2 + mn) = m.a^2 + n.b^2$ (черт.3).



Чертеж 3

Доказателство. Нека $\angle ADC = \varphi$. От косинусова теорема за ΔADC и ΔBDC получаваме $AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2.AD.CD.\cos\varphi$ (1) и $BC^2 = CD^2 + DB^2 - 2.DB.CD.\cos(180^0 - \varphi)$.

Но $\cos(180^0 - \varphi) = -\cos\varphi$, откъдето следва $BC^2 = CD^2 + DB^2 + 2.DB.CD.\cos\varphi$ (2).

Умножаваме двете страни на първото и второто равенство съответно с DB и AD и събираме почленно, в резултат на което получаваме последователно

$$AC^2.DB + BC^2.AD = CD^2.DB + AD^2.DB + CD^2.AD + DB^2.AD =$$

$$= CD^2.(AD + DB) + AD.DB.(AD + DB) = CD^2.AB + AD.DB.AB = AB.(CD^2 + AD.DB)$$

Окончателно получаваме $c.(d^2 + mn) = m.a^2 + n.b^2 \Leftrightarrow d^2 = \dfrac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n$ (последното равенство е известно още като уравнение на вятърната мелница).

Твърдението може да бъде доказано и с теоремата на Питагор (задача № 8).

Отделно ще разгледаме теоремата на Стюарт в случаите, когато точката D е от продължението на страната AB (задачи № 9 и № 10).

Чрез теоремата на Стюарт може да се намери дължината на всяка недиана в триъгълник.

Следствия от теоремата на Стюарт

Даден е $\Delta\ ABC$ със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и точка D, лежаща на страната AB, като $CD = d$, $AD = m$ и $DB = n$.

(1) Нека точката D е среда на AB, $AD = DB$ (т.е. CD – медиана) $\Leftrightarrow m = n = \dfrac{c}{2}$

$\Rightarrow\ CD^2 = d^2 = \dfrac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \dfrac{\frac{c}{2}.(a^2 + b^2)}{c} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{2.(a^2 + b^2) - c^2}{4}$ $\Rightarrow$медианата $CD = m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$, което учениците знаят от X клас.

(2) Нека точката D лежи на страната AB и $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{BC} \Leftrightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{b}{a}$ (т.е. CD – ъглополовяща) и тъй като $AD + DB = AB \Leftrightarrow m + n = c \Rightarrow m = \dfrac{bc}{a+b}$, $n = \dfrac{ac}{a+b}$ $\Rightarrow$

$$CD^2 = d^2 = \frac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \frac{\frac{bc}{a+b}.a^2 + \frac{ac}{a+b}.b^2}{c} - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} \quad \Rightarrow$$

ъглополовящата $CD = l_c = \sqrt{ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2}}$, което учениците знаят от X клас.

(3) Нека точката D лежи на страната AB и $CD \perp AB$ (т.е. CD – височина)$\Rightarrow$

$AD = AC.\cos\angle CAD \Leftrightarrow m = b.\cos\alpha$ и $DB = BC.\cos\angle CBD \Leftrightarrow n = a.\cos\beta \Rightarrow$

$$CD^2 = d^2 = \frac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \frac{b.\cos\alpha.a^2 + a.\cos\beta.b^2}{c} - a.b.\cos\alpha.\cos\beta,$$

но от косинусова теорема $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$ и $\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$, откъдето

следва, че $CD^2 = d^2 = \frac{b.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.a^2 + a.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.b^2}{c} - a.b.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} =$

$$= \frac{a^2.b^2 + a^2.c^2 - a^4}{2.c^2} + \frac{a^2.b^2 + b^2.c^2 - b^4}{2.c^2} - \frac{2.a^2.b^2 - b^4 + c^4 - a^4}{4.c^2} =$$

$$= \frac{2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4.c^2} \Rightarrow \text{височината } CD =$$

$$= h_c = \frac{1}{2.c}\sqrt{2.\left(a^2.b^2 + a^2.c^2 + b^2.c^2\right) - \left(a^4 + b^4 + c^4\right)}.$$

Чрез тази формула може да се намери директно дължината на всяка височина в триъгълник, ако са дадени неговите страни. Без познанията за теоремата на Стюарт това се постига чрез пресмятане на лицето на триъгълника по Херонова формула и използване на равенствата $h_a = \frac{2.S}{a}, h_b = \frac{2.S}{b}, h_c = \frac{2.S}{c}$.

