Educational Technologies
Образователни технологии

ХИПОТЕЗАТА В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Румяна Маврова, Пенка Рангелова, Елена Тодорова
Пловдивски университет „Паисий Хилендарски"

Резюме. В настоящата работа се показва изграждането на хипотеза чрез използване на аналогия и индукция в обучението по математика.
Keywords: teaching, hypothesis, analogy, induction

Въведение. На съвременния етап на развитие на обществото се изисква учениците да имат по-задълбочени знания по различни науки. Но в училище не е възможно те да получат всички онези знания, които ще им бъдат необходими в живота. Това налага при обучението им да ги запознаем с различни методи за придобиване на знания. С усвояването на тези методи ученикът ще се приучи сам да придобива нови знания, сам да открива, обобщава, решава и прилага знания, свързани с конкретен проблем.

Един от пътищата за достигане до нови знания е използването на хипотезата. В редица публикации (Vilkeev, 1967), (Nikolov & Mavrova, 1993), (Penev, 1976) и др. през различни периоди от време се обръща внимание на хипотезата в обучението, тъй като тя е постоянен спътник и в живота на хората при тяхната трудова дейност. Затова тя трябва да заеме подобаващо място при обучението в нашето училище.

В (Milev, Bratanov & Nikolov, 1970) се посочва, че думата хипотеза има гръцки произход (hypothesis) и е „научнообосновно предположение, което обосновава някакво явление и трябва да се провери чрез доказателства, за да стане научна теория или научен закон". Пак в този източник поясняват, че хипотезата е предположение, вероятност, догатка.

Можем да отбележим, че хипотезата се явява логическа връзка между старите и новите факти, но не просто ги свързва, а е насочена към тяхното обяснение.

Метода на познание, свързан с издигането и проверката на хипотези, някои автори (Milev, Bratanov & Nikolov, 1970) наричат „метод на хипотезите".

Ще отбележим, че всяка хипотеза има характер на относителна истина, т.е. представлява приблизително вярно обяснение (Penev, 1976).

В настоящата работа ще споделим опита си по използването на хипотезите в обучението по математика. Ще посочим и методите на познание, които спомагат за издигането на хипотезите.

Изграждане на хипотеза чрез използване на аналогия

Ще отбележим, че при изграждането на хипотезите много важна роля играе аналогията. Редица автори (Nikolov & Mavrova, 1993), (Poja, 1970), (Portev & Nikolov, 1987) и др. са писали за аналогията.

Един от водещите автори – Д. Пойа, подчертава, че „когато разглеждаме аналогията, стъпваме на по-хлъзгава плоча" (Poja, 1970). Той посочва, че „аналогията е вид подобие", и подчертава, че „тя е подобие на определено и на концептуално ниво". Д. Пойа се опитва да изясни това понятие „по-неточно", както той казва, и уточнява: „Съществeното различие между аналогията и другите видове сходство се крие, както ми се струва, в намеренията на мислещия. Сходните обекти се съгласуват един с друг в известно отношение". Ще отбележим, че Д. Пойа (Poja, 1970) счита, че „две системи са аналогични, ако те се съгласуват по ясно определени съотношения на своите съответни части".

Така че аналогията се разглежда като отношение (връзка, релация) между два обекта. В този аспект аналогията е изяснена от Ю. А. Шрейдер (Shreyder, 1971).

Аналогията се разглежда и като умозаключение, при което от сходството на два обекта по отношение на някои техни свойства се прави извод за сходството им по отношение и на други свойства. По този начин се получават нови твърдения за единия от сходните обекти, като се използват знания за другия. В този аспект аналогията се разглежда от А. И. Уемов (Uemov, 1977). Новите твърдения, получени по аналогия, са само вероятни и подлежат на обосноваване, тъй като методът не се основава на правила за извод.

При използването на аналогията обучението по математика се организира така, че да се формира у учениците ориентировъчна основа, чиито ориентири са предоставени в обобщен вид, характерен за редица явления.

При прилагане на аналогията за разкриване на нови твърдения бе използвано следното предписание от алгоритмичен тип (Mavrova, 1978).

