Educational Technologies
Образователни технологии

ОБОБЩЕНИЕ НА ТЕОРЕМАТА НА ЧЕЗАР КОШНИЦА

[1] Сава Гроздев, [2] Веселин Ненков
[1] Висше училище по застраховане и финанси
[2] Технически колеж – Ловеч

Резюме. Във връзка с описаните за даден триъгълник ABC конични сечения е установено едно обобщение на теорема на Чезар Кошница. Описаното обобщение е свързано със специални криви в равнината на ΔABC и спрегнати спрямо описаното конично сечение точки.
Keywords: triangle, conic, Euler circle, Euler line, conjugate lines

Увод. За произволен неправоъгълен триъгълник ABC с център на описаната окръжност O е известна следната теорема на Кошница: *Ако центровете на описаните окръжности за ΔBCO, ΔCAO и ΔABO са съответно O_a, O_b и O_c, то правите AO_a, BO_b и CO_c се пресичат в една точка* (Simeonov, 1992).

Оказва се, че теоремата на Кошница може да се обобщи, като описаната около ΔABC окръжност се замени с произволно описано за ΔABC конично сечение $\bar{k}(O)$, което има за център точка O, нележаща на никоя от страните BC, CA и AB. От друга страна, в специалния случай, когато O лежи на някоя от страните BC, CA и AB, се получава интересен вариант на теоремата на Кошница. Затова ще разгледаме двата случая поотделно.

Разглеждаме произволен триъгълник ABC. Спрямо ΔABC ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$ (Paskalev & Chobanov, 2015). Средите на страните BC, CA и AB означаваме съответно с $M_a\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$ и $M_c\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, а с $G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ – медицентъра ΔABC. В равнината на ΔABC ще разглеждаме произволно конично сечение $\bar{k}(O)$ с център $O(x_0, y_0, z_0)$ $(x_0 + y_0 + z_0 = 1)$.

Преди да преминем към обобщението на теоремата на Кошница, ще припомним някои понятия, които са свързани с това обобщение.

Описана крива и асоциирани с нея Ойлерова права и Ойлерова крива. Спрегнати точки спрямо описана крива. Забележителните за триъгълника права на Ойлер и окръжност на Ойлер могат да се обобщят спрямо произволна описана за ΔABC крива $\overline{k}(O)$. Освен това изогоналното изображение в равнината на ΔABC може да се обобщи спрямо $\overline{k}(O)$. Ще разгледаме различните възможности в зависимост от положението на центъра O в равнината на ΔABC.

1. Центърът $O(x_0, y_0, z_0)$ на $\overline{k}(O)$ е точка, различна от M_a, M_b и M_c. В този случай координатите на точките от $\overline{k}(O)$ удовлетворяват уравнението

$$(1)\quad \overline{k}(O):\quad (1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy=0\quad .$$

Определяме правите h_a, h_b и h_c като минаващи съответно през върховете A, B и C и успоредни съответно на правите OM_a, OM_b и OM_c. Тези прави се пресичат в една точка $H(1-2x_0, 1-2y_0, 1-2z_0)$, която се получава от O посредством равенството $\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Тъй като точката H притежава свойства, подобни на ортоцентъра, ще я наричаме *ортоид на ΔABC относно* $\overline{k}(O)$, а правата OH – *Ойлерова права, асоциирана с* $\overline{k}(O)$. Средите на отсечките AH, BH, CH и точките M_a, M_b, M_c, $h_a \cap BC$, $h_b \cap CA$, $h_c \cap AB$ лежат на едно конично сечение Ω, което наричаме *Ойлерова крива, асоциирана с* $\overline{k}(O)$ (Grozdev & Nenkov, 2014). Ойлеровата крива Ω има за център средата $F\left(\frac{1-x_0}{2}, \frac{1-y_0}{2}, \frac{1-z_0}{2}\right)$ на отсечката OH.