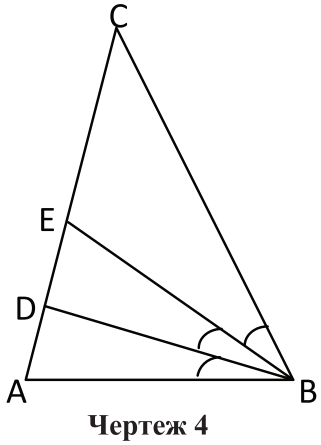
(4) Нека точката D лежи на страната AB и $\frac{AD}{DB} = \frac{AC^2}{BC^2} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{b^2}{a^2}$ (т.е. CD – симедиана) и тъй като $AD + BC = AB \Leftrightarrow m + n = c \Rightarrow m = \frac{b^2.c}{a^2 + b^2}$, $n = \frac{a^2.c}{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow CD^2 = d^2 = \frac{m.a^2 + n.b^2}{c} - m.n = \frac{\frac{b^2.c}{a^2+b^2}.a^2 + \frac{a^2c}{a^2+b^2}.b^2}{c} - \frac{a^2.b^2.c^2}{\left(a^2 + b^2\right)^2} \Rightarrow$$

дължината на симедианата $CD = \dfrac{ab}{a^2+b^2}.\sqrt{2.\left(a^2+b^2\right)-c^2}$.

Приложения в задачи

Задача 1. Недианите *BD* и *BE* на $\Delta\, ABC$ разделят $\angle\, B$ на три равни части. Да се намерят отсечките *AD, DE* и *EC*, ако *AB:BD:BE:BC*= $2:\sqrt{3}:2:2\sqrt{3}$, *AC*=12 cm и *D* е между *A* и *E*. Намерете дължините на страните *AB* и *BC* и недианите *BD* и *BE*.



Чертеж 4

Решение. Нека *AB:BD:BE:BC*= $2.k:\sqrt{3}.k:2.k:2\sqrt{3}.k$, където k – естествено число (черт.4). Съгласно условието *BD* – ъглополовяща в ΔABE, откъдето

$$\frac{AD}{DE}=\frac{AB}{BE}\Leftrightarrow\frac{AD}{DE}=\frac{2.k}{2.k}=1\Rightarrow AD=DE \qquad (1)$$

Съгласно условието *BE* – ъглополовяща в ΔDBC, откъдето

$$\frac{DE}{EC}=\frac{DB}{BC}\Leftrightarrow\frac{DE}{EC}=\frac{\sqrt{3}.k}{2\sqrt{3}.k}=\frac{1}{2}\Rightarrow EC=2.DE \qquad (2)$$

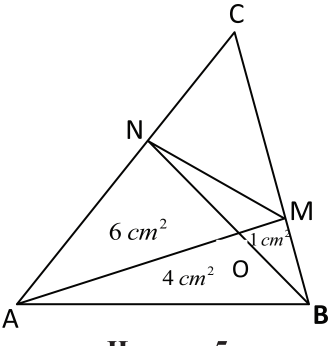
От (1), (2) и *AC*=12 cm, следва, че *AD* = *DE* = 3 cm и *EC* = 6 cm.

Ако използваме теоремата на Стюарт за недианата *BE* в ΔDBC, то

$$BE^2=\frac{EC.DB^2+DE.BC^2}{DC}-EC.DE\Leftrightarrow(2.k)^2=\frac{6.\left(\sqrt{3}.k\right)^2+3.\left(2\sqrt{3}.k\right)^2}{9}-6.3$$

$\Rightarrow k^2=9\Rightarrow k=3\Rightarrow BE=6$ cm, $DB\ =3.\sqrt{3}$ cm, $BC\ =6.\sqrt{3}$ cm и тъй като *AB = BE*, то *AB* = 6 cm. Задачата може да бъде решена и по други начини.