„1. Установяване на сходство:

а) разкриване на общото в определенията или свойствата на двете понятия чрез анализиране и сравняване;

б) посочване как едното определение или свойство може да се получи от другото.

2. Разкриване на аналогични свойства."

Това предписание допринася за насочване мисловната дейност на учениците.

Казаното по-горе ще илюстрираме с разглеждането на следните примери.

При изучаване на темата „Геометрична прогресия" може да се установи сходство между геометрична прогресия и аритметична прогресия, като се анализират и сравнят определенията на двете понятия.

Определение 1. Аритметична прогресия е числова редица, на която всеки член след първия се получава, като към предходния се прибави едно и също число (Paskalev & Paskaleva, 2001).

Определение 2. Геометрична прогресия е числова редица, на която всеки член след първия се получава, като предходен член се умножи с едно и също число (Paskalev & Paskaleva, 2001).

На учениците се поставя задачата:

1. Да разкрият общото в опреденията.

2. Да посочат как определението за геометрична прогресия се получава от определението за аритметична прогресия.

След анализиране и сравнение на двете определения се установява:

1. Двете определения са сходни. Всяко от тях може да бъде получено от следната обща структура: „Дадена числова редица наричаме прогресия, ако всеки член след първия се получава от предходния чрез извършване на дадена операция с едно и също число".

2. Определението за геометрична прогресия може да се получи от определението за аритметична прогресия чрез заместване на термина „прибавям" с термина „умножавам", т.е. заместваме сбор с произведение.

Учениците са изучили свойствата на аритметична прогресия, а именно (Paskalev & Paskaleva, 2001):

Свойство 1. Една числова редица $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ е аритметична прогресия тогава и само тогава, когато за всяко $n \geq 2$ е изпълнено $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Свойство 2. Във всяка крайна аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ сборът на два члена, равноотдалечени от крайните ѝ членове, е равен на сбора на двата крайни члена т.е. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots$

На учениците се задава за самостоятелна работа да разкрият и формулират твърдения за геометрична прогресия, които са аналогични на посочените по-горе свойства.

Така учениците, заменяйки сбора с произведение, получават **свойство 1** и **свойство 2** (Paskalev & Paskaleva, 2001) на геометрична прогресия. Изказаните **свойства 1** и **2** трябва да се докажат. Проблемът за доказателството на хипотезата е свързан и със съвременното методологическо изискване за издигане на множество хипотези. „Изследванията на процеса на познание показват, че когато се използва само една хипотеза, изследователят нагажда несъзнателно за самия себе си начина на своята работа и фактите така, че да ги пригоди към хипотезата. Когато хипотезите са много, проверката им става обективна" (Nikolov & Mavrova, 1993).

Най-голямо е приложението на аналогията в училище при изучаване на стереометрията.

Д. Пойа в (Shreyder, 1971) пише: „Триъгълникът в равнината е аналогичен на тетраедъра в пространството. В равнината две прави линии не могат да заграждат крайна фигура, но три могат да заграждат триъгълник. В пространството три равнини не могат да заграждат крайна фигура, но четири могат да заграждат тетраедър. Отношението на триъгълника към равнината е същото, както това на тетраедъра към пространството дотолкова, доколкото триъгълник и тетраедър са ограничени от минималния брой прости гранични елементи. Оттук и аналогията".

Имайки предвид казаното по-горе, може да се установи сходство между паралелепипеда и успоредника на генетична основа, а именно успоредникът е образуван от пресичането на най-малък брой двойки успоредни прави, а паралелепипедът – от най-малък брой двойки успоредни равнини. Ще посочим и други нови твърдения, които могат да се получат по самостоятелен път по аналогия от познатите им свойства на равнинни фигури.

Например: сходство може да се установи между успоредността на две прави в равнината, от една страна, и успоредността на две прави, на прави и равнина или на две равнини в пространството от друга страна; ъгъл, определен от две прави в равнината, и ъгъл, определен от две равнини в пространството; между окръжност в равнината и сфера в пространството и др. Получените твърдения в пространството имат хипотетичен характер и те трябва да се докажат.

