# РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 4, 2015

**Задача 1.** За реалните положителни числа $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ $(n \ge 2)$ е изпълнено равенството $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = s$. Да се докаже неравенството $\frac{x_1^3}{s - x_1^2} + \frac{x_2^3}{s - x_2^2} + \cdots + \frac{x_n^3}{s - x_n^2} \ge \frac{\sqrt{ns}}{n-1}$. Кога се достига равенството?

*Лучиан Туцеску – Крайова, и Мариан Воинеа – Букурещ*

*Решение.* Без ограничение на общността можем да считаме, че $x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n$. Тогава $x_1^3 \ge x_2^3 \ge \cdots \ge x_n^3$ и $\frac{1}{s - x_1^2} \ge \frac{1}{s - x_2^2} \ge \cdots \ge \frac{1}{s - x_n^2}$. Оттук според неравенството на Чебишов следва

$$(*) \quad \frac{x_1^3}{s - x_1^2} + \frac{x_2^3}{s - x_2^2} + \cdots + \frac{x_n^3}{s - x_n^2} \ge \frac{1}{n}\left(x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3\right)\left(\frac{1}{s - x_1^2} + \frac{1}{s - x_2^2} + \cdots + \frac{1}{s - x_n^2}\right).$$

От неравенството на Чебишов следва още, че $\left[\left(s - x_1^2\right) + \left(s - x_1^2\right) + \cdots + \left(s - x_1^2\right)\right]\left(\frac{1}{s - x_1^2} + \frac{1}{s - x_2^2} + \cdots + \frac{1}{s - x_n^2}\right) \ge n^2$, което води до неравенството $\frac{1}{s - x_1^2} + \frac{1}{s - x_2^2} + \cdots + \frac{1}{s - x_n^2} \ge \frac{n^2}{(n-1)s}$.

След последователно прилагане на „хубавото неравенство“ и неравенството между средното аритметично и средното квадратично получаваме

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = \frac{x_1^4}{x_1} + \frac{x_2^4}{x_2} + \cdots \frac{x_n^4}{x_n} \ge \frac{\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} =$$

$$= \frac{s^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \ge \frac{s^2}{\sqrt{n\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)}} = \frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{n}}.$$

След заместване на намерените две неравенства в дясната страна на $(*)$ $\frac{x_1^3}{s - x_1^2} + \frac{x_2^3}{s - x_2^2} + \cdots + \frac{x_n^3}{s - x_n^2} \ge \frac{\sqrt{ns}}{n-1}$. Равенство се достига тогава и само тогава, когато $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{\frac{s}{n}}$.

**Задача 2.** Нека $M$ и $N$ са такива точки съответно от страните $AC$ и $BC$ на остроъглния триъгълник $ABC$, че е изпълнено равенството $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ANB = 180^\circ$. Ако $P$ и $Q$ са средите съответно на отсечките $AN$ и $BM$, а $T$ е пресечната им точка, да се докаже, че когато точките $M$ и $N$ менят положенията си върху страните $AC$ и $BC$, описаната около $\Delta PQT$ окръжност минава през постоянна точка. Къде лежи тази точка?

*Хаим Хаимов – Варна*

*Решение.* Нека $E$ е средата на $AB$, а $O$ е втората пресечна точка на описаната около $\Delta MNC$ окръжност с медианата $CE$. Ще покажем, че когато $M$ и $N$ менят положенията си съответно върху $AC$ и $BC$, точката $O$ лежи върху описаната за $\Delta PQT$ окръжност $k$ и е постоянна за $k$. От равенствата $\frac{1}{2}OM.AC.\sin\sphericalangle OMC = S_{AOC} = S_{BOC} = \frac{1}{2}ON.BC.\sin\sphericalangle ONB$ и $\sphericalangle OMC = \sphericalangle ONB$ следва, че $OM.AC = ON.BC$, т.е. От друга страна, равенствата $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ANB = 180^\circ$ и $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.MB.\sin\sphericalangle AMB = \frac{1}{2}BC.NA.\sin\sphericalangle ANB$ водят до $\frac{MB}{NA} = \frac{BC}{AC}$. Следователно $\frac{OM}{ON} = \frac{MB}{NA} = \frac{BC}{AC}$. Сега от условието $\sphericalangle AMB + \sphericalangle ANB = 180^\circ$ следва, че $\sphericalangle BMC + \sphericalangle ANC = 180^\circ$. Затова четириъгълникът $MTNC$ е вписан в окръжност $k_0$, т.е. точката $T$ лежи върху описаната около $\Delta MNC$ окръжност. Оттук следва, че $\sphericalangle OMT = \sphericalangle ONT$, т.е. $\sphericalangle OMB = \sphericalangle ONA$.