Двойките изогонално спрегнати точки спрямо ΔABC също могат да се обобщят по отношение на описаното централно коничното сечение $\overline{k}(O)$. Нека $P(x_P, y_P, z_P)$ $(x_P+y_P+z_P=1)$ е точка от равнината на ΔABC, която не лежи върху $\overline{k}(O)$. Еднозначно е определена точката $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, чиито координати са следните:

$$(2)\quad x_Q=\frac{(1-2x_0)x_0y_Pz_P}{\vartheta(P)},\ y_Q=\frac{(1-2y_0)y_0z_Px_P}{\vartheta(P)},\ z_Q=\frac{(1-2z_0)z_0x_Py_P}{\vartheta(P)},$$

където $\vartheta(P)=(1-2x_0)x_0y_Pz_P+(1-2y_0)y_0z_Px_P+(1-2z_0)z_0x_Py_P$.

Точката Q ще наричаме *спрегната на* P *спрямо* $\overline{k}(O)$.

2. Центърът O на $\overline{k}(O)$ е някоя от точките M_a, M_b и M_c. Нека $O \equiv M_c$ и $C_1(l,m,0)$ $(l+m=1)$ е точка от правата AB. Тогава съществува единствена крива $\overline{k}(O) \equiv \overline{k}(M_c, C_1)$ с център в точката M_c, която има следното уравнение

(3) $\overline{k}(M_c, C_1)$: $lyz + mzx + xy = 0$, $(l+m=1)$.

В този случай разглеждаме *ортоида H* като точка, съвпадаща с върха *C*, а *Ойлеровата права* е правата CM_c. *Ойлеровата крива* $\Omega(M_c, C_1)$ определяме като минаваща през M_a, M_b, M_c, C и C_1 (тази крива е единствена, защото минава през пет различни точки). Центърът на $\Omega(M_c, C_1)$ е средата $F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ на отсечката CM_c.

Ако точката P не лежи върху $\overline{k}(M_c, C_1)$, то еднозначно е определена точка $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, чиито координати са следните:

(4) $x_Q = \dfrac{ly_P z_P}{\vartheta(P, C_1)}$, $y_Q = \dfrac{mz_P x_P}{\vartheta(P, C_1)}$, $z_Q = \dfrac{x_P y_P}{\vartheta(P, C_1)}$,

където $\vartheta(P, C_1) = ly_P z_P + mz_P x_P + x_P y_P$.

Точката Q ще наричаме *спрегната на* P *спрямо* $\overline{k}(M_c, C_1)$.

Обобщение на теоремата на Кошница. Нека центърът O на $\overline{k}(O)$ не лежи върху никоя от правите BC, CA и AB. Основната част в намирането на обобщение на теоремата на Кошница е откриването на подходящи точки, които да заменят центровете на описаните окръжности. Центровете на описаните окръжности са пресечни точки на симетрали. От друга страна, симетралите са прави, които минават през средите на страните на триъгълника и са спрегнати с тях спрямо описаната окръжност на ΔABC. Затова ще заменим симетралите на отсечките OA, OB и OC със съответните им спрегнати спрямо $\overline{k}(O)$ прави, минаващи съответно през средите на OA, OB и OC.

Нека s_a е спрегната права на OA спрямо $\overline{k}(O)$, минаваща през средата на отсечката OA. По същия начин през средите на отсечките OB и OC определяме съответно правите s_b и s_c. Ще намерим координатите на точките $s_b \cap s_c = O_a$, $s_c \cap s_a = O_b$ и $s_a \cap s_b = O_c$. За целта трябва да намерим уравненията на правите s_a, s_b и s_c.

От резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2015), следва, че ако векторът $\vec{v}\left(v_1, v_2, v_3\right)$ е спрегнат с вектора $\vec{u}\left(u_1, u_2, u_3\right)$, то са изпълнени равенствата

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&v_1 = \left(1-2x_0\right)\left[\left(y_0 - z_0\right)u_1 - x_0 u_2 + x_0 u_3\right],\\
&v_2 = \left(1-2y_0\right)\left[y_0 u_1 + \left(z_0 - x_0\right)u_2 - y_0 u_3\right],\\
&v_3 = \left(1-2z_0\right)\left[-z_0 u_1 + z_0 u_2 + \left(x_0 - y_0\right)u_3\right].
\end{aligned}
$$

От (5) следва, че спрегнати вектори на $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са съответно

