

ОЩЕ ЕДНА ИДЕЯ ЗА РЕШАВАНЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЧНИ УРАВНЕНИЯ

Диана Стефанова, Пламен Пенев

Резюме. В статията се използва експерименталната среда на Excel за проверка на идеи, хрумвания и догадки в проблемни ситуации, които възникват при решаването на тригонометрични уравнения.

Keywords: problem solving, trigonometric equation, number, table, macros

В училищния курс по математика се изучават тригонометрични уравнения. Нашият опит и практика показват, че с тези уравнения учениците се справят трудно. За целта предлагаме начин за преодоляване на тази ситуация, като използваме информационни технологии в обучението по математика, и по-специално възможностите на програмата Excel. Настоящата разработка за решаване на тригонометрични уравнения с компютър е направена така, че да се използва паралелно с традиционния начин за изучаване на тригонометрични уравнения. Темата се изучава само в профилирана подготовка по математика.

В Paskalev (2001) определението за тригонометрично уравнение е следното: „Едно уравнение се нарича тригонометрично, ако неизвестното се съдържа само под знака на тригонометрични функции“.

Тогава уравненията: $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) - \cos(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $2 \sin x - \cos 3x = 1$ са тригонометрични уравнения по определение, а уравнението $x + \sin 2x = \frac{1}{2}$ не е тригонометрично уравнение по това определение.

Решаването на тригонометрични уравнения се свежда до решаването на основните тригонометрични уравнения (таблица 1).

Свеждането на дадено тригонометрично уравнение до основни тригонометрични уравнения се осъществява по различни начини. А записът на решението може да стане чрез интервали или посочените в таблица 1 формули. При това невинаги се вижда от пръв поглед, че два такива записа са еквивалентни. Друг важен момент е, че в процеса на решаването могат да се появят чужди корени или пък да се изпуснат корени. За да се избегнат тези опасности, е необходимо правилно да се определи дефиниционната област

Таблица 1

	$\sin x = a$ $a \in [-1, 1]$	$\cos x = a$ $a \in [-1, 1]$	$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{cotg} x = a$
x	$x = \alpha + 2k\pi$; $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\kappa \in Z$.	$x = \alpha + 2k\pi$ $x = -\alpha + 2k\pi$ $\alpha \in [0, \pi]$ $\kappa \in Z$.	$x = \alpha + k\pi$ $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\kappa \in Z$.	$x = \alpha + k\pi$ $\alpha \in [0, \pi]$ $\kappa \in Z$.
$a = 0$	$x = k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\kappa \in Z$.
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = 2k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $\kappa \in Z$.
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = \pi + 2k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $\kappa \in Z$.	$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ $\kappa \in Z$.

на уравнението и да се следи за еквивалентността на извършваните преобразувания.

Напълно допустимо е решенията да се записват в градуси, въпреки че се предпочита да са в радиани, тъй като неизвестното се счита за число, а не за ъгъл. Грешно е в запис на решението да участват едновременно и градуси, и радиани.

Тук ще се спрем на някои тригонометрични уравнения. Обособили сме ги в групи.

I група. Уравнения от вида:

$\sin f(x) = a$, $\cos f(x) = a$, $\operatorname{tg} f(x) = a$, $\operatorname{cotg} f(x) = a$, където $f(x)$ е алгебрична функция на x .

Решаването на тези тригонометрични уравнения се свежда до решаването на алгебрични уравнения.