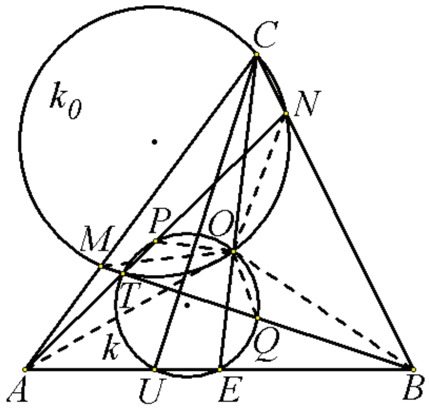
Следователно $\Delta MOB \sim \Delta NOA$, откъдето $\frac{OA}{OB} = \frac{AN}{BM} = \frac{AC}{BC}$. Заключаваме, че $O$ е втората пресечна точка на $CE$ с Аполониевата окръжност за отсечката $AB$ при отношение $\frac{AC}{BC}$. Следователно точката $O$ е неподвижна точка върху медианата $CE$. Освен това от $\Delta MOB \sim \Delta NOA$ следва, че $\Delta OQB \sim \Delta OPA$. Затова $\sphericalangle OQB = \sphericalangle OPA = \sphericalangle OPT$. Следователно четириъгълникът $OPQT$ е вписан в окръжност, т.е. $O \in k$. С това задачата е решена, но се оказва, че окръжността $k$ минава през още една постоянна точка. Това е средата $E$ на $AB$. В доказателството на този факт ще из ползваме означенията: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$

,

$\sphericalangle AMB = \delta$ и $S$ – лицето на $\Delta ABC$. От синусовата теорема за $\Delta ABM$ имаме равенствата $\dfrac{BM}{\sin\alpha} = \dfrac{AM}{\sin(\alpha+\delta)} = \dfrac{AB}{\sin\delta}$. Оттук следва $BM = \dfrac{c.\sin\alpha}{\sin\delta}$ и $AM = \dfrac{c}{\sin\delta}(\sin\alpha\cos\delta + \sin\delta\cos\alpha) = c(\sin\alpha ctg\delta + \cos\alpha)$.

След заместване на равенствата $\sin\alpha = \dfrac{2S}{bc}$ и $\cos\alpha = \dfrac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}$ получаваме $BM = \dfrac{2S}{b\sin\delta}$ и $AM = \dfrac{4S.ctg\delta - a^2 + b^2 + c^2}{2b}$. Аналогично от синусовата теорема за $\Delta ABN$, която се изразява с равенствата $\dfrac{AN}{\sin\beta} = \dfrac{BN}{\sin(\delta-\beta)} = \dfrac{AB}{\sin\delta}$ и равенствата $\sin\beta = \dfrac{2S}{ac}$ и $\cos\beta = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2ac}$ следват равенствата $AN = \dfrac{2S}{a\sin\delta}$ и $BN = \dfrac{-4S.ctg\delta + a^2 - b^2 + c^2}{2a}$.
От свойствата на секущите към окръжността $k_0$ следват равенствата $AT.AN = AM.AC$ и $BT.BM = BN.BC$. Оттук, като вземем предвид получените по-рано равенства, намираме $AT = \dfrac{a.\sin\delta}{4S}\left(4S.ctg\delta - a^2 + b^2 + c^2\right)$ и $BT = \dfrac{b.\sin\delta}{4S}\left(-4S.ctg\delta + a^2 - b^2 + c^2\right)$. Нека сега $k_1$ е описаната около $\Delta AET$ окръжност. От свойствата на секущите към $k_1$ следва $AU.AE = AT.AP$. Тъй като $AE = \dfrac{c}{2}$, $AP = \dfrac{AN}{2}$ и $UE = AE - AU$, то $UE = \dfrac{1}{2c}\left(-4S.ctg\delta + a^2 - b^2\right)$.
Нека $k_1$ пресича за втори път $BM$ в точка $Q'$. От свойството на секущите към $k_1$, изразяващо се с равенството $BQ'.BT = BE.BU$, и равенствата $BE = \dfrac{c}{2}$ и $BU = BE + UE$ следва $BQ' = \dfrac{(c+2UE)cS}{b\sin\delta\left(-4Sctg\delta + a^2 - b^2 + c^2\right)}$.
След заместване в това равенство на намерения израз за $UE$ получаваме $BQ' = \dfrac{S}{b\sin\delta}$. Следователно $BQ' = \dfrac{BM}{2}$. Това означава, че $Q'$ е среда на $BM$, т.е. $Q' \equiv Q$. Следователно $k_1 \equiv k$ и $k$ минава през $E$. Така окончателно стигаме до извода: когато точките $M$ и $N$ се движат съответно по $AC$ и $BC$,

окръжността $k$ пресича медианата $CE$ на $\Delta ABC$ в две постоянни точки, едната от които е средата $E$ на $AB$, а другата е такава точка $O$, за която е изпълнено $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AC}{BC}$.