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(z_0 - y_0\right)\left(1-2x_0\right), -\left(1-2y_0\right)y_0, \left(1-2z_0\right)z_0\right),\\
&\left(\left(1-2x_0\right)x_0, \left(x_0 - z_0\right)\left(1-2y_0\right), -\left(1-2z_0\right)z_0\right),\\
&\left(-\left(1-2x_0\right)x_0, \left(1-2y_0\right)y_0, \left(y_0 - x_0\right)\left(1-2z_0\right)\right).
\end{aligned}
$$

Оттук за параметричните уравнения на правите s_a, s_b и s_c намираме:

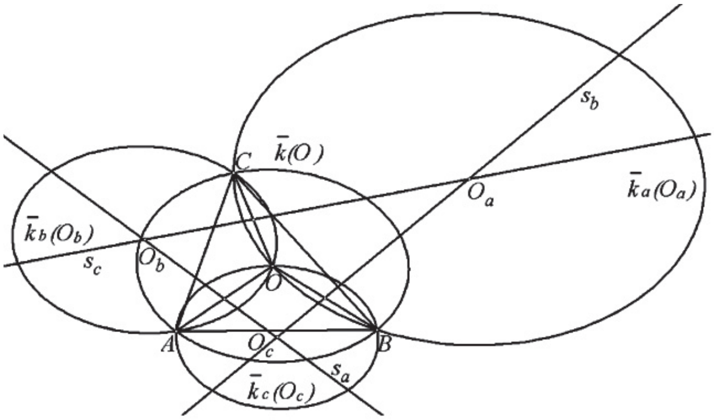
$$
\begin{aligned}
&s_a : x = \frac{1+x_0}{2} + \left(z_0 - y_0\right)\left(1-2x_0\right)t_a,\ y = \frac{y_0}{2} - \left(1-2y_0\right)y_0 t_a,\ z = \frac{z_0}{2} + \left(1-2z_0\right)z_0 t_a,\\
&s_b : x = \frac{x_0}{2} + \left(1-2x_0\right)x_0 t_b,\ y = \frac{1+y_0}{2} + \left(x_0 - z_0\right)\left(1-2y_0\right)t_b,\ z = \frac{y_0}{2} - \left(1-2z_0\right)z t_b,\\
&s_c : x = \frac{x_0}{2} - \left(1-2x_0\right)x_0 t_c,\ y = \frac{y_0}{2} + \left(1-2y_0\right)y_0 t_c,\ z = \frac{1+z_0}{2} + \left(y_0 - x_0\right)\left(1-2z_0\right)t_c.
\end{aligned}
$$

От последните уравнения определяме координатите на точките O_a, O_b и O_c във вида:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
&O_a\left(\frac{x_0\left(2y_0 z_0 + 2x_0 - 1\right)}{\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}, \frac{y_0\left(1-z_0\right)}{1-2z_0}, \frac{z_0\left(1-y_0\right)}{1-2y_0}\right),\\
&O_b\left(\frac{x_0\left(1-z_0\right)}{1-2z_0}, \frac{y_0\left(2z_0 x_0 + 2y_0 - 1\right)}{\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)}, \frac{z_0\left(1-x_0\right)}{1-2x_0}\right),\\
&O_c\left(\frac{x_0\left(1-y_0\right)}{1-2y_0}, \frac{y_0\left(1-x_0\right)}{1-2x_0}, \frac{z_0\left(2x_0 y_0 + 2z_0 - 1\right)}{\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Точките O_a, O_b и O_c са центрове на конични сечения $\overline{k}_a\left(O_a\right)$, $\overline{k}_b\left(O_b\right)$ и $\overline{k}_c\left(O_c\right)$, които са описани съответно за ΔBCO, ΔCAO и ΔABO. От (6) лесно се определя, че уравненията на тези криви са следните:

$$(7)\quad \begin{aligned} &\overline{k}_a(O_a):\ (1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy-y_0z_0x(x+y+z)=0,\\ &\overline{k}_b(O_b):\ (1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy-z_0x_0y(x+y+z)=0,\\ &\overline{k}_c(O_c):\ (1-2x_0)x_0yz+(1-2y_0)y_0zx+(1-2z_0)z_0xy-x_0y_0z(x+y+z)=0.\end{aligned}$$



