Математика и информатика Volume 59, Number 2, 2016 Mathematics and Informatics

Research, Surveys, Results
Проучвания, резултати

ОБВЪРЗВАНЕ НА ОБУЧЕНИЕТО ПО АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Румяна Маврова, Пенка Рангелова
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

Резюме. В настоящата статия показваме приложението на безкрайно малка геометрична прогресия в геометрията. За целта предлагаме система от задачи, илюстриращи тази връзка.

Keywords: interdisciplinary relations, infinitely small geometric series

Идеята за обвързване на учебните предмети в процеса на обучение е твърде стара и повече или по-малко е изяснена в работите на А. Дистерверг (Diesterweg, 1966), Я. А. Коменски (Comenius, 1956), Дж. Лок (Locke, 1985), Й. Т. Песталоци (Pestalozzi, 1963) и много други.

Я. А. Коменски (Comenius, 1956) пръв издига тази идея и подчертава значението ѝ за обучението. Той отбелязва: „Никому не трябва да се раздава образование на основата на една която и да е частна наука, независимо от останалите науки... както в природата всичко е свързано едно с друго, така и в обучението е нужно да се свързва всяко нещо...“. Коменски подчертава важното значение на обвързването на близки учебни предмети, което е необходима предпоставка за осигуряване на цялостност и системност на знанията.

Още през XIX в. интересът към проблема за обвързване на учебните предмети нараства значително, тъй като по-нататъшната диференциация довежда до увеличаване броя на учебните предмети. Осъществяването на връзка между учебните предмети е сложна задача, която изисква решаване на редица въпроси, свързани със съдържанието, методите и организационните форми на обучение.

В (Rashkova, 1977) Ст. Рашкова използва термина междупредметни връзки и прави опит да дефинира това понятие. Тя счита, че за правилното осъществяване на тези връзки е важно протичането им на три нива: вътрешнопредметно, вътрециклично и междуциклично. Имайки предвид нейното мнение за всяко едно от тези нива, считаме, че в обучението по математика в училище може успешно да се осъществи първото ниво.

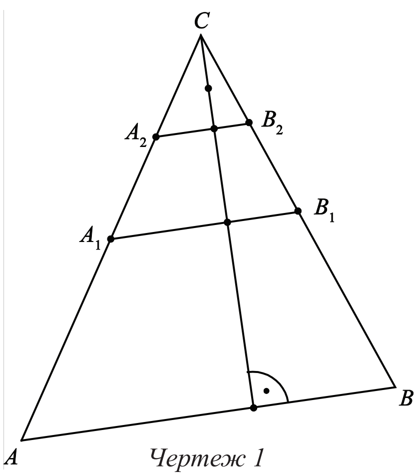
В настоящата статия ще илюстрираме обвързването на конкретна тема от алгебричния материал с теми от геометричния материал. В часовете по математика в XI клас (Lozanov, Vitanov & Nedevski, 2001; Paskalev & Paskaleva, 2002 и др.) се изучават аритметична, геометрична и безкрайно малка геометрична прогресия. Показано е приложението на първите две прогресии при пресмятане на различни видове лихви, кредити, ренти и др. Разгледаните свойства на безкрайно малка геометрична прогресия се свеждат до използване на формулата за нейната сума и намиране на един от участващите в нея елементи, ако са известни другите два. Изучаването на тази прогресия дава възможност да се осъществят вътрешнопредметни връзки в обучението по математика. Подходящо е да се покаже приложението при решаване на геометрични задачи.

В статията предлагаме поредица от задачи, при решаването на които се изискват различни геометрични знания и свойствата на безкрайно малка геометрична прогресия. Предложените задачи сме обособили в няколко групи.

Първа група. Безкрайна редица от триъгълници или окръжности и триъгълници, отговарящи на определени условия.

Задача 1. Даден е $\triangle ABC$. През средата на височината му през върха C е построена права, успоредна на AB. Тя отсича $\triangle A_1B_1C$. По същия начин за $\triangle A_1B_1C$ е построен $\triangle A_2B_2C$ и т.н. Ако периметърът на $\triangle ABC$ е $P = a$, а лицето му – $S = b$, то намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на всички триъгълници.