Например: разглеждайки успоредник и паралелепипед от твърденията за успоредник, като:

1. противоположните страни в успоредника са успоредни и равни отсечки.

2. диагоналите на успоредника се пресичат в една точка и се разполовяват от нея.

Можем да издигнем хипотезите, отнасящи се за стереометричната фигура, а именно:

1‘. Противоположните стени на паралелепипеда са успоредни и еднакви многоъгълници.

2‘. Диагоналите на паралелепипеда се пресичат в една точка и се разполовяват от нея.

Издигнатите хипотези на базата на аналогията могат да бъдат както верни, така и неверни твърдения. На това трябва да се обърне внимание на учениците.

Освен при получаване на нови знания по аналогия могат да се разгледат с учениците и аналогични задачи.

Например:

Ако числата a и b са положителни, то $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

1‘. Ако числата $a,\ b,\ c$ са положителни, то $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$.

От всички правоъгълници с даден диагонал най-голямо лице има квадратът.

2‘. От всички правоъгълни паралелепипеди с даден диагонал най-голям обем има кубът.

3. Да се докаже, че за всеки триъгълник е в сила равенството $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$, където r е радиус на вписаната окръжност в триъгълника, а $h_a,\ h_b,\ h_c$ са височините му.

3‘. Да се докаже, че за всеки тетраедър е в сила равенството $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_d}$, където r, е радиусът на вписаната сфера в тетраедъра, а $h_a,\ h_b,\ h_c$ и h_d са височините му.

4. Ако в правоъгълен ΔABC h е дължина на височината, построена през върха на правия ъгъл, то $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

4‘. Ако в правоъгълен тетраедър $ABCD$ h е дължина на височината, построена през върха на правия тристенен ъгъл, и $a,\ b,\ c$ са дължините на взаимно перпендикулярни ръбове, то $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

5. Докажете неравенството $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$, където $a,\ b,\ c$ са положителни числа.

5‘. Вярно ли е, че $a+b+c+d \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{cd}+\sqrt{da}$, където $a,\ b,\ c,\ d$ са положителни числа.

6. За числата a и b е изпълнено неравенството $a+b \leq \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$.

6‘. За числата a, b и c е изпълнено неравенството $a+b+c \le \sqrt{3\left(a^2+b^2+c^2\right)}$.

Както споменахме по-горе, получените по аналогия твърдения могат да бъдат както верни, така и неверни. Затова в обучението по математика трябва на учениците да се обръща внимание на допускането на неправилни аналогии.

Например: невярно е твърдението $\frac{a+c}{b+c}=\frac{a}{b}$, получено по „аналогия" от $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$; $a\sin bx = b\sin ax$ по „аналогия" с $abx = bax$; $\lg\left(a+b\right)=\lg a+\lg b$ по „аналогия" с $a\left(b+c\right)=ab+ac$ т.н.

Борбата с тези грешни аналогии може да се осъществи чрез използването на контрапримери, с които се показва неверността на направените изводи.

Например:

$\lg\left(1000+10\right)=\lg 1000+\lg 10$. От $\lg\left(1010\right)=3,...$ и $\lg 1000+\lg 10=3+1=4$ стигаме до извода, че $3,...=4$, което отхвърля твърдението, че $\lg\left(a+b\right)=\lg a+\lg b$.

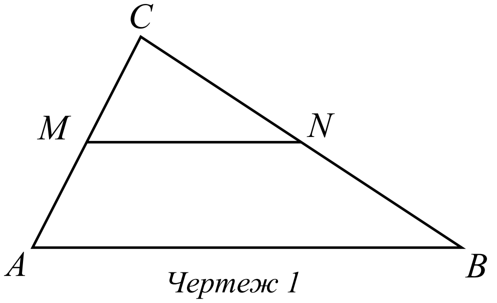
Може да се използва също така и обосноваване на извода чрез използване на доказани твърдения, свойства, определения и т.н.