Фигура 1

Интересно е да се определи видът на кривите $\overline{k}_a(O_a)$, $\overline{k}_b(O_b)$ и $\overline{k}_c(O_c)$ в зависимост от вида на $\overline{k}(O)$. От (7) и резултатите, получени в (Grozdev & Nenkov, 2014,a), следват твърденията:

Теорема 1. *Ако кривата* $\overline{k}(O)$ *е елипса, то кривите* $\overline{k}_a(O_a)$, $\overline{k}_b(O_b)$ *и* $\overline{k}_c(O_c)$ *са елипси, хомотетични на* $\overline{k}(O)$ (фиг. 1).

Теорема 2. *Ако кривата* $\overline{k}(O)$ *е хипербола, то кривите* $\overline{k}_a(O_a)$, $\overline{k}_b(O_b)$ *и* $\overline{k}_c(O_c)$ *са хиперболи, хомотетични на* $\overline{k}(O)$ *или на нейната спрегната* $\overline{k}(O)$.

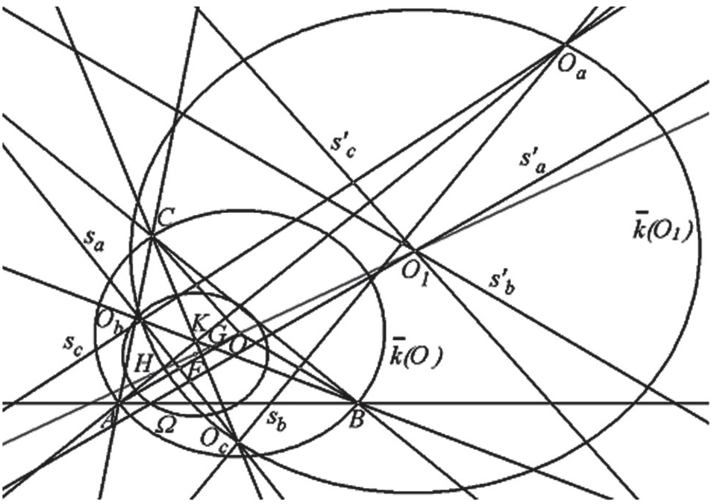
От теорема 1 следва, че когато $\overline{k}(O)$ е окръжност, кривите $\overline{k}_a(O_a)$, $\overline{k}_b(O_b)$ и $\overline{k}_c(O_c)$ са окръжностите от теоремата на Кошница. Така, за да получим желаното обобщение, остава да проверим дали правите AO_a, BO_b и CO_c минават през една точка. Затова от (6) определяме уравненията на тези прави във вида:

$$AO_a:(1-y_0)(1-2z_0)z_0y-(1-z_0)(1-2y_0)y_0z=0,$$
$$BO_b:(1-x_0)(1-2z_0)z_0x-(1-z_0)(1-2x_0)x_0z=0,$$
$$CO_c:(1-x_0)(1-2y_0)y_0x-(1-y_0)(1-2x_0)x_0y=0.$$

След несложни пресмятания от последните равенства намираме, че правите AO_a, BO_b и CO_c минават през точката K, която има следните координати

(8) $$K\left(\frac{(1-y_0)(1-z_0)(1-2x_0)x_0}{\tau},\frac{(1-z_0)(1-x_0)(1-2y_0)y_0}{\tau},\frac{(1-x_0)(1-y_0)(1-2z_0)z_0}{\tau}\right),$$

където $\tau=(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)+3x_0y_0z_0$.