Задача 2. Недианите *AM* и *BN* на ΔABC се пресичат в точка О. Да се намери лицето на ΔABC, ако лицата на ΔBMO, ΔABO и ΔAON са съответно 1 cm^2, 4 cm^2 и 6 cm^2 (черт.5).



Чертеж 5

Решение. За лицата на ΔABO и ΔAON е в сила равенството $\dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AON}}=\dfrac{\frac{1}{2}.BO.h_{BO}}{\frac{1}{2}.ON.h_{ON}}$, но $h_{BO}=h_{ON}\Rightarrow$

$\dfrac{S_{\Delta ABO}}{S_{\Delta AON}}=\dfrac{BO}{ON}\Leftrightarrow\dfrac{4}{6}=\dfrac{BO}{ON}\Rightarrow\dfrac{BO}{ON}=\dfrac{2}{3}$.

Аналогично за лицата на ΔOBM и ΔOMN имаме $\dfrac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta OMN}}=\dfrac{BO}{ON}\Leftrightarrow\dfrac{1}{S_{\Delta OMN}}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow S_{\Delta OMN}=1{,}5\,cm^2$.

За лицата на ΔNBM и ΔNMC е в сила равенството $\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta AMC}}=\dfrac{BM}{MC}$, а за лицата на ΔABM и ΔAMC имаме $\dfrac{S_{\Delta NBM}}{S_{\Delta NMC}}=\dfrac{BM}{MC}$, откъдето $\dfrac{S_{\Delta NBM}}{S_{\Delta NMC}}=\dfrac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta AMC}}\Rightarrow\dfrac{2{,}5}{S_{\Delta NMC}}=\dfrac{5}{7{,}5+S_{\Delta NMC}}\Rightarrow S_{NMC}=7{,}5\ cm^2$.

$$\Rightarrow S_{ABC}=s_{ABO}+S_{AON}+s_{OBM}+s_{OMN}+s_{NMC}=4+6+1+1{,}5+7{,}5=20\ cm^2.$$

Задача 3. Намерете височината CD, медианата BM и ъглополовящата AL на ΔABC, $D\in AB$, $M\in AC$, $L\in BC$, ако дължините на страните на триъгълника са $AB=c=10$, $AC=b=5$ и $BC=a=\sqrt{77}$.

Решение. Прилагаме изведената формула за пресмятане на височината

$$CD=h_c=\frac{1}{2.c}\sqrt{2.\left(a^2.b^2+a^2.c^2+b^2.c^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}=\frac{\sqrt{2\left(\sqrt{77}^2.5^2+\sqrt{77}^2.10^2+5^2.10^2\right)-\left(\sqrt{77}^4+5^4+10^4\right)}}{2.10}$$

$$\Rightarrow CD=h_c=\frac{\sqrt{2(77.25+77.100+25.100)-\left(77^2+25^2+100^2\right)}}{2.10}=\frac{\sqrt{24250-16554}}{20}=\frac{\sqrt{7696}}{20}=\frac{\sqrt{481}}{5}.$$

Без следствията от теоремата на Стюарт, за да намерим височината CD, трябва да пресметнем лицето S на $\Delta\ ABC$ по Хероновата формула $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, където $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, т.е.

$S=\sqrt{\left(\dfrac{15+\sqrt{77}}{2}\right)\left(\dfrac{15-\sqrt{77}}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{77}+5}{2}\right)\left(\dfrac{\sqrt{77}-5}{2}\right)}=\sqrt{\left(\dfrac{15^2-77}{4}\right)\left(\dfrac{77-5^2}{4}\right)}=\sqrt{481}$ и от равенството $h_c=\dfrac{2.S}{c}$ получаваме $h_c=\dfrac{2.\sqrt{481}}{10}=\dfrac{\sqrt{481}}{5}$.