Решение: по условие (черт. 1) $P_{ABC} = AB + BC + CA = a$. Лесно определяме $P_{A_1B_1C} = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}a$, $P_{A_2B_2C} = \frac{1}{2}P_{A_1B_1C} = \frac{1}{4}a$ и т.н. Така получаваме следната редица от числа, задаващи периметрите на триъгълниците: $a, \frac{1}{2}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{8}a, \dots$, която е безкрайно малка геометрична прогресия с частно $q = \frac{1}{2}$ и първи член a. Тогава сумата на всички тези периметри е $S = \frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 2a$.



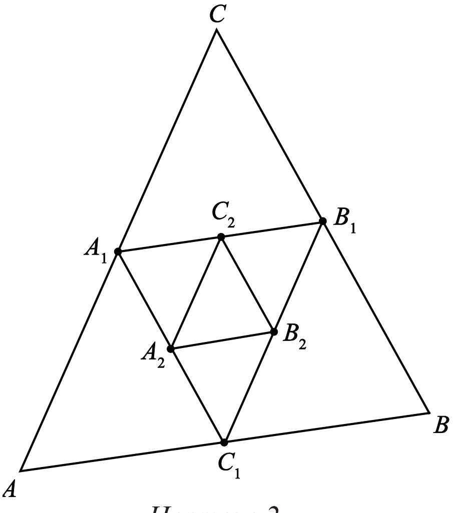
Чертеж 1

За лицата на получените триъгълници имаме $S_{ABC} = b$, $S_{ABC} = b$, $S_{A_1B_1C} = \frac{b}{4}$, $S_{A_2B_2C} = \frac{b}{16}$ и т.н.

Отново се получава безкрайно малка геометрична прогресия с първи член b и частно $q=\dfrac{1}{4}$. Следователно сборът от лицата е $S=\dfrac{b}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}b$.

В тази задача обвързахме знанията за безкрайно малка геометрична прогресия с тези за средна отсечка в триъгълник.

Задача 2. Даден е равностранен триъгълник със страна a. Чрез съединяване средите на страните му в него е вписан друг триъгълник. По същия начин във втория триъгълник е вписан трети триъгълник и т.н. Намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на тези триъгълници (Лозанов, Витанов & Недевски, 2001: 41).



Чертеж 2

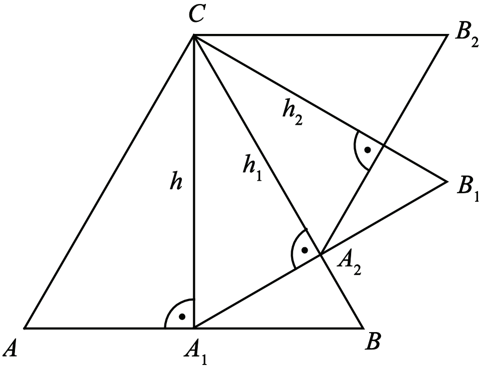
Решение: нека дадения т триъгълник е ABC и $AB=a_1=a$ (черт. 2). Тогава $A_1B_1=a_2=\dfrac{a}{2}$, $A_2B_2=a_3=\dfrac{a}{4}$ и т.н. Така стигаме до следната редица от периметри на тези триъгълници: $3a$, $3\dfrac{a}{2}$, $3\dfrac{a}{4}$, ...

Получената редица е безкрайно малка геометрична прогресия, чиято сума е $S=\dfrac{3a}{1-\dfrac{1}{2}}=6a$.

Ако с S_1 означим лицето на $\triangle ABC$, то $S_1=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. За лицето на $\triangle A_1B_1C_1$ със страна $\dfrac{a}{2}$ намираме $S_2=\dfrac{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$. Лесно се установява, че $S_3=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{64}$ и т.н. Така стигнахме до редицата $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$, $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{64}$, ... , която е безкрайно малка геометрична прогресия със сума $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

Тук обвързахме знанията за безкрайно малка геометрична прогресия с периметър и лице на равностранен триъгълник, както и средна отсечка в него.

Задача 3. Даден е равностранен триъгълник със страна a. Една от височините на триъгълника е взета за страна на друг равностранен триъгълник. Една от височините на новия триъгълник е взета за страна на трети равностранен триъгълник и т.н. Намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на така получените равностранни триъгълници (Paskalev & Paskaleva, 2002).

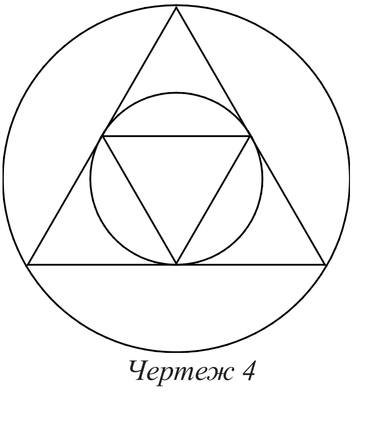


Чертеж 3

Решение: ако h е височината на дадения $\triangle ABC$ (черт. 3), то $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ако h_1 е височината на $\triangle A_1B_1C$, то $h_1 = \dfrac{h\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{4}$. За височината h_2 на $\triangle A_2B_2C$ получаваме $h_2 = \dfrac{h_1\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a\sqrt{3}}{8}$ и т.н. Периметрите на тези триъгълници образуват редицата $3a$, $\dfrac{3a\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{9a}{4}$, $\dfrac{9a\sqrt{3}}{8}$, ... и сумата от членовете ѝ е $S = \dfrac{3a}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 6a\left(2+\sqrt{3}\right)$.

По аналогичен път стигаме до извода, че сумата от лицата им е $S = a^2\sqrt{3}$.

Задача 4. В окръжност с радиус R е вписан равностранен триъгълник. В него е вписана окръжност и в нея е вписан отново равностранен триъгълник и т.н. Намерете сумата от лицата на получените кръгове и сумата от лицата на получените равностранни триъгълници.



Чертеж 4

Упътване: установете, че радиусите на разглежданите кръгове са: R, $\dfrac{R}{2}$, $\dfrac{R}{4}$, ... , а сумата от лицата им е $\dfrac{4}{3}\pi R^2$. За страните на триъгълниците установете, че те са: $R\sqrt{3},\ \frac{R\sqrt{3}}{2},\ \frac{R\sqrt{3}}{4}$ ... . Пресметнете съответните лица и установете, че тяхната сума е $R^2\sqrt{3}$.

По аналогичен начин се постъпва и при решаване на следната задача.

Задача 5. В равностранен триъгълник със страна *a* е вписан кръг. В него е вписан равностранен триъгълник и така до безкрайност. Намерете сумата от:

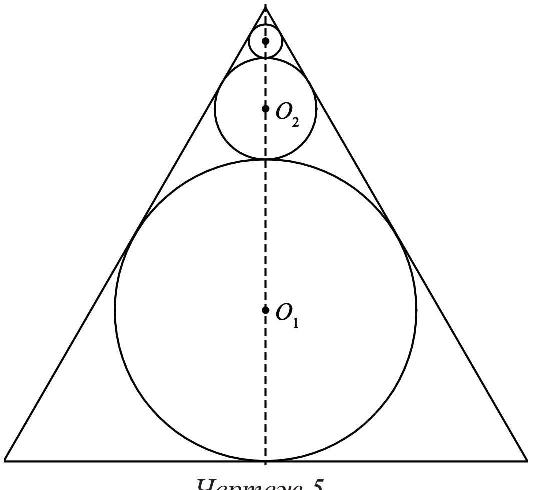
а) радиусите на получените кръгове;

б) дължините на ограждащите ги окръжности;

в) лицата на получените кръгове.

(Rangelova 2006)

Задача 6. В равностранен триъгълник със страна *a* е вписана окръжност. Построена е безкрайна редица от окръжности, всяка от които се допира до две от страните на триъгълника и до предходната окръжност (черт. 5). Намерете сумата от дължините на тези окръжности и сумата от лицата на кръговете, които те ограждат.



Чертеж 5

Упътване: установете, че радиусите на тези окръжности са: $r_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{18},\ r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{54}$ и т.н.

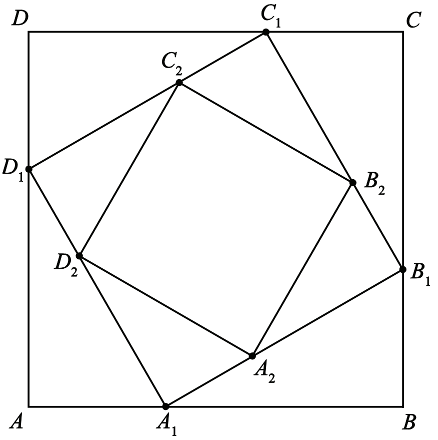
Пресметнете дължините на съответните окръжности и лицата на кръговете, които те ограждат. За получените безкрайно малки геометрични прогресии намерете сумите.

Втора група. Безкрайна редица от квадрати или квадрати и кръгове, отговарящи на определени условия.

Задача 7. В квадрат със страна *a* е вписан друг квадрат, а в него е вписан трети квадрат и т.н. Намерете сумата от лицата на тези квадрати.

Решение: ако S_1 е лицето на дадения квадрат $ABCD$, то $S_1 = a^2$ (черт. 6). Разделяме всяка от страните му на n равни части и избираме $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = \frac{1}{4}a$, а $A_1B = B_1C = C_1D = D_1A = \frac{n-1}{n}.a$. Тогава лицето S_2 на квадрата $A_1B_1C_1D_1$ е $S_2 = A_1B_1{}^2 = \frac{(n-1)^2 a^2}{n^2} + \frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n^2}\left[(n-1)^2 + 1\right]$.

След разделяне на страните на квадрата $A_1B_1C_1D_1$ на n равни части определяме $A_2B_1 = \frac{n-1}{n}.\frac{a}{n}\sqrt{(n-1)^2+1}$ и $B_1B_2 = \frac{a}{n^2}\sqrt{(n-1)^2+1}$, откъдето лицето на този квадрат е $S_3 = A_2B_2{}^2 = \frac{(n-1)^2 a^2}{n^4}\left[(n-1)^2+1\right] + \frac{a^2}{n^4}\left[(n-1)^2+1\right] = \frac{a^2\left[(n-1)^2+1\right]^2}{n^4}$.



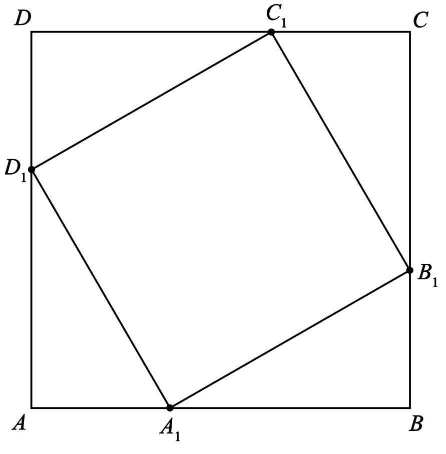
Чертеж 6

Аналогично $S_4 = \frac{a^2\left[(n-1)^2+1\right]^3}{n^6}$ и т.н. Понеже $\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_2} = \ldots = \frac{(n-1)^2+1}{n^2}$ < 1, то редицата S_1, S_2, S_3, … е безкрайно малка геометрична прогресия и сумата ѝ е $S = \frac{a^2n^2}{(n-1)^2+1}$, $n \geq 2$.

С тази задача обобщаваме задача от (Lozanov, Vitanov & Nedevski, 2001).

Задача 8. В квадрат със страна a е вписан квадрат с най-малко лице, а в него е вписан трети квадрат с най-малко лице и т.н. Намерете сумата от лицата на тези квадрати и сумата от периметрите им.

Упътване: нека $A_1B = B_1C = C_1D = D_1A = x$ (черт. 7). Тогава $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = a - x$ $(0 < x < a)$. Лицето $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1{}^2 = x^2 + (a-x)^2 = 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}$. От последната формула се вижда, че лицето ще приеме най-малка стойност при $x - \frac{a}{2} = 0$, т.е. $x = \frac{a}{2}$.



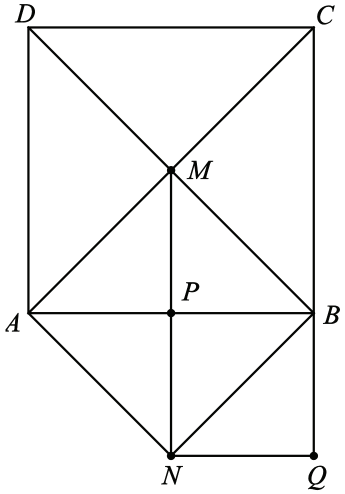
Чертеж 7

Следователно върховете A_1, B_1, C_1 и D_1 са среди на съответните страни в квадрата *ABCD*. Аналогично и останалите квадрати са с върхове средите на страните на предходния квадрат.

Така задачата става частен случай на задача 7 при $n = 2$. Тогава сумата от лицата на всички получени квадрати е $S = \dfrac{a^2.2^2}{(2-1)^2+1} = 2a^2$.

Понеже $A_1B_1 = \sqrt{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $A_2B_2 = \dfrac{a}{2}$ и т.н., то периметрите на квадратите са $4a$, $\dfrac{4a}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{4a}{2}$, ...

Последната редица е безкрайно малка геометрична прогресия и сумата от членовете ѝ е $S = 4a\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)$.



Чертеж 8

Задача 9. Даден е квадрат с диагонал *d*. Страната на този квадрат е взета за диагонал на втори квадрат, страната на втория квадрат е диагонал на трети квадрат и т.н. (черт. 8). Намерете сумата от периметрите и сумата от лицата на получените квадрати.

Решение: използваме теоремата на Питагор за $\triangle AMB$ и получаваме, че страната на квадрата *ABCD* е $a_1 = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Аналогично за страните на втория и третия квадрат намираме $a_2 = \dfrac{d}{2}$ и $a_3 = \dfrac{d}{2\sqrt{2}}$. Периметрите на тези квадрати образуват редицата $\dfrac{4d}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{4d}{2}$, $\dfrac{4d}{2\sqrt{2}}$, ... , а лицата им задават редицата $\frac{d^2}{2}, \frac{d^2}{4}, \frac{d^2}{8}, \ldots$, които са безкрайно малки геометрични прогресии. Техните суми са съответно $S_1 = 4d\left(\sqrt{2}+1\right)$ и $S_2 = d^2$.

С аналогични разсъждения разгледайте

Задача 10. В кръг с радиус R е вписан квадрат. В този квадрат е вписан кръг, а в него е вписан нов квадрат и така до безкрайност. Намерете сумата от:

а) радиусите на тези кръгове;

б) лицата на тези кръгове.

Задача 11. В кръг с радиус R е вписан правилен шестоъгълник, в него е вписан кръг и отново е вписан правилен шестоъгълник. Намерете сумата от лицата на получените:

а) кръгове;

б) шестоъгълници.

Упътване: ако страните на получените правилни шестоъгълници са b_6, $b'_6, b''_6, \ldots$, а радиусите на кръговете са $R, R_1, R_2, \ldots$, то установете, че $b_6 = R$, $b'_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $b''_6 = \frac{3R\sqrt{3}}{8}$, ... и R, $R_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $R_2 = \frac{3R}{4}\ldots$

Намерете лицата им и установете, че те образуват безкрайно малки геометрични прогресии.

Аналогични въпроси могат да се разглеждат и за стереометрични задачи. Ето условията с кратки упътвания и отговори на няколко такива задачи.

Задача 12. В права призма с основа квадрат е вписана друга права призма, върховете на която са среди на основните ръбове на дадената призма. Във втората призма е вписана по същия начин трета призма и т.н. Намерете сбора от обемите на тези призми, ако основният ръб на първата призма е a, а височината ѝ е h.

Упътване: установете, че $V = a^2h$, $V_1 = \frac{a^2h}{2}$, $V_3 = \frac{a^2h}{4}$, ...

Задача 13. В куб с ръб a е вписано кълбо, в него е вписан куб, а в този куб е вписано отново кълбо и т.н. Намерете сбора от обемите на всички кубове и сбора от обемите на всички кълба.

Отговор: $\frac{3a^3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}$ и $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2\left(3\sqrt{3}-1\right)}$.

Задача 14. В правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $2a$ и околни стени, наклонени към основата под ъгъл α, е вписана безкрайна редица от кълба, така че първото кълбо се допира до основата и до околните стени на пирамидата. Всяко следващо кълбо се допира до предходното кълбо и до околните стени на пирамидата. Намерете сбора от обемите на така получените кълба.

Упътване: установете, че $R_1 = a\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, $R_2 = R_1\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = a\mathrm{tg}^3\dfrac{\alpha}{2}$, $R_3 = a\mathrm{tg}^4\dfrac{\alpha}{2}$ и т.н. Следователно обемите образуват безкрайно малка геометрична прогресия с частно $q = \mathrm{tg}^6\dfrac{\alpha}{2}$.

С настоящата статия провокираме читателите да съставят и решават сами задачи от разглежданата тема.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Comenius, J. A. (1956). Velikaya didaktika. Moskva: Uchpedgiz [Коменски, Я. А. (1956). *Великая дидактика*. Москва: Учпедгиз].

Diestewerg, A. (1966). *Izbrannyye pedagogicheskiye sochineniya.* Moskva: Uchpedgiz [Дистерверг, А. (1966). *Избранные педагогические сочинения*. Москва: Учпедгиз].

Locke, J. (1985). *Sochineniya v trekh tomakh (vol 1 – 2).* Moskva: Mysl' [Лок, Дж. (1985). *Сочинения в трех томах (т. 1 – 2)*. Москва: Мысль.].

Lozanov, Ch., Vitanov, T. & Nedevski, P. (2001). Matematika XI klas (profilirana podgotovka). Sofia: Anubis [Лозанов, Ч., Витанов, Т. & Недевски, П. (2001). *Математика XI клас (профилирана подготовка)*. София: Анубис].

Paskalev, G. & Paskaleva, Zdr. (2002). Matematika XI klas (vtoro ravnishte). Sofia: Arhimed [Паскалев, Г. & Паскалева, Здр. (2002). *Математика XI клас (второ равнище)*. София: Архимед.].

Pestalozzi, J. T. (1963). Izbrannyye pedagogicheskiye sochineniya. Moskva: APN [Песталоци, И. Т. (1963). *Избранные педагогические сочинения*. Москва: АПН].

Rangelova, P. (2006). Sbornik po matematika IX – XII klas s metodicheski ukazaniya. Plovdiv: Makros [Рангелова, П. (2006). *Сборник по математика IX – XII клас с методически указания*. Пловдив: Макрос].

Rashkova, St. (1977). Mezhdupredmetni vrazki. Sofia: Narodna prosveta [Рашкова, Ст. (1977). *Междупредметни връзки*. София: Народна просвета].

CONNECTING THE EDUCATION IN ALGEBRA AND GEOMETRY

Abstract. It is shown in the present paper the application of infinitely small geometric progressions in geometry. A system of tasks is proposed for the purpose, that illustrate the corresponding relation.

✉ **Dr. Rumiyana Mavrova, Assoc. Prof.**
Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University "Paisiy Hilendarskiy"
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
E-mail: rummav@abv.bg

✉ **Prof. Penka Rangelova, DSc**
Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University "Paisiy Hilendarskiy"
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
E-mail: rangelova_penka@abv.bg