Изграждане на хипотезата чрез използване на индукцията

Освен аналогията в обучението по математика за издигане на хипотези може да се използва индукцията (непълната).

В (Nikolov & Mavrova, 1993) авторите пишат: „Индукцията (от латински „indyctro" навеждане, насочване) е метод на познание, основаващ се на логически разсъждения, изхождащи от твърдение с по-малко общ характер и насочени към твърдение с по-общ характер. В този случай въз основа на знанията за част от предметите за даден клас се прави извод за класа като цяло. Индукцията винаги е някакво обобщение".

Като имаме предвид казаното, ще посочим, че индукцията „прави резултатите му вероятни, но тя никога не ги доказва" (Poja, 1970). Тук имаме предвид непълната индукция. Д. Пойа още подчертава, че „грижливото наблюдение на частни случаи, които ни водят до един общ математически резултат, може да подскаже и неговото доказателство".



Чертеж 1

Ще разгледаме следните примери.

При изучаване на средна отсечка в триъгълник на учениците се поставя проблемът: какво свойство притежава средната отсечка в триъгълника?

За целта от учениците се изисква всеки от тях да начертае триъгълник и средна отсечка в него (чертеж 1).

След което им се предложи да измерят $\sphericalangle$*ù* и $\sphericalangle CAB$ и да измерят отсечките MN и в случая AB.

След анализиране и сравняване на големините на ъглите и дължините на отсечките се стигна до извода, че $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$. Тук се обърна внимание на получените конкретни резултати, сравнихме ги и учениците забелязаха „откъслечни" закономерности, след което се стига до извода, че получените резултати имат вероятен характер, защото се отнасят до фигурите, начертани от тях. Стигна се до извода, че този резултат трябва да се докаже, за да е валиден за всяка средна отсечка в триъгълник.

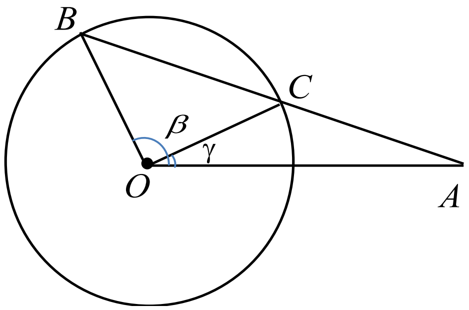
В този случай използвахме непълната индукция. „Непълната индукция разширява човешките знания, защото в умозаключението се съдържа повече информация, отколкото в изходните предпоставки. Колкото е по-голяма нейната база, т.е. колкото повече частни случаи съдържа, толкова по-вероятен е индуктивният извод."

Изводите по метода на непълната индукция могат да се правят не само на основата на количествени измервания, но и на качествено ниво.

Чрез индуктивното обобщение се установяват не само закономерностите, но се определят съществени признаци на обекти и явления (вписан ъгъл, успоредник и др.)

Д. Пойа (Poja, 1970) посочва, че „при работа със задачи от какъвто и да е тип се нуждаем от определен вид индуктивни разсъждения".

За целта ще разгледаме следната задача.



Чертеж 2

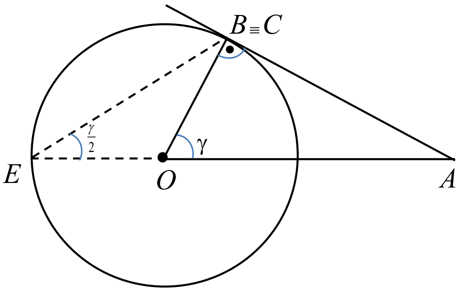
Дадена е окръжност k с радиус R и център O. От точка A, лежаща вън от окръжността, намираща се на разстояние a от точка O, е построена секуща (чертеж 2). Нека точките B и C са пресечните точки на секущата с окръжността. Съединяваме точките и C с центъра O и нека $\sphericalangle BOA$ и $\sphericalangle COA$ означим съответно с β и γ. Намерете $tg\frac{\beta}{2}.tg\frac{\gamma}{2}$.