Фигура 2

Точката K е безкрайна, когато за координатите на центъра O е изпълнено равенството $\tau=0$. Това означава, че правите AO_a, BO_b и CO_c са успоредни и направлението им се определя от вектора

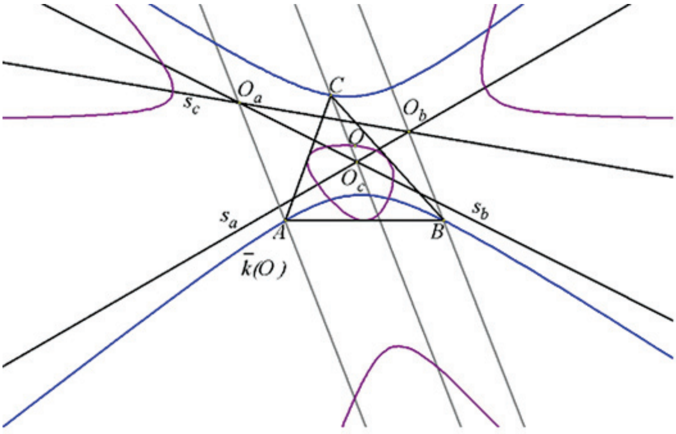
$$\left((1-y_0)(1-z_0)(1-2x_0)x_0,(1-z_0)(1-x_0)(1-2y_0)y_0,(1-x_0)(1-y_0)(1-2z_0)z_0\right).$$

Така получихме следните твърдения.

Теорема 3. *Правите AO_a, BO_b и CO_c минават през една крайна или безкрайна точка K* (фиг. 2, 3).

Теорема 4. *Правите AO_a, BO_b и CO_c са успоредни тогава и само тогава, когато O лежи върху кривата от трета степен* $(1-2x_0)(1-2y_0)(1-2z_0)+3x_0y_0z_0=0$ (фиг. 3).

Теорема 3 се явява обобщение на формулираната в началото теорема на Кошница. Затова точката K (крайна или безкрайна) ще наричаме *точка на Кошница спрямо* $\bar{k}(O)$. От теорема 4 следва, че точката на Кошница е безкрайна само когато центърът на $\bar{k}(O)$ е точка от една специална крива от трета степен. Случаят, в който K е крайна, също се характеризира със забележително свойство. Той е свързан със спрегнатостта спрямо $\bar{k}(O)$. След заместване на координатите (8) в равенствата (2) се вижда, че спрегнатата



Фигура 3

точка на K е точката $F\left(\frac{1-x_0}{2},\frac{1-y_0}{2},\frac{1-z_0}{2}\right)$, която е центърът на Ойлеровата крива, асоциирана с $\bar{k}(O)$. Така получихме следното

Следствие 1. *Точката на Кошница и центърът на Ойлеровата крива, асоциирана с $\bar{k}(O)$, са спрегнати точки спрямо $\bar{k}(O)$.*

От следствие 1 се получава, че когато $\bar{k}(O)$ е описаната за ΔABC окръжност, точката на Кошница е изогонално спрегната с центъра на Ойлеровата окръжност.

Едно конично сечение с център върху Ойлеровата права. Освен точката на Кошница с центровете O_a, O_b и O_c на кривите $\bar{k}_a(O_a)$, $\bar{k}_b(O_b)$ и $\bar{k}_c(O_c)$ е свързано и едно специално конично сечение, което е описано около $\Delta O_aO_bO_c$.

Нека s_a е спрегнатата права на O_bO_c спрямо $\bar{k}(O)$, минаваща през средата на отсечката O_bO_c. По същия начин през средите на отсечките O_cO_a и O_aO_b определяме съответно правите s_b и s_c. Тъй като векторите $(1-x_0,-y_0,z_0)$, $(-x_0,1-y_0,-z_0)$ и $(-x_0,-y_0,1-z_0)$ са спрегнати съответно на $\overrightarrow{O_bO_c}$, $\overrightarrow{O_cO_a}$ и $\overrightarrow{O_aO_b}$, то параметричните уравнения на правите s_a', s_b' и s_c' се представят във вида

$$s'_a:\begin{cases} x=\dfrac{\left(4y_0z_0+3x_0-1\right)x_0}{2\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}+\left(1-x_0\right)t'_a, \\ y=\dfrac{\left(4z_0x_0+3y_0-z_0-1\right)y_0}{2\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)}-y_0t'_a, \\ z=\dfrac{\left(4x_0y_0+3z_0-y_0-1\right)z_0}{2\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)}-z_0t'_a, \end{cases} \qquad s'_b:\begin{cases} x=\dfrac{\left(4y_0z_0+3x_0-z_0-1\right)x_0}{2\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}-x_0t'_b, \\ y=\dfrac{\left(4z_0x_0+3y_0-1\right)y_0}{2\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)}+\left(1-y_0\right)t'_b, \\ z=\dfrac{\left(4x_0y_0+3z_0-x_0-1\right)z_0}{2\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)}-z_0t'_b, \end{cases}$$

$$s'_c:\begin{cases} x=\dfrac{\left(4y_0z_0+3x_0-y_0-1\right)x_0}{2\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}-x_0t'_c, \\ y=\dfrac{\left(4z_0x_0+3y_0-x_0-1\right)y_0}{2\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)}-y_0t'_c, \\ z=\dfrac{\left(4x_0y_0+3z_0-1\right)z_0}{2\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)}+\left(1-z_0\right)t'_c. \end{cases}$$

Чрез тези уравнения установяваме, че правите s'_a, s'_b и s'_c се пресичат в една точка O_1, която има следните координати

$$(9)\quad O_1\left(\frac{\left[\Delta-\left(1-3x_0\right)y_0z_0\right]x_0}{\Delta},\frac{\left[\Delta-\left(1-3y_0\right)z_0x_0\right]y_0}{\Delta},\frac{\left[\Delta-\left(1-3z_0\right)x_0y_0\right]z_0}{\Delta}\right),$$

където $\Delta=\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)$.

Точката O_1 е център на конично сечение $\overline{k}\left(O_1\right)$, което е описано за $\Delta O_aO_bO_c$. Ще определим уравнението на $\overline{k}\left(O_1\right)$. За целта извършваме смяна на координатния триъгълник ABC с $O_aO_bO_c$. Ако координатите на точка P спрямо ΔABC са $\left(x,y,z\right)$, а спрямо $\Delta O_aO_bO_c$ са $\left(x',y',z'\right)$, то са изпълнени равенствата

$$x=\frac{x_0\left(2y_0z_0+2x_0-1\right)}{\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}x'+\frac{x_0\left(1-z_0\right)}{1-2z_0}y'+\frac{x_0\left(1-y_0\right)}{1-2y_0}z',$$

$$y=\frac{y_0\left(1-z_0\right)}{1-2z_0}x'+\frac{y_0\left(2z_0x_0+2y_0-1\right)}{\left(1-2z_0\right)\left(1-2x_0\right)}y'+\frac{y_0\left(1-x_0\right)}{1-2x_0}z',$$

$$z=\frac{z_0\left(1-y_0\right)}{1-2y_0}x'+\frac{z_0\left(1-x_0\right)}{1-2x_0}y'+\frac{z_0\left(2x_0y_0+2z_0-1\right)}{\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)}z'.$$

От тези равенства следва

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
x' &= -\frac{1}{y_0 z_0}\Big[x_0 y_0 z_0 x + z_0\left(x_0 y_0 + 2z_0 - 1\right)y + y_0\left(z_0 x_0 + 2y_0 - 1\right)z\Big],\\
y' &= -\frac{1}{z_0 x_0}\Big[z_0\left(x_0 y_0 + 2z_0 - 1\right)x + x_0 y_0 z_0 y + x_0\left(y_0 z_0 + 2x_0 - 1\right)z\Big],\\
z' &= -\frac{1}{x_0 y_0}\Big[y_0\left(z_0 x_0 + 2y_0 - 1\right)x + x_0\left(y_0 z_0 + 2x_0 - 1\right)y + x_0 y_0 z_0 z\Big].
\end{aligned}
$$

От (10) следва, че координатите $\left(x'_{O_1}, y'_{O_1}, z'_{O_1}\right)$ на O_1 спрямо $\Delta O_a O_b O_c$ се изразяват с равенствата

$$
(11)\quad x'_{O_1} = x_0^2\left(1 - 2x_0 - 2y_0 z_0\right),\ y'_{O_1} = y_0^2\left(1 - 2y_0 - 2z_0 x_0\right),\ z'_{O_1} = z_0^2\left(1 - 2z_0 - 2x_0 y_0\right).
$$

Сега заместваме (10) и (11) в уравнението $x_0^2 y'z' + y_0^2 z'x' + z_0^2 x'y' = 0$ на $\overline{k}_1\left(O_1\right)$ спрямо $\Delta O_a O_b O_c$ и получаваме уравнението 3   спрямо ΔABC във вида

$$
\overline{k}\left(O_1\right):
\begin{aligned}
&\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)\Big[\left(1-2x_0\right)x_0 yz + \left(1-2y_0\right)y_0 zx + \left(1-2z_0\right)z_0 xy\Big] +\\
&+ x_0 y_0 z_0\Big[\left(3y_0 z_0 + 2x_0 - 1\right)x_0 x + \left(3z_0 x_0 + 2y_0 - 1\right)y_0 y + \left(3x_0 y_0 + 2z_0 - 1\right)z_0 z\Big]\left(x + y + z\right) = 0.
\end{aligned}
$$

От уравнението на $\overline{k}\left(O_1\right)$ и резултатите, получени в (Гроздев & Ненков, 2014,a), следва следната:

Теорема 5. *Кривата* $\overline{k}\left(O_1\right)$ *е хомотетична на* $\overline{k}\left(O\right)$ *с коефициент на хомотетия* $\pm\dfrac{x_0 y_0 z_0}{\left(1-2x_0\right)\left(1-2y_0\right)\left(1-2z_0\right)}$.

Оттук следва, че *кривите* $\overline{k}\left(O\right)$ *и* $\overline{k}\left(O_1\right)$ *са от един и същи вид*. Това се уточнява чрез следните следствия:

Следствие 2. *Ако кривата* $\overline{k}\left(O\right)$ *е елипса, то кривата* $\overline{k}\left(O_1\right)$ *е елипса* (фиг. 2).

Следствие 3. *Ако кривата* $\overline{k}\left(O\right)$ *е хипербола, то кривата* $\overline{k}\left(O_1\right)$ *е хипербола.*

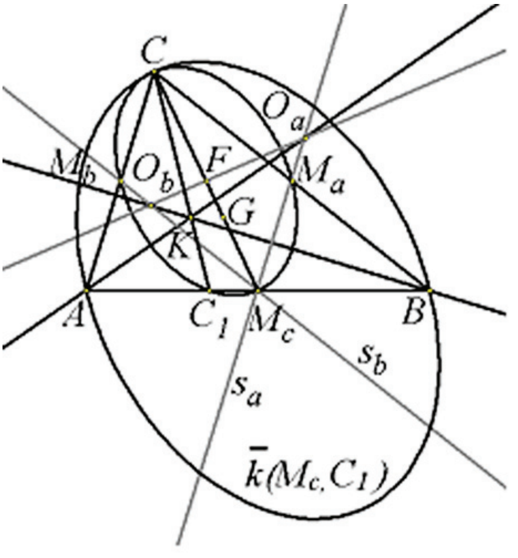
Като използваме координатите (9) на O_1, след известни несложни пресмятания установяваме, че O_1 лежи на една права с точките $O\left(x_0, y_0, z_0\right)$ и $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Следователно е изпълнена следната

Теорема 6. *Ойлеровата права* ΔABC, *асоциирана с* $\overline{k}(O)$, *минава през центъра* O_1 *на* $\overline{k}(O_1)$ (фиг. 2).

От следствие 2 и теорема 6 следва, че ако $\overline{k}(O)$ е описаната за ΔABC окръжност, то $\overline{k}(O_1)$ е окръжност, центърът на която лежи върху Ойлеровата права на ΔABC. Нещо повече, от теорема 5 следва, че ако α, β и γ са ъглите на ΔABC, то отношението на радиусите на $\overline{k}(O)$ и $\overline{k}(O_1)$ е равно на $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Вариант на теоремата на Кошница при описана крива с център върху някоя от правите BC**,** CA **и** AB**.** Нека $O \equiv M_c$ и $C_1(l,m,0)$ $(l+m=1)$ е точка от правата AB. Тогава съществува единствена описана за ΔABC крива $\overline{k}(O) \equiv \overline{k}(M_c, C_1)$ с център M_c, точките на която удовлетворяват уравнение (3). В този случай, ако s_c е правата, спрегната на CM_c и минаваща през средата на отсечката CM_c, то $O_a = s_c \cap M_cM_a$ и $O_b = s_c \cap M_cM_b$. Координатите на центровете O_a и O_b са следните

$$(12) \qquad O_a\left(\frac{1-2l}{4m}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4m}\right),\ O_b\left(\frac{1}{2}, \frac{1-2m}{4l}, \frac{1}{4l}\right).$$