За намиране на медианата BM прилагаме познатата формула $BM = m_b = \frac{1}{2}.\sqrt{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2} = \frac{1}{2}.\sqrt{2\left(\sqrt{77}^2 + 10^2\right) - 5^2} = \frac{\sqrt{329}}{2}$.

От формулата $AL = l_a = \sqrt{b\quad - \frac{bca^2}{(b+c)^2}}$ намираме

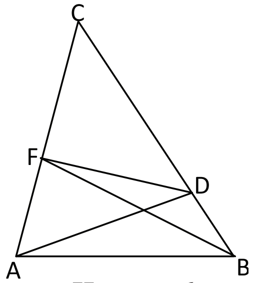
$$AL = l_a = \sqrt{5.10 - \frac{5.10.\sqrt{77}^2}{(5+10)^2}} = \sqrt{\frac{296}{9}} = \frac{2.\sqrt{74}}{3}.$$

Задача 4. Докажете, че в правоъгълен триъгълник ΔABC ($\angle C = 90^0$) симедианата CD ($D \in AB$) към хипотенузата съвпада с височината h_c към хипотенузата.

Решение. Съгласно изведената формула симедианата $CD = \frac{ab}{a^2 + b^2}.\sqrt{2.\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$.

По условие ΔABC – правоъгълен, следователно $a^2 + b^2 = c^2$ и лицето $S = \frac{a.b}{2} = \frac{c.h_c}{2}$. Окончателно получаваме $CD = \frac{ab}{c^2}.\sqrt{2.c^2 - c^2} = \frac{a.b}{c} = \frac{2.S}{c} = h_c$.

Задача 5. Отсечките AD и BF са съответно недиана и ъглополовяща в ΔABC, $D \in BC$, $F \in AC$. Да се намери FD, ако $AC = 7$, $AF = 3$, $CD = 5$ и $DB = 4$.



Чертеж 6

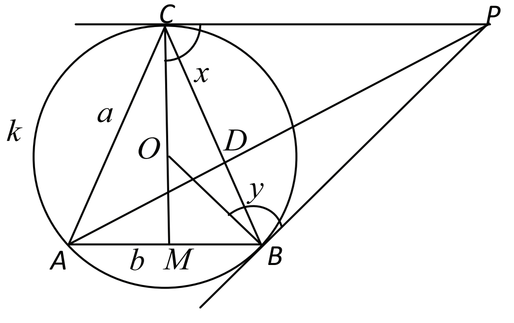
Решение. $FC = AC - AF = 4$, $CB = CD + DB = 9$ (черт.6).

От BF – ъглополовяща, следва $\frac{AB}{CB} = \frac{AF}{FC} \Leftrightarrow \frac{AB}{9} = \frac{3}{4} \Rightarrow AB = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$. Ъглополовящата $BF = \sqrt{AB.BC - AF.FC} = \sqrt{\frac{27}{4}.9 - 3.4} = \sqrt{\frac{195}{4}}$.

Прилагаме теоремата на Стюарт за недианата FD в ΔBCF и получаваме $FD^2 = \frac{CD.FB^2 + DB.FC^2}{CB} - CD.DB = \frac{5.\left(\sqrt{\frac{195}{4}}\right)^2 + 4.4^2}{9} - 5.4 \Rightarrow FD = \frac{\sqrt{511}}{6}$.

Даденото решение е примерно, задачата може да бъде решена и по други начини.

Задача 6. В окръжност е вписан ΔABC, в който $AC = CB = a$ и $AB = b$. През върховете B и C са построени допирателни, пресичащи се в точка P, а D е пресечната точка на BC и AP. Намерете CD, DB и AD.



Чертеж 7

Решение. Ако точката О е център на описаната окръжност k, то от условието $AC = CB = a$ следва, че О $\in CM$, където $CM \perp AB$, $M \in AB$ (черт.7). Построяваме допирателните към k в точките B и C и пресечната им точка P, откъдето следва $CP = BP$.