**Задача 3.** Дадени са сфера $S$ и точките $A_1$, $A_2$, $\dots$, $A_n$ върху нея. Да се определи множеството от точки $P$, които са вътрешни за $S$ и удовлетворяват равенството $\dfrac{A_1P}{PB_1}+\dfrac{A_2P}{PB_2}+\cdots+\dfrac{A_nP}{PB_n}=n$, където $B_k$ е пресечната точка на $A_kP$ и $S$ $\left(k=1,2,\dots,n\right)$.

*Христо Лесов – Казанлък*

*Решение.* Нека $O$ и $R$ са съответно центърът и радиусът на сферата $S$. При $n=1$ върху $S$ е дадена само една точка $A_1$ и е изпълнено равенството $\dfrac{A_1P}{PB_1}=1$, т.е. $A_1P=PB_1$. Затова $P$ е средата на хордата $A_1B_1$ и лежи върху окръжност, описана около правоъгълния триъгълник $A_1PO$ $\left(\sphericalangle A_1PO=90^\circ\right)$ или $P\equiv O$. Следователно търсеното множество е сфера с диаметър $A_1O=R$ без точката $A_1$. При $n\geq 2$ върху $S$ са дадени поне две точки, а тройките точки $A_1$, $P$, $O$; $A_2$, $P$, $O$;…; $A_n$, $P$, $O$ лежат на окръжности с общ диаметър

$DE = 2R$, където $D$ и $E$ са пресечните точки $OP$ с $S$. От тези окръжности следва зависимостта

$$A_1P.PB_1 = A_2P.PB_2 = \cdots = A_nP.PB_n = DP.PE = (R+OP)(R-OP) = R^2 - OP^2.$$

Даденото в условието равенство преобразуваме във вида

$$\frac{A_1P^2}{A_1P.PB_1} + \frac{A_2P^2}{A_2P.PB_2} + \cdots + \frac{A_nP^2}{A_nP.PB_n} = n \text{ или } \frac{A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots A_nP^2}{R^2 - OP^2} = n, \text{ т.е.}$$

$A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots + A_nP^2 = n.(R^2 - OP^2) \quad (1)$. От известното равенство на Лайбниц или теоремата на Лагранж за инерчните моменти $I_G$ и $I_P$ на системата точки $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$ с равни маси спрямо нейния масов център $G$ и произволна точка $P$ следва $I_P - I_G + n.PG^2$, т.е. $A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots + A_nP^2 = A_1G^2 + A_2G^2 + \cdots + A_nG^2 + n.PG^2$ (2 (Паскалев, Г., И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985). При $P \equiv O$ от $(2)$ получаваме $A_1O^2 + A_2O^2 + \cdots + A_nO^2 = A_1G^2 + A_2G^2 + \cdots + A_nG^2 + n.OG^2$.

Тъй като $A_1O = A_2O = \cdots = A_nO = R$, то $A_1G^2 + A_2G^2 + \cdots + A_nG^2 = n.(R^2 - OG^2)$. Сега заместваме в $(2)$ и намираме $A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots + A_nP^2 = n.(R^2 - OG^2 + PG^2) \; (3)$. От $(1)$ и $(3)$ следва, че $n.(R^2 - OP^2) = n.(R^2 - OG^2 + PG^2)$ или $OP^2 + PG^2 = OG^2$. От теоремата, обратна на Питагоровата, следва, че $\sphericalangle OPG = 90^\circ$. Това означава, че точката $P$ описва сфера с диаметър $OG$, която е вътре в дадената сфера $S$, защото точките $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ са върху $S$, а $G$ е вътрешна за $S$. Остава да покажем, че за всяка точка $P$ от сферата с диаметър $OG$ е изпълнено равенството $(1)$. Тъй като $\sphericalangle OPG = 90^\circ$, от Питагоровата теорема имаме $OP^2 + PG^2 = OG^2$, т.е. $PG^2 - OG^2 = -OP^2$. Но равенството $(3)$ е в сила за произволна точка $P$ и затова имаме $A_1P^2 + A_2P^2 + \cdots + A_nP^2 = n.(R^2 - OP^2)$, което е $(1)$. С това е доказано, че търсеното множество от точки $P$ е сфера с диаметър $OG$.