РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 3, 2015 Г.

Задача 1. Да се намери най-малкото естествено число n, за което има четири естествени числа x, y, z, t, образуващи в този ред аритметична прогресия, като е изпълнено равенството $x^n + y^n + z^n = t^n$. За намерената стойност на n да се определят всички четворки x, y, z, t, удовлетворяващи условията на задачата.

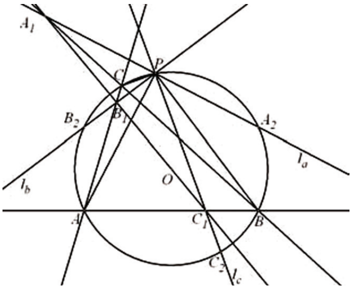
Христо Лесов, Казанлък

Решение. Нека естествените числа x, y, z, t образуват аритметична прогресия с разлика естественото число d. Тогава $x = y - d$, $z = y + d$ и $t = y + 2d$. Ако $n = 1$, то равенството $x + y + z = t$ води до $y = d$. Следователно $x = y - d = 0$, което не е естествено число. Ако $n = 2$, то равенството $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ води до $(y-d)^2 = 2d^2$, т.е. $y - d = \pm d\sqrt{2}$. Последното равенство не е изпълнено за никои естествени числа y и d. Ако $n = 3$, то равенството $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ води до $y^3 - 3dy^2 - 3d^2y - 4d^3 = 0$ или $(y-4d)(y^2 + dy + d^2) = 0$. Тъй като $y^2 + dy + d^2 > 0$, то $y = 4d$. Оттук следва, че $x = 3d$, $z = 5d$ и $t = 6d$. Следователно при $n = 3$ и произволно естествено число d се определят безброй много четворки естествени числа x, y, z, t, съответно кратни 3, 4, 5, 6, които удовлетворяват условията на задачата.

Задача 2. Нека P е произволна точка от описаната окръжност на ΔABC $(P \neq A, B, C)$, а l_a, l_b и l_c са правите през P, перпендикулярни съответно на AP, BP и CP. Ако $A_1 = l_a \cap BC$, $B_1 = l_b \cap CA$ и $C_1 = l_c \cap AB$, да се докаже, че точките A_1, B_1 и C_1 лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение. Ще докажем, че правите A_1B_1, A_1C_1 и B_1C_1 минават през центъра O на описаната около ΔABC окръжност k. Оттук непосредствено следва твърдението на задачата. Тъй като $l_a \perp AP$, то втората пресечна точка A_2 на правата l_a с k е диаметрално противоположна на A. Аналогично диаметрално противоположните точки B_2 и C_2 съответно на B и C са вторите пресечни точки съответно на l_b и l_c с k. Шестоъгълникът AA_2PB_2BC е вписан в окръжността k и от теоремата на Паскал, приложена за него, следва, че точките $O = AA_2 \cap B_2B$, $A_1 = A_2P \cap BC$ и $B_1 = PB_2 \cap CA$ лежат на една права. Аналогично се доказва, че правите A_1C_1 и B_1C_1 минават през O. С това задачата е решена.



Задача 3. Всяка от пет сфери се допира до останалите четири. Ако четири от тези сфери имат радиуси, равни на единица, да се определи радиусът на петата.

Милен Найденов, Варна

Решение. Центровете на еднаквите сфери образуват правилен тетраедър с ръб 2. Височината на този тетраедър е $H = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Нека радиусът на петата сфера е x. Ако тази сфера се допира външно до останалите четири, то $x < 1$ и $H = x + 1 + \sqrt{(x+1)^2 - \frac{4}{3}}$, а ако допирането е вътрешно, то $x > 1$ и $H = x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 - \frac{4}{3}}$. След приравняване на получените изрази за H получаваме, че сферата, която се намира между еднаквите сфери, има радиус $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} - 1$, а тази, която ги съдържа, има радиус $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} + 1$.