От $CP \perp CO$, $CM \perp AB \Rightarrow CP \parallel AB$

$\Rightarrow \angle PCB = \angle ABC$ като кръстни ъгли (1).

От $AC = CB \Rightarrow \angle CAB = \angle ABC$ (2)

и от $CP = BP \Rightarrow \angle PCB = \angle CBP$ (3).

Освен това $\angle CDP = \angle ADB$ като връхни ъгли (4). От подобието на ΔABC и ΔCBP съгласно (1), (2) и (3) следва $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{CB}{CP} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{CP} \Rightarrow CP = \dfrac{a^2}{b}$.

От подобието на ΔPDC и ΔADB съгласно (1) и (4) следва $\dfrac{CP}{AB} = \dfrac{CD}{DB} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{a^2}{b}}{b} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^2}{b^2}$ (5), където $x = CD$, $y = DB$.

Но $CD+DB=CB \Leftrightarrow x+y=a$ (6). От (5) и (6) получаваме системата $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = \dfrac{a^2}{b^2} \\ x+y=a \end{array} \right.$

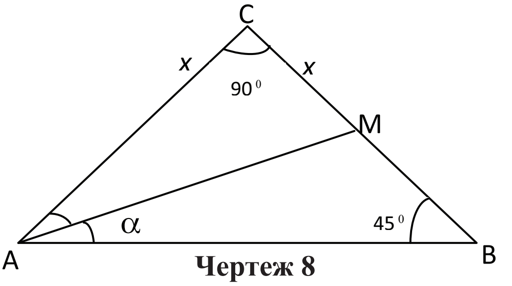
с решения $x = CD = \dfrac{a^3}{a^2+b^2}$, $y = DB = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2}$. Прилагаме теоремата на Стюарт за недианата AD в ΔABC и получаваме

$$AD^2 = \frac{CD.AB^2 + DB.AC^2}{CB} - CD.DB = = \frac{\frac{a^3}{a^2+b^2}.b^2 + \frac{ab^2}{a^2+b^2}.a^2}{a} - \frac{a^3}{a^2+b^2}.\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{ab}{a^2+b^2}.\sqrt{2b^2+a^2}\ .$$

По-наблюдателните ученици могат още от равенство (5) да стигнат до извода, че AD е симедиана и да намерят дължината ѝ по съответната формула.

Задача 7[3]**.** Отсечката AM ($M \in BC$) е недиана в равнобедрения правоъгълен ΔABC ($AC = BC$). Да се намери sin $\angle CAM$, ако $\sin \angle MAB = 1-k$. При коя стойност на k недианата AM е ъглополовяща на $\angle CAB$?



Чертеж 8

Решение. Нека $\angle MAB = \alpha \Rightarrow \sin\ \angle CAM = \sin\ (45^0 - a)$

$$\Rightarrow \sin \angle CAM = \frac{\sqrt{2}}{2}.\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}.\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1-(1-k)^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.(1-k)$$

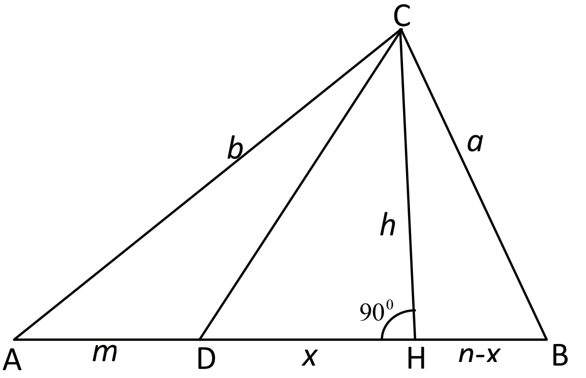
$$\Rightarrow \sin \angle CAM = \frac{\sqrt{2}.\left(\sqrt{2k-k^2} + k - 1\right)}{2}\ .$$

Ако AM е ъглополовяща на $\angle CAB$, то $\sin\angle MAB = 1-k = \sin\frac{45^0}{2}$, но

$$\sin\frac{45^0}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow 1-k = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow k = \frac{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Задачи за самостоятелна работа

Задача 8. Докажете теоремата на Стюарт чрез теоремата на Питагор.