Например: ако $f(x) = cx + b$, то решаването на уравнението $\sin f(x) = a$, $\in [-1, 1]$ се свежда до решаването на алгебричните уравнения $cx + b = \alpha + 2k\pi$ и $cx + b = \pi - \alpha + 2k\pi$, $k \in Z$, след което получаваме,

че $x = \frac{b+\alpha+2k\pi}{c}, x = \frac{b+\pi-\alpha+2k\pi}{c}, c \neq 0.$

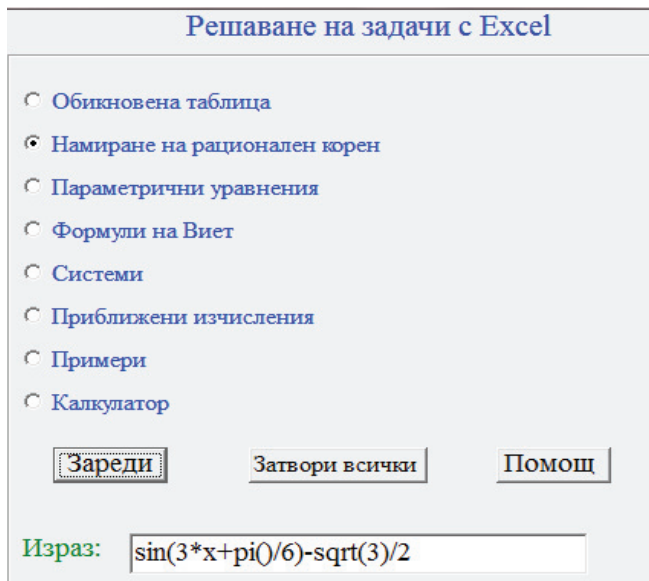
Задача 1: да се реши уравнението $\sin(3x + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Решение: използваме основното тригонометрично уравнение $\sin f(x) = a$ и

получаваме $3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, 3x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$ след което окончателно намираме $x = \frac{(1+12k)\pi}{18}$ и $x = \frac{(1+4k)\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$

Предлагаме решаване на задача 1 с помощта на програмата Excel.

1. В командното меню на „Модели“ въвеждаме уравнението в нормализиран вид:



2. Избираме „Намиране на рационален корен“.

B2 fx sin(3*x+pi()/6)-sqrt(3)/2										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X	Y	Знак	q	p	Разлика	От 0 до N	Старт	Тригон.	Графика
2		0	sin(3*x+pi()/6)-sqrt(3)/2	+++++			360			

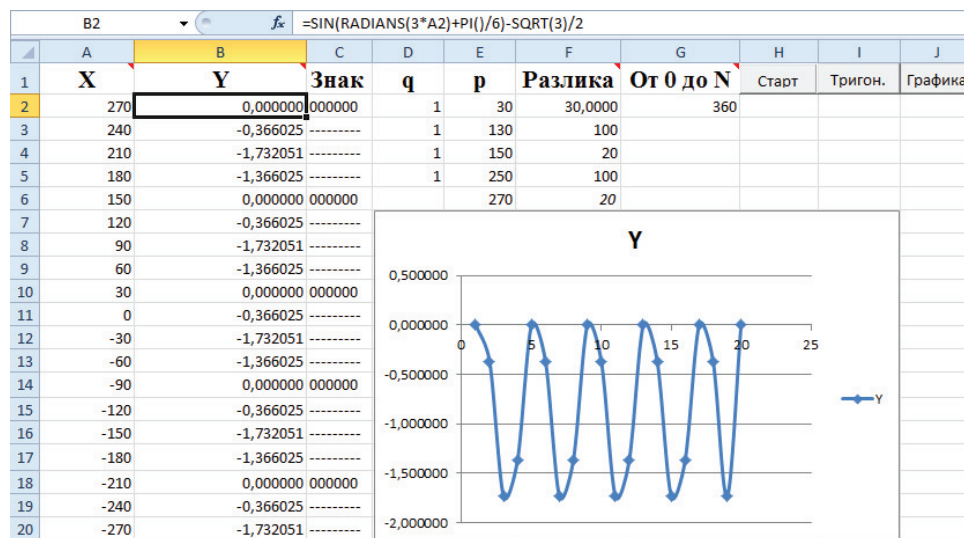
Уравнението се пренася автоматично в работна клетка на Excel.

3. Натискаме бутон „Тригон“. В интервала от 15^0 до 360^0 се търси стойност в градуси за x , за която функцията се анулира.