За да подпомогнем решаването на задачата, разглеждаме частен случай, когато $\beta = \gamma$, т.е. разглеждаме граничното положение на секущата. Получава се

следната ситуация (чертеж 3) $tg\dfrac{\beta}{2}.tg\dfrac{\gamma}{2} = \left(tg\dfrac{\gamma}{2}\right)^2 = \dfrac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}$,

но $\cos\gamma = \dfrac{R}{a}$. Така получаваме за тази ситуация, че

$tg\dfrac{\beta}{2}.tg\dfrac{\gamma}{2} = \left(tg\dfrac{\gamma}{2}\right)^2 = \dfrac{a-R}{a+R}$.



Чертеж 3

С направените изводи в помощната задача ще трябва да достигнем до решението на дадената задача. За целта използваме (чертеж 4), че ΔBEM и ΔCEM са правоъгълни и $tg\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{BM}{BE}$, а $tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{CM}{CE}$.

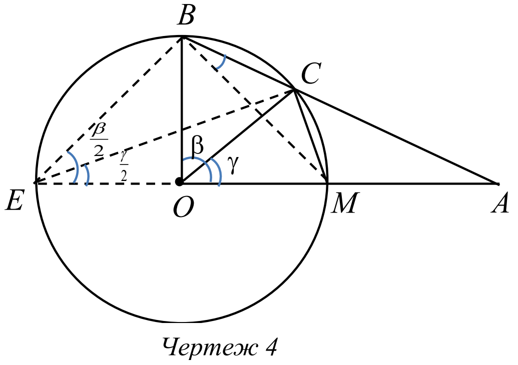
Тогава $tg\dfrac{\beta}{2}.tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{BM}{BE}.\dfrac{CM}{CE}$ (1).

От подобните триъгълници ΔAMC и ΔABE $\left(AB.AC = AE.AM\right)$ следва, че

$\dfrac{CM}{BE} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{a-R}{AB}$.

От CE и $a+R$ са елементи в подобните триъгълници ΔACE и ΔAMB,

откъдето получаваме $\dfrac{MB}{CE} = \dfrac{AB}{a+R}$. Така, като заместваме в (1), получаваме

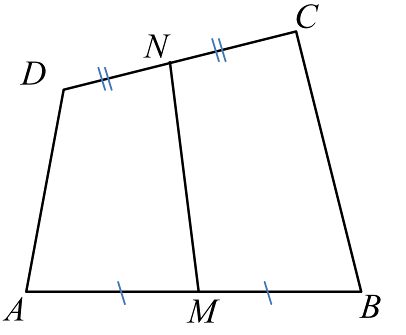


Чертеж 4

$tg\dfrac{\beta}{2}.tg\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{a-R}{AB}.\dfrac{AB}{a+R} = \dfrac{a-R}{a+R}$

.По аналогичен начин, т.е. използвайки граничен преход, който води до разглеждане на частни случаи, се постъпва и при решаването на следната задача.

В четириъгълник $ABCD$ (чертеж 5) двете страни AD и BC не са успоредни. Кое е по-голямо: полусумата от тези страни или отсечката MN, съединяваща средите на другите две страни на четириъгълника (Mavrova, 2000)?



Чертеж 5

Използването на хипотезата при обучението по математика изисква повече време, отколкото при обикновеното изложение на учебния материал. За сметка на това по-добре се осъществяват редица образователни и възпитателни цели. Издигането на хипотеза показва на учениците какъв е пътят на научното изследване. Освен това се допринася за:

– съзнателното и трайно усвояване на знанията;

– формиране у учениците на умения самостоятелно да получават правдоподобни твърдения от известните им вече знания;

– повишаване интереса у тях към математиката, тъй като учебната дейност придобива изследователски характер;

– повишаване ефективността на обучението;

– избягване на грешки, допускани поради неправилни аналогии или обобщения чрез използването на индукция.

Учениците трябва да обърнат внимание на това, че хипотезите, които се получават по аналогия и индукция, изискват обосноваване (доказателство), тъй като не се изключва възможността те да бъдат погрешни, защото не се основават на правила за извод.

Накрая ще отбележим, че освен използваната т.нар. „проста аналогия", при която изводът има хипотетичен характер, има и аналогия, която запазва зависимостите на известни съотношения и в математиката се нарича изоморфизъм. Изоморфизмът е един напълно изяснен вид аналогия и в настоящата статия нямаме за цел да го изясняваме.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Vilkeev, D. (1967). *Rol gipotezay v obuchenii*. Sovetskaya pedagogiki, 6, 59 – 67 [Вилькеев, Д. (1967). *Роль гипотезы в обучении.* Совет ская педагогика, 6, 59 – 67]

Mavrova, R. (1978). *Analogiyata pri obuchenieto po stereometriya*, Nauchni trudove, PU „Paisiy Hilendarski", 16 (6), 581 – 592. [Маврова, Р. (1978). *Аналогията при обучението по стереометрия,* Научни трудове, ПУ „П. Хилендарски", 16 (6), 581 – 592.]

Mavrova, R. (2000). *Pomagalo po problemi na metodikata na obuchenieto po matematika, I chast Obshta metodika*. Plovdiv: Makros. [Маврова, Р. (2000).

Помагало по проблеми на методиката на обучението по математика, I част Обща методика. Пловдив: Макрос.]

Milev, Al., Bratkov, I. & Nikolov, B. (1970). *Rechnik na chuzhdite dumi v balgarskia ezik*. Sofia: Nauka i izkustvo [Милев, Ал., Братков, И. & Николов, Б. (1970). *Речник на чуждите думи в българския език*. София: Наука и изкуство]

Nikolov, St. & Mavrova, R. (1993). *Metodi na nauchnoto poznanie*. Plovdiv: Makros [Николов, Ст. & Маврова, Р. (1993). *Методи на научното познание*. Пловдив: Макрос]

Paskalev, G. & Paskaleva, Zdr. (2001). *Matematika 11. klas – parvo ravnishte*. Sofia: Arhimed [Паскалев, Г. & Паскалева, Здр. (2001). *Математика за XI клас – първо равнище*. София: Архимед]

Penev, A. (1976). Hipotezata i neynata rolya pri obuchenieto. *Narodna prosveta*, 7 36 – 45 [Пенев, А. (1976). Хипотезата и нейната роля при обучението, *Народна просвета*, 7, 36 – 45]

Poja, D. (1970). *Matematika i pravdopodobnite razsajdeniia, tom I: Indukzia I analogia v matematikata.* Sofia: Narodna prosveta. [Пойа, Д. (1970). *Математика и правдоподобните разсъждения, том I: Индукция и аналогия в математиката*. София: Народна просвета]

Portev, L. & Nikolov, N. (1987). *Metodika na obuchenieto po matematika*. Plovdiv: Paisiy Hilendarski [Портев, Л. & Николов, Н. (1987). *Методика на обучението по математика*. Пловдив: Унив. изд. „Паисий Хилендарски"]

Uemov A. I. (1977). *Analogia i uchebnay protses*, kn. Logika i problemы obuchenia. Moskva: Pedagogika [Уемов А. И. (1977). *Аналогия и учебный процесс*, кн. Логика и проблемы обучения. Москва: Педагогика]

Shreyder, A. (1971). *Ravenstva, shodstva, paryadak*. Moskva: Nauka [Шрейдер, А. (1971). *Равенство, сходство, порядок*. Москва: Наука]

THE HYPOTHESIS IN TEACHING MATHEMATICS

Abstract. The present paper shows the building of a hypothesis via analogy and induction in teaching Mathematics.

✉ **[1] Dr. Rumyana Mavrova, Assoc. Prof., [2] Prof. Dr. Penka Rangelova**
[3] Dr. Elena Todorova, Assist. Prof
Faculty of Mathematics and Informatics
Plovdiv University "Paisiy Hilendarskiy"
236, Bulgaria Blvd.
4003 Plovdiv, Bulgaria
E-mail: [1] rummav@abv.bg; [2] rangelova_penka@abv.bg; [3] etodorova@uni-plovdiv.bg