Чертеж 9

Упътване[4]**:** постройте височината CH ($H \in AB$) и при означенията на черт.9 приложете Питагорова теорема за ΔHBC, ΔAHC и ΔDHC и идеята от доказателството чрез косинусова теорема.

Задача 9. Нека е даден ΔABC със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и точка D, лежаща на правата AB. Ако точката B лежи между точките A и D, $CD = d$, $AD = m$ и $DB = n$, то докажете, че $c.(d^2 - mn) = m.a^2 - n.b^2$.

Упътване. Приложете теоремата на Стюарт за недианата CB в ΔADC.

Задача 10. Нека е даден ΔABC със страни $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ и точка D, лежаща на правата AB. Ако точката A лежи между точките D и B, $CD = d$, $AD = m$ и $DB = n$, то докажете, че $c.(d^2 - mn) = -m.a^2 + n.b^2$.

Упътване: приложете теоремата на Стюарт за недианата CA в ΔDBC.

NOTES / БЕЛЕЖКИ:

1. http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/1190794
2. *https://bg.wikipedia.org/wiki/Теорема_на_Стюарт*
3. https://www.math10.com/forumbg/viewtopic.php?t=13068
4. https://www.math10.com/forumbg/viewtopic.php?t=9564

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Kolarov, K., V. Mihaylov, P. Arnaudov, H. Lesov & U. Batalska (1989). Sbornik ot zadachi po geometriya VII – X klas (s.18, 25, 45, 66, 113). Sofia: Izd. „Narodna prosveta“. [Коларов, К., В. Михайлов, П. Арнаудов, Х. Лесов & У. Баталска (1989). *Сборник от задачи по геометрия VII – X клас* (с.18, 25, 45, 66, 113). София: Народна просвета.]

Paskalev, G. & I. Chobanov (1985). Zabelezhitelni tochki v triagalnika (s. 81). Sofia: Izd. „Narodna prosveta“. [Паскалев, Г. & И. Чобанов *(*1985). *Забележителни точки в триъгълника* (с. 81). София: Народна просвета.]

Grozdev, S. & H. Lesov (2012). Zimni matematicheski sastezaniya. Sofia: VUZF. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 stranitsi. [Гроздев, С. & Х. Лесов (2012). *Зимни математически състезания*. София: ВУЗФ. (ISBN 978-954-8590-17-4), 351 страници.]

Grozdev, S., V. Nenkov & S. Doychev (nauchna redaktsiya) (2012). Za visoki postizheniya v matematikata (v pomosht na uchitelya). Sofia: Fondatsii “M. Balkanski” i “Amerika za Balgaria”. (ISBN 978-954-92830-3-7), 204 stranitsi. [Гроздев, С., В. Ненков & С. Дойчев (научна редакция) (2012). *За високи постижения в математиката (в помощ на учителя)*. София: Фондации „М. Балкански“ и „Америка за България“. (ISBN 978-954-92830-3-7), 204 страници.]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

Grozdev, S. & V. Nenkov (2010). Two Remarkable Points of the Triangle Geometry. *Research and Education in Mathematics, Informatics and their Applications (REMIA 2010), Proceedings of the Anniversary International Conference Dedicated to the 40-th Anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Plovdiv University, 10 – 12 December, 2010*, Plovdiv, 349 – 354 (ISBN 978-954-423-648-9).

CEVIAN AND SYMMEDIAN IN THE TRIANGLE. STEWART' S THEOREM

Abstract. The article examines the concepts of cevian, symmedian, Stewart' s theorem and some of their applications in simple tasks. The aim is an appropriate upgrade of students geometric knowledge related to the median, the angle bisector and the altitude in the triangle. The proposed research is directed to High school teachers looking for opportunities to develop one of the key competences – the mathematical one.

✉ **Mrs. Rumyana Nestorova, PhD student**
3000 Vratsa, Bulgaria,
E-mail: rumiana_nestorova@abv.bg