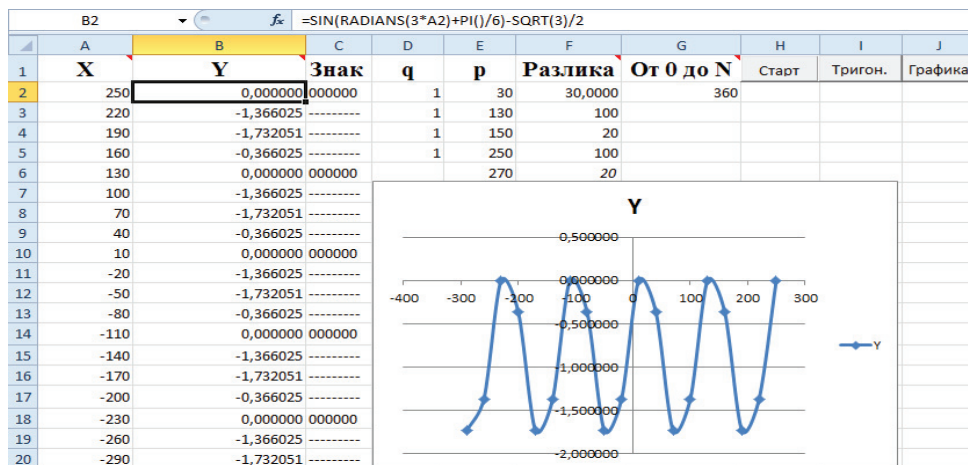
B2		fx =SIN(RADIANS(3*A2)+PI()/6)-SQRT(3)/2							
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	Y	Знак	q	p	Разлика	От 0 до N	Старт	Тригон.
2	360	-0,366025	-----				360		
3				1	30	0			
4				1	130	100			
5				1	150	20			
6				1	250	100			
7					270	20			

В колонка E получаваме смесване на две последователности от решения: 30^0 , 150^0 , 270^0 ... и 130^0 , 250^0 ..., изместени съответно една от друга на 20^0 .

4. Първа последователност проверяваме с „Графика“. За по-добро онагледяване точките за x вземаме през 30^0 .



5. По същия начин проверяваме втората последователност:



6. Периодът и в двата случая е $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$. Решенията в радиани вземаме от таблиците: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. Резултатите не противоречат на алгебричните решения. Учениците добиват увереност и сами решават следващите задачи от групата.

Задача 2: решете уравненията:

а) $\cos(3x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
 б) $\cos(2x + 45^\circ) = \frac{1}{2}$.

II група. Уравнения от вида $F_1[\varphi_1(f_1(x))].F_2[\varphi_2(f_2(x))]\dots F_n[\varphi_n(f_n(x))]=0$, където f_i са алгебрични функции на x , φ са тригонометрични функции, а F_i са рационални функции (Милушева, 1993). Тук трябва да се има предвид следното: областта на решенията на даденото уравнение е равна на сечението от областите на допустимите стойности на променливата за всеки от множителите. Ще решим следващата задача.

Задача 3: да се реши уравнението: $3 \sin x (1 + \operatorname{tg} x) = 0$.

Решение: за уравнението $3 \sin x (1 + \operatorname{tg} x) = 0$ (1) определяме $D_x = D_{\sin x} \cap D_{(1+\operatorname{tg} x)} = \mathbb{R} \setminus \left[(2k+1)\frac{\pi}{2} \right], k \in \mathbb{Z}$. Решението на уравнение (1) се свежда до

решение на уравненията $\sin x = 0$ (2) и $1 + \operatorname{tg} x = 0$ (3). Решението на (1) е сечение от множеството D_x и обединението на множеството от решения на (2) и (3), т. е. $x = k\pi$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

По аналогичен начин се постъпва при решаването на уравненията в задача 4.

Задача 4:

- а) $7 \sin 2x (1 + \operatorname{tg} 3x) = 0$;
- б) $\sin x (\sqrt{3} - \operatorname{cotg} x) = 0$;
- в) $\cos x \cos 2x (1 + 2 \sin 2x) = 0$;
- г) $\sin 5x + \sin 3x = \cos 6x - \cos 2x$;
- д) $\sin 2x - \cos^2 x = 0$.

III група. Уравнения от вида:

$$a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) + c = 0; \quad a \cos^2 f(x) + b \cos f(x) + c = 0;$$
$$a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} f(x) + c = 0; \quad a \operatorname{cotg}^2 f(x) + b \operatorname{cotg} f(x) + c = 0.$$

Решават се съответно чрез субституциите $\sin f(x) = y(t)$, $\cos f(x) = y(t)$, $\operatorname{tg} f(x) = y(t)$, $\operatorname{cotg} f(x) = y(t)$.

Задача 5: решете уравненията:

- а) $2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0$;

Решаването на следващите уравнения ще става чрез универсална субституция:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

- б) $3 \sin x + 2 \cos x = 1$ (след преобразуване се получава уравнението $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 6 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$);
- в) $\sin x - \cos x = 1$;
- г) $\sin 2x + \cos^2 x = 3 \sin^2 x$;
- д) $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

IV група. Хомогенни тригонометрични уравнения. Тези уравнения са от първа степен относно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $a \sin x + b \cos x = 0$.

Решават се чрез деление на $\cos x$ (или на $\sin x$). В резултат на делението на $\cos x$ (или на $\sin x$) се получава основно тригонометрично уравнение $a \operatorname{tg} x + b = 0$ (или $a \operatorname{cotg} x + b = 0$).

Тук ще посочим и хомогенни уравнения от втора степен:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Делим уравнението на $\cos^2 x$ (или на $\sin^2 x$) и получаваме $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$ или $c \cot^2 x + b \cot x + a = 0$).

Задача 6: решете уравненията:

а) $\sin(3x + 30^\circ) - \sqrt{3} \cos(3x + 30^\circ) = 0$;

б) $3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$;

в) $\sin 3x = \sqrt{3} \cos 3x$;

г) $\sin x + \frac{1}{\cos x} = \cos x$.

V група. Уравнения от вида:

$$a \sin x + b \cos x = c, \text{ където } a, b \text{ и } c \text{ са коефициенти, различни от нула.}$$

Решаваме уравнението, като разделим на $\sqrt{a^2 + b^2}$ и полагаме $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Задача 7: да се реши уравнението $5 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0$.

Решение: за да решим това уравнение, преобразуваме първите му два чле-

на, както следва:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} \left(\frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \sin x - \frac{12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \cos x \right) = 13(\cos \varphi \sin x - \sin \varphi \cos x)$$

$$= 13 \sin(x - \varphi), \text{ където } \sin \varphi = \frac{12}{13}, \cos \varphi = \frac{5}{13}. \text{ След това уравнението}$$

то добива вида $\sin(x - \varphi) + \sin 3x = 0$, или $2 \sin(2x - \frac{\varphi}{2}) \cos(x + \frac{\varphi}{2}) = 0$

и има решения $x = \frac{\varphi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. От

$\cos \varphi = \frac{5}{13} \Rightarrow \varphi \approx 16^\circ 36'$, т.е. уравнението има следните две групи решения:

$x \approx 16^\circ 50' + k \cdot 90^\circ; x \approx -33^\circ 43' + (2k + 1) \cdot 90^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Това уравнение се оказва трудно за решаване по посочения начин, затова провеждаме експерименти с Excel. Използваме схемата, описана при решаването на задача 1.

1.  [Намиране на рационален корен](#)

Израз:

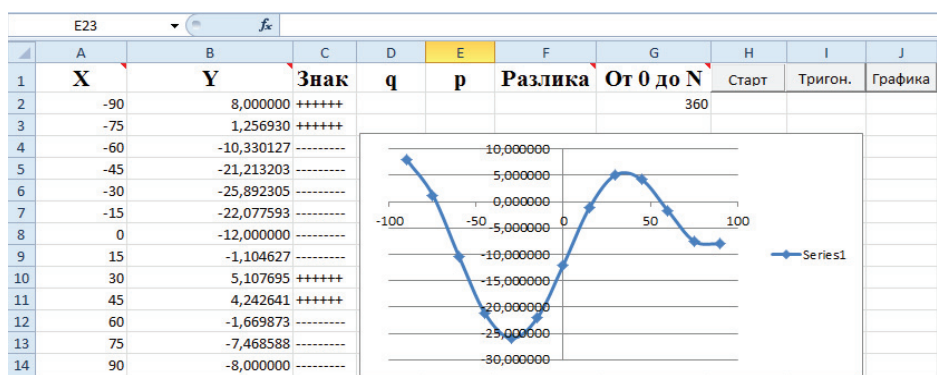
2.

B2										
fx 5*sin(x)-12*cos(x)+13*sin(3*x)										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X	Y	Знак	q	p	Разлика	От 0 до N	Старт	Тригон.	Графика
2		05*sin(x)-12*cos(x)+13*sin(3*x)+++++					360			

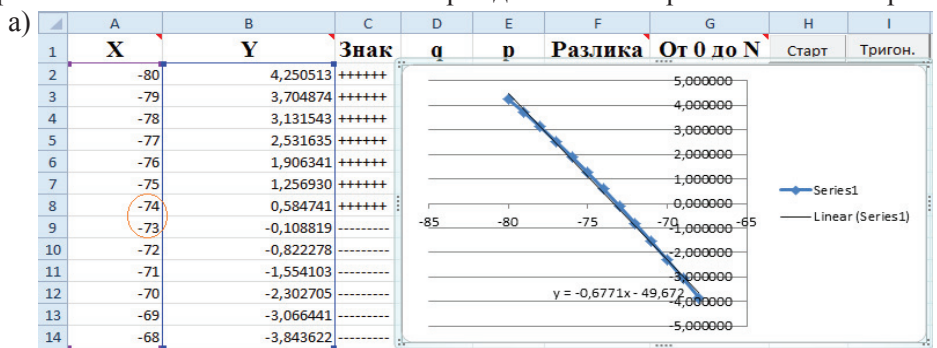
3. След натискане на „Тригон“ наблюдаваме, че в интервала от 15^0 до 360^0 не е открит рационален корен в градуси.

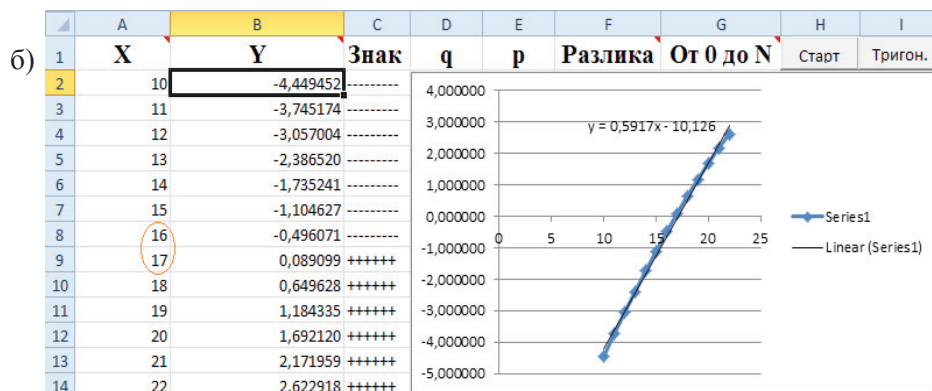
B2										
fx =5*SIN(RADIANS(A2))-12*COS(RADIANS(A2))+13*SIN(RADIANS(3*A2))										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X	Y	Знак	q	p	Разлика	От 0 до N	Старт	Тригон.	Графика
2	360	-12,000000					360			
3										

4. Търсим приближени корени по чисто графичен метод. Построяването на чертеж е автоматизирано. Достатъчно е да въведем начало и стъпка на разбиране на интервал. Графика на функцията в интервала от -90^0 до $+90^0$:

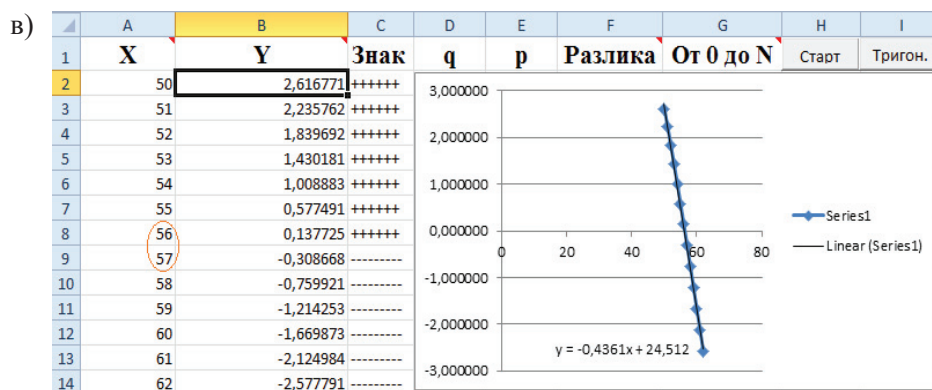


Виждаме, че в указания интервал функцията сменя знака си три пъти. Детайлизираме стойностите за всяка смяна. Обграждаме локализирането на всеки корен.





Разликата между стойностите на намерените корени в т.а и т.б е 90° , т.е. периодът е $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.



Наклонът на линията в този случай ни позволява да предположим, че локализираният корен е от друга последователност (извадките в т.а, т.б. и т.в са равнопоставени по обем). Периодът може да се уточни чрез експериментиране с обхвата на независимата променлива. Нека отбележим, че допълнително се извежда и линейният тренд в изследвания участък – обстоятелство, което може да се използва за приближени изчисления.

Задача 8: решете уравненията:

а) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 1$;

б) $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = -\sqrt{3}$.

На учениците, обособени в групи, бе поставена самостоятелна работа да решат задачите от II, III и IV група по двата начина.

VI група. Тригонометрични уравнения с параметър.

Задача 9:

а) за кои стойности на параметъра a уравнението $\sin 2x - 2\sqrt{2}a(\sin x - \cos x) + 1 - 4a = 0$ има решение в интервала $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$;

Решение: след преобразуване уравнението приема вида $(\sin x + \cos x)^2 - 4a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)) = 0$ или $2\sin^2(x + \frac{\pi}{4}) - 8a\sin^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$, т.е. $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$ (което няма корен в интервала $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$) и $\cos^2(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}) = a$. За да има решение в интервала $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, трябва ъгълът $x + \frac{\pi}{4}$ да е в интервала $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, т.е. $\cos \frac{3\pi}{4} \leq 2a - 1 \leq \cos \frac{\pi}{2}$ и така намираме, че $a \in \left[\frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \frac{1}{2}\right]$;

б) за кои стойности на параметъра a уравнението $(1 - a)\cos 2x + 2(1 - 2a)\sin x + a + 3 = 0$ има решение;

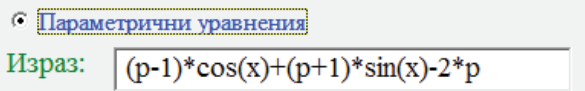
в) да се реши уравнението: $\sin 3x + \sin 2x = m \sin x$.

г) за кои стойности на параметъра p уравнението $(p - 1)\cos x + (p + 1)\sin x - 2p = 0$ има рационални корени? Намерете тези корени.

Решение: използваме универсалната субституция и преобразуваме уравнението до: $(3p - 1)\text{tg}^2 \frac{x}{2} - 2(p + 1)\text{tg} \frac{x}{2} + p + 1 = 0$. След това получаваме, че при $p = -1$, $x = 0^\circ + 360^\circ k$; и при $p = 1$, $x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$.

Нека отново използваме възможностите на програмата Excel и решим уравнението от г).

1.



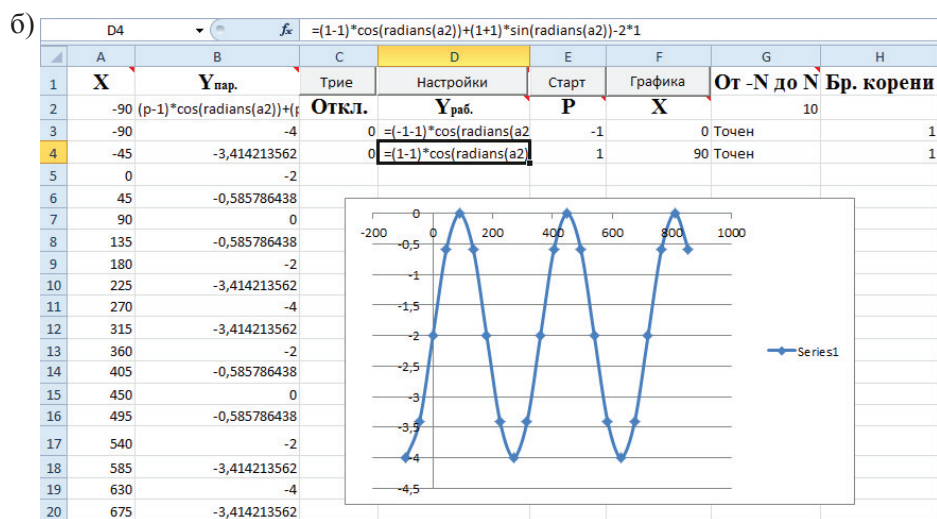
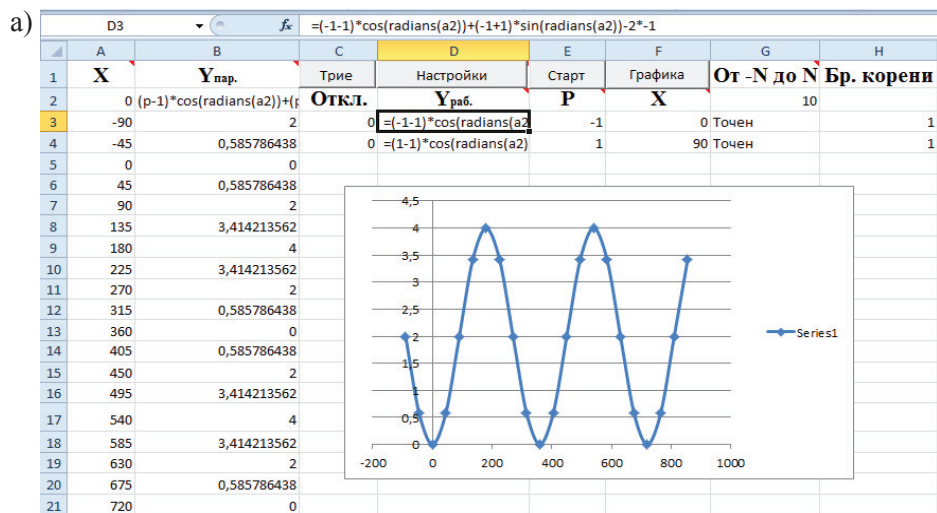
2.

B2		f_x	(p-1)*cos(x)+(p+1)*sin(x)-2*p			
	A	B	C	D	E	F
1	X	Y _{пар.}	Трие	Настройки	Старт	Графика
2	0	(p-1)*cos(x)+(p+1)*sin(x)	ОТКЛ.	Y _{раб.}	P	X

3. След натискане на „Старт“ получаваме две решения:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	Y пар.	Трие	Настройки	Старт	Графика	От -N до N	Дясна граница на интервал	Помощ
2		$0 \cdot (p-1) \cdot \cos(\text{radians}(a2)) + (-1+1) \cdot \sin(\text{radians}(a2)) - 2 \cdot 1$	Откл.	Y раб.	P	X	10		d
3	180	-29	0	$=(-1-1) \cdot \cos(\text{radians}(a2))$	-1	0 Точен		1	1
4			0	$=(-1-1) \cdot \cos(\text{radians}(a2))$	1	90 Точен		1	1

4. С „Графика“ от работните уравнения уточняваме периодите.



Графичното решение на задачата потвърждава алгебричното:

при $p = -1$, $x = 0^0 + 360^0 k$; при $p = 1$, $x = 90^0 + 360^0 k, k \in Z$.

Използването на програмата Excel в тази тема дава възможност за:

- ориентиране в спецификата на тригонометричните уравнения;
- даване на насоки за търсене на алгебрично решение и проверка на получени резултати;
- разнообразяване на работата в клас;
- събуждане на интереса на учениците към математиката;
- активизиране дейността на учениците;
- демонстрация на техники за автоматизиране на процеса на решаване на тригонометрични уравнения.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Mavrova, R. & D. Boykina (2003). *Pomagalo po problemi na metodikata na obuchenieto po matematika*. Plovdiv: Paisiy Hilendarski [Маврова, Р. & Д. Бойкина (2003). *Помагало по проблеми на методиката на обучението по математика*. Пловдив: Паисий Хилендарски].
- Milusheva, D. & V. Milushev (1993). *Trigonometrichni funksii, uravneniya, neravenstva*. Boyking. [Милушева, Д. & В. Милушев (1993). Тригонометрични функции, уравнения, неравенства. Бойкинг].
- Paskalev, G. & Zdr. Paskaleva (2001). *Matematika za XI klas*. Sofia: Arhimed [Паскалев, Г. & Здр. Паскалева (2001). *Математика за XI клас*. София: Архимед].
- Paskalev, G. (1998). *Sbornik ot zadachi po matematika – Algebra*. Sofia: Regaliya 6. [Паскалев, Г. (1998). *Сборник от задачи по математика – Алгебра*. София: Регалия 6].
- Penev, P. & D. Stefanova (2015). Samostoyatelno reshavane na zadachi s Excel, *Matematika i informatika*, 58, 21, 149 – 156 [Пенев, П. & Д. Стефанова (2015). Самостоятелно решаване на задачи с Excel, *Математика и информатика*, 58, 21, 149 – 156.].
- Penev, P. (2014). Evristika s Excel. *Matematika i informatika*, 57, 1, 18 – 33 [Пенев, П. (2014). Евристика с Excel. *Математика и информатика*, 57, 1, 18 – 33].
- Penev, P. (2014). Oshte evristiki s Excel. *Matematika i informatika*, 57, 5, 472 – 479 [Пенев, П. (2014). Още евристики с Excel. *Математика и информатика*, 57, 5, 472 – 479].

- Rangelova, P. (2006). *Sbornik po matematika IX – XII klas s metodichni ukazaniya*. Makros. [Рангелова, П. (2006). *Сборник по математика IX – XII клас с методични указания*. Макрос.]
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov. (1994). *Algebra za X klas na SOU*. Sofiya: Prosveta [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров. (1994). *Алгебра за X клас на СОУ*. София: Просвета].

ONE MORE IDEA TO SOLVE TRIGONOMETRIC EQUATIONS

Abstract. The experimental environment Excel is used in the paper to check ideas, occurring and guesses in problem situations, which appear in solving trigonometric equations.

✉ **Dr. Diyana Stefanova**
116, Zar Ivan Asen II
Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg

✉ **Plamen Penev**
100, Syedinenie
Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg