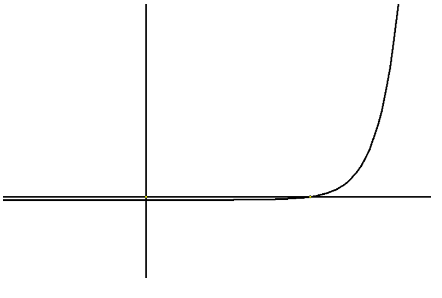
Конкурсни задачи
Contest Problems

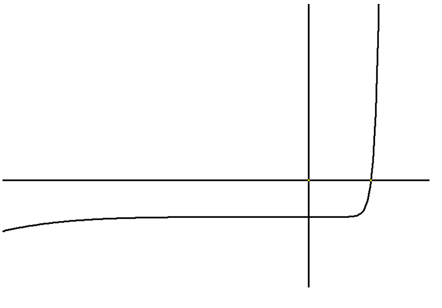
РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 5, 2015

Задача 1. Да се намери сборът от корените на уравненията $3.2^x+8.3^x=159000$ и $x^5+32.11^x=56697728$.

Милен Найденов, Варна

Решение. Разделяме двете страни на първото уравнение на 24 и получаваме $2^{x-3}+3^{x-1}=6625$. Полагаме $u=x-2$ и уравнението добива вида $2^u+6.3^u=13250$. Тъй като функцията $f(u)=2^u+6.3^u-13250$ е растяща (лявата графика на чертежа), то уравнението $f(u)=0$ има единствено реално решение u_0. С непосредствена проверка се вижда, че това решение е $u_0=7$. Оттук намираме, че $x_1=u_0+2=9$ е единственото решение на първото уравнение. След това разделяме двете страни на второто уравнение на 32 и получаваме $\left(\frac{x}{2}\right)^5+11^{2.\left(\frac{x}{2}\right)}=1771804$. Полагаме $v=\frac{x}{2}$ и уравнението добива вида $v^5+11^{2.v}=1771804$. Тъй като функцията $f(v)=v^5+11^{2.v}-1771804$ е растяща (дясната графика на чертежа), то уравнението $f(u)=0$ има единствено реално решение v_0. С непосредствена проверка се вижда, че това решение е $v_0=3$. Оттук намираме, че $x_2=2.v_0=6$ е единственото решение на второто уравнение. От получените резултати следва, че търсената сума от корени е следната $x_1+x_2=9+6=15$.

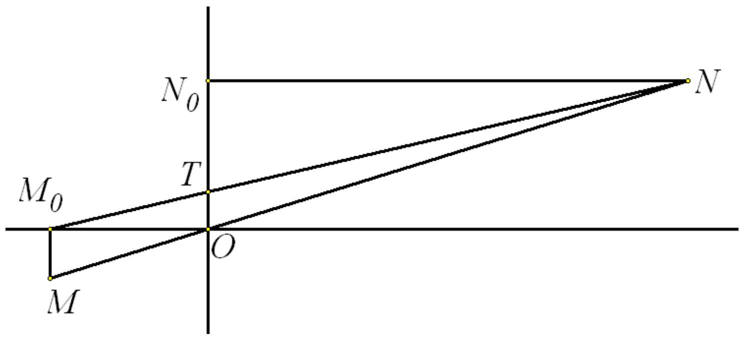




Задача 2. Перпендикулярните прави m и n се пресичат в точка O, а точките M и N лежат на права l, минаваща през O. Ортогоналната проекция на M върху m е M_0, а ортогоналната проекция на N върху n е N_0. Ако M_0N пресича отсечката ON_0 в точка T, а дължините на отсечките ON_0 и MM_0 са съответно 7 и 4, да се намери дължината на OT.

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Решение. От подобните триъгълници OMM_0 и NON_0 следва равенството $\frac{MM_0}{ON_0} = \frac{OM_0}{NN_0}$, а от подобните триъгълници M_0OT и NN_0T следва, че $\frac{OM_0}{NN_0} = \frac{OT}{N_0T}$. От тези равенства получаваме $\frac{MM_0}{ON_0} = \frac{OT}{N_0T}$. Оттук $MM_0.N_0T = OT.ON_0$ и получаваме $MM_0.\left(ON_0 - OT\right) = OT.ON_0$, $MM_0.ON_0 = OT.ON_0 + OT.MM_0$. Последното равенство разделяме на $MM_0.ON_0.OT$ и стигаме до $\frac{1}{OT} = \frac{1}{ON_0} + \frac{1}{MM_0}$. Сега след заместване намираме $OT = \frac{28}{11}$.

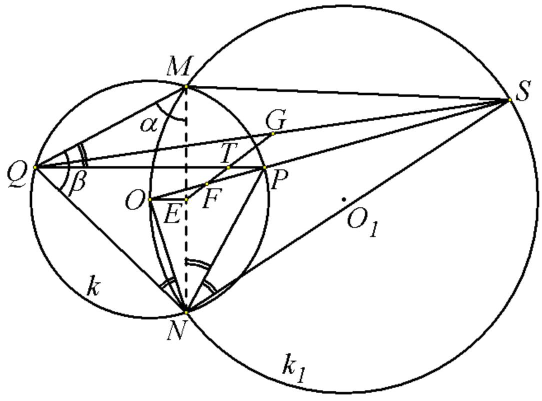


Задача 3. Окръжността k_1 минава през центъра O на окръжност k и я пресича в точките M и N. Върху вътрешната за k дъга $\overset{\frown}{MN}$ е избрана точка P. Нека $S = OP \cap k_1$ $\left(S \neq O\right)$ и Q е такава точка от k, за която $QP \perp MN$. Да се докаже, че средите на отсечките MN, OP и QS лежат на една права.

Хаим Хаимов, Варна

Решение. Означаваме средите на отсечките MN и OP съответно с и F. Нека още $EF \cap QP = G$ и $EF \cap QP = T$. За да решим задачата, достатъчно е да докажем, че G е среда на QS. От теоремата на Менелай за ΔQPS и правата FTG имаме $\frac{QT}{TP}.\frac{FP}{SF}.\frac{SG}{GQ}=1$. Точката G е среда на QS, когато $\frac{SG}{GQ}=1$. Следователно е достатъчно да докажем, че $\frac{QT}{TP}.\frac{FP}{SF}=1$. Сега с R и R_1 означаваме радиусите съответно на k и k_1. Освен това, нека $\sphericalangle QMN=\alpha$ и $\sphericalangle MQN=\beta$. Тъй като $OM=ON$, то $\overset{\frown}{OM}=\overset{\frown}{ON}$ и $\sphericalangle OSM=\sphericalangle OSN$. Затова SO е ъглополовяща на $\sphericalangle MSN$. От друга страна, $\sphericalangle ONM=\sphericalangle OSM$ (ъгли, опиращи се на дъгата $\overset{\frown}{OM}$). Затова $\sphericalangle ONM=\sphericalangle OSN$. Тъй като $\sphericalangle OPN$ е външен за ΔNSP, то $\sphericalangle OPN=\sphericalangle PSN+\sphericalangle PNS$. Но от $OP=ON$ следва, че $\sphericalangle ONP=\sphericalangle OPN$. Това означава, че $\sphericalangle ONP=\sphericalangle OSN+\sphericalangle PNS$. От това равенство и $\sphericalangle ONP=\sphericalangle ONM+\sphericalangle MNP=\sphericalangle OSN+\sphericalangle MNP$ следва, че $\sphericalangle PNS=\sphericalangle MNP$. Следователно NP е ъглополовяща на $\sphericalangle MNS$ и точката P е центърът на вписаната в ΔMNS окръжност. Като вземем предвид, че $\sphericalangle ONQ=90^\circ-\alpha$ и $\sphericalangle PNS=\sphericalangle PNM=\sphericalangle PQM=90^\circ-\alpha$ (тъй като $QP\perp MN$), то $\sphericalangle ONQ=\sphericalangle PNS$ и $\sphericalangle QNP=\sphericalangle ONS$. Оттук намираме:

$$(1)\quad \frac{QP}{OS}=\frac{2R\sin\sphericalangle QNP}{2R_1\sin\sphericalangle ONS}=\frac{R}{R_1}=\frac{MN}{2\sin\sphericalangle MQN}.\frac{2\sin\sphericalangle MSN}{MN}=\frac{\sin(180^\circ-2\beta)}{\sin\beta}=2\cos\beta\cdot$$



Тъй като $OE\perp MN$ и $QP\perp MN$, то $OE\parallel QP$. Но F е среда на OP и затова ΔOEF PTF. Следователно $OE=TP$. От това равенство получаваме $\frac{TP}{OF} \frac{OE}{\frac{1}{2}OP} \quad 2.\frac{OE}{OM} \quad 2\cos\beta$. От последното равенство и (1) следва, че $\frac{QP}{OS}=\frac{TP}{OF}=2\cos\beta$. Следователно $\frac{QP-TP}{OS-OF}=\frac{TP}{OF}=2\cos\beta$, т.е. $\frac{QT}{SF}=2\cos\beta$. Но $\frac{FP}{TP} \frac{\frac{1}{2}OP}{OE} \quad \frac{\frac{1}{2}OM}{OE} \quad \frac{1}{2\cos\beta}$. След почленно умножаване на последните две равенства стигаме до равенството $\frac{QT}{TP}.\frac{FP}{SF}=1$, което трябваше да се докаже.