Фигура 4

От (12) за уравненията на правите AO_a и BO_b намираме:
$AO_a : y - 2mz = 0$, $BO_b : x - 2lz = 0$.

От тези уравнения намираме пресечната им точка $AO_a \cap BO_b = K\left(\frac{2}{3}l, \frac{2}{3}m, \frac{1}{3}\right)$. Сега лесно се проверява, че координатите на точката K удовлетворяват уравнението $mx - ly = 0$ на правата CC_1. Така получаваме следната

Теорема 7. *Правите AO_a, BO_b и CC_1 се пресичат в една точка* (фиг. 4)

Точката K и в този случай ще наричаме *точка на Кошница спрямо* $\overline{k}(O) \equiv \overline{k}(M_c, C_1)$. От (4) и координатите на K следва, че е изпълнено твърдението: *Точката на Кошница е спрегната с центъра $F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ на Ойлеровата крива $\Omega(M_c, C_1)$, асоциирана с $\overline{k}(M_c, C_1)$*. По този начин се установява, че и в този случай е изпълнено следствие 1. Ако $\overline{k}(M_c, C_1)$ е описаната за ΔABC окръжност (това се случва, когато $\sphericalangle ACB = 90°$), CC_1 е височината на ΔABC през C и затова K е точка от височината към хипотенузата на ΔABC.

Заключение. Извършените наблюдения върху зависимостите между основните елементи в теоремата на Кошница ни позволиха да получим нейно обобщение за всяко описано около триъгълника конично сечение. Извършените изследвания доведоха до откриване на допълнителни свойства на точката на Кошница. Освен това получихме и една допълнителна крива, която е тясно свързана с теоремата на Кошница, и други забележителни свойства на триъгълника, зависещи от описаната крива.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Simeonov, A. (1992). Kompleksni koordinati v teoremata na Chezar Koshnitsa, Obuchenieto po matematika i informatika, 1, 52 – 53. [Симеонов, А. (1992). Комплексни координати в теоремата на Чезар Кошница, *Обучението по математика и информатика, 1*, 52 – 53.]

Paskalev, G. & I. Chobanov. (1985). Zabelezhitelni tochki v triagalnika. Sofia: Narodna prosveta. [Паскалев, Г. & И. Чобанов. (1985). *Забележителни точки в триъгълника*. София: Народна просвета.]

Grozdev, S. & V. Nenkov. (2014). Obobshteniya nekotorayh klassicheskih teorem geometrii treugolynika. Teoreticheskie i prikladnaye aspektay matematiki, informatiki i obrazovaniya. Sbornik materialov mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii. Arhangelysk, SAFU, 35 – 54. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2014). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. *Сборник материалов международной научной конференции*. Архангельск, САФУ, 35 – 54.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2014, a). Homotetichni konichni secheniya v ravninata na triagalnik. Matematika i informatika, 2, 139 – 154. [Гроздев, С. & В. Ненков (2014, а). Хомотетични конични сечения в равнината на триъгълник. *Математика и информатика, 2*, 139 – 154.]

Grozdev, S. & V. Nenkov. (2015). Geometrichna konstruktsiya na kriva na Cheva, Matematika i informatika, 1, 52 – 57. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2015). Геометрична конструкция на крива на Чева, *Математика и информатика, 1*, 52 – 57.]

A GENERALIZATION OF A CESAR KOSHNICA THEOREM

Abstract. In relation with some described conics of a given triangle ABC a generalization of a Cesar Koshnica theorem is established. The generalization is connected with some specials curves in the plane of ΔABC and conjugated points with respect to the described conic.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc**
University of finance, business and entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev St.
Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg