Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Във всяка от клетките на квадрат 3×3 е записано числото 1. Към всеки три клетки, лежащи в различни редове и различни стълбове, се прибавя едновременно 1. Може ли да се приложи това действие краен брой пъти така, че всички числа в таблицата да станат различни, а сумите по всички редове и всички стълбове да са равни? Може ли сумите на числата по диагоналите да са огледални числа?

Сава Гроздев, София, и Веселин Ненков, Бели Осъм

Задача 2. В окръжност k с център O е вписан разностранен триъгълник ABC с ортоцентър H така, че точките A, B, H и O лежат на една окръжност. Да се докаже, че:

а) OH е ъглополовяща на ъгъла, съседен на $\sphericalangle AHB$;

б) точките O и H са симетрични относно ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$;

в) ако правата OH пресича AC и BC съответно в точките P и Q, то $OQ = OP$.

Христо Лесов, Казанлък

Задача 3. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ мерките на ъглите при върховете A, B, C и D са съответно α, β, γ и δ, а дължините на отсечките CD, DA и AC са съответно c, d и m. Ако са изпълнени равенствата $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{d}{c}$ и $2\delta = 180^\circ + \beta$, да се намери разстоянието между средите на диагоналите AC и BD.

Хаим Хаимов, Варна

Краен срок за изпращане на решения 31 март 2017 г.

Конкурсът продължава и през настоящата година. В края на 2016 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2017 г .

Решенията трябват да бъдат представяни ясно, като всяка задача е задължително да бъде на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg *и* vnenkov@mail.bg

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 6, 2015

Задача 1. Дадена е функцията $f(x)=x^2-mx+n$, където $m,\ n,\ \in\mathbb{N}$. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x)=0$ и е изпълнено $\dfrac{f(-2)}{x_1+x_2}=\dfrac{f(-3)}{x_1x_2}=t\in\mathbb{N}$, да се намерят m и n.

Росен Николаев, Варна

Решение: от формулите на Виет имаме $x_1+x_2=m$ и $x_1x_2=n$. Тогава от условието $\dfrac{f(-2)}{x_1+x_2}=\dfrac{f(-3)}{x_1x_2}=t\in\mathbb{N}$ следва $\dfrac{4+2m+n}{m}=\dfrac{9+3m+n}{n}=t$. Оттук $\left|\begin{array}{l}\dfrac{4+2m+n}{m}=t\\ \dfrac{9+3m+n}{n}=t\end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l}m=\dfrac{4t+5}{t^2-3t-1}\\ n=\dfrac{9t-6}{t^2-3t-1}\end{array}\right.$. Тъй като *m* и *n* са естествени числа, то

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{4t+5}{t^2-3t-1}\geq 1\\ \dfrac{9t-6}{t^2-3t-1}\geq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}t\in\left[\dfrac{7-\sqrt{73}}{2},\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},\dfrac{7+\sqrt{73}}{2}\right]\\ t\in\left[\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},6-\sqrt{31}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{13}}{2},6+\sqrt{31}\right]\end{array}\right..$$

Като се вземе предвид, че *t* също е естествено число, се получава $t\in\{4;5;6;7\}$. С непосредствена проверка се установява, че при $t=4$ имаме $m=7$ и $n=10$.

Задача 2. Окръжност k с център O се допира до правата c в точка M. Точките A и B лежат върху c така, че M е между A и B. През точките A и B са построени допирателните a и b към k, които се пресичат в точка C. Ако $AM=m$, $BM=n$ и лицето на ΔABC е равно на $AM.BM$, да се намери дължината на OC.

Милен Найденов, Варна

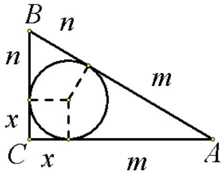
Решение: за елементите на ΔABC ще използваме обичайните означения. От Хероновата формула за ΔABC имаме $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$ и от условието $S = m.n = (p-a)(p-b)$ следва, че $S = p(p-c)$. Затова $(p-a)(p-b) = p(p-c)$, което води до равенството $a^2+b^2=c^2$. Следователно ABC е правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха C. Тъй като OC е диагонал на квадрат със страна x, равна на радиуса на окръжността, то $OC = x\sqrt{2}$. Възможни са два случая.

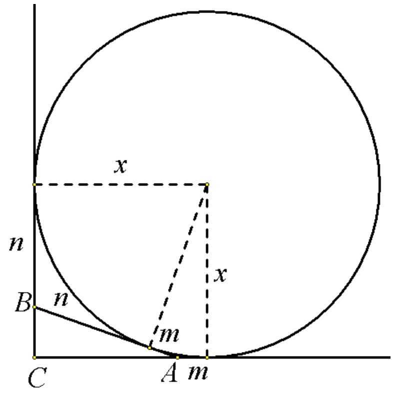
Първи случай: $(x+m)(x+n) = 2S = 2mn$. Оттук

$$x = \frac{-m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{2} \text{ и } OC = \frac{-m-n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{\sqrt{2}}.$$

Втори случай: $(x-m)(x-n) = 2S = 2mn$. Оттук

$$x = \frac{m+n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{2} \text{ и } OC = \frac{m+n+\sqrt{m^2+n^2+6mn}}{\sqrt{2}}.$$





Задача 3. Дадени са ΔABC и точка P от равнината му. Нека $A_1 = AP \cap BC$, $B_1 = PB \cap CA$ и $C_1 = CP \cap AB$. Описаните окръжности на триъгълниците ABB_1 и ACC_1 се пресичат за втори път в точката Q_a. Аналогично се получават точките Q_b и Q_c. Да се докаже, че правите AQ_a, BQ_b и CQ_c се пресичат в една точка.

Хаим Хаимов, Варна

Решение: ще решим задачата с помощта на барицентрични координати спрямо ΔABC, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $P(\lambda,\mu,\nu)$ $(\lambda+\mu+\nu=1)$. Първо да отбележим, че $A_1\left(0,\frac{\mu}{1-\lambda},\frac{\nu}{1-\lambda}\right)$, $B_1\left(\frac{\lambda}{1-\mu},0,\frac{\nu}{1-\mu}\right)$, $C_1\left(\frac{\lambda}{1-\nu},\frac{\mu}{1-\nu},0\right)$. За по-кратко в координатите на точките B_1 и C_1 ще използваме означенията $x_b=\frac{\lambda}{1-\mu}$ и $x_c=\frac{\lambda}{1-\nu}$. Уравненията на симетралите на отсечките AB и AB_1 са съответно $c^2x-c^2y+\left(a^2-b^2\right)z=0$ и $2b^2x+\left(a^2+b^2-c^2\right)y-\left(1+x_b\right)b^2=0$, където a, b и c са страните на ΔABC. От тези уравнения намираме координатите $\left(x_1,y_1,z_1\right)$ на центъра на описаната около ΔABB_1 окръжност във вида:

$$x_1=\frac{a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)+b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)x_b}{16S^2},$$

$$y_1=\frac{b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)+b^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)x_b}{16S^2},\quad z_1=\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)-2b^2c^2x_b}{16S^2},$$

където $16S^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$ (S е лицето на ΔABC). Аналогично определяме координатите $\left(x_2,y_2,z_2\right)$ на центъра на описаната около ΔACC_1 окръжност във вида:

$$x_2=\frac{a^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)+c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)x_c}{16S^2},$$

$$y_2=\frac{b^2\left(a^2-b^2+c^2\right)-2b^2c^2x_c}{16S^2},$$

$$z_2=\frac{c^2\left(a^2+b^2-c^2\right)+c^2\left(-a^2+b^2+c^2\right)x_c}{16S^2}.$$

Уравненията на описаните около триъгълниците ABB_1 и ACC окръжности са съответно

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+\left[-c^2x_1+c^2y_1+\left(b^2-a^2\right)z_1\right]y+\left[-b^2x_1+\left(c^2-a^2\right)y_1+b^2z_1\right]z=0,$$

$$a^2yz+b^2zx+c^2xy+\left[-c^2x_2+c^2y_2+\left(b^2-a^2\right)z_2\right]y+\left[-b^2x_2+\left(c^2-a^2\right)y_2+b^2z_2\right]z=0.$$

От намерените координати на центровете на тези окръжности последните уравнениясепревръщатсъответноравенствата $a^2yz+b^2zx+c^2xy-b^2x_bz=0$

и $a^2yz+b^2zx+c^2xy-c^2x_cy=0$. След почленното изваждане на тези равенства получаваме $c^2x_cy-b^2x_bz=0$. Оттук имаме $z=\dfrac{c^2x_c}{b^2x_b}y$. От това равенството изразяванията на x_b и x_c, равенството $x=1-y-z$ и уравнението на една от окръжностите получаваме, че координатите (x_A,y_A,z_A) на пресечната точка Q_a на окръжностите, която е различна от A, се изразяват със следните равенства:

$x_A=\left[-a^2(1-\mu)(1-\nu)+b^2\lambda(1-\nu)+c^2\lambda(1-\mu)\right]/\tau_A,$

$y_A=b^2(1-\nu)/\tau_A$, $z_A=c^2(1-\mu)/\tau_A$, където

$\tau_A=-a^2(1-\mu)(1-\nu)+b^2(1+\lambda)(1-\nu)+c^2(1+\lambda)(1-\mu)$.

Аналогично, ако (x_B,y_B,z_B) и (x_C,y_C,z_C), се получават равенствата:

$x_B=a^2(1-\nu)/\tau_B$, $y_B=\left[a^2\mu(1-\nu)-b^2(1-\nu)(1-\lambda)+c^2\mu(1-\lambda)\right]/\tau_B$

$z_B=c^2(1-\lambda)/\tau_B$,

$x_C=a^2(1-\mu)/\tau_C$, $y_C=b^2(1-\lambda)/\tau_C$,

$z_C=\left[a^{ù}\nu(1-\mu)+b\ \nu(1-\lambda)+c\ \ (1-\lambda)(1-\mu)\right]/\tau_C$,

където $\tau_B=a^2(1+\mu)(1-\nu)-b^2(1-\nu)(1-\lambda)+c^2(1+\mu)(1-\lambda)$,

$\tau_C=a^2(1+\nu)(1-\mu)+b^2(1+\nu)(1-\lambda)-c^2(1-\lambda)(1-\mu)$.

Сега намираме уравненията на правите AQ_a, BQ_b и CQ_c във вида:

$$AQ_a:\begin{cases}x=1+(x_A-1)t_a,\\ y=y_At_a,\\ z=z_At_a,\end{cases}\qquad BQ_b:\begin{cases}x=x_Bt_b,\\ y=1+(y_B-1)t_b,\\ z=z_Bt_b,\end{cases}\qquad CQ_c:\begin{cases}x=x_Ct_c,\\ y=y_Ct_c,\\ z=1+(z_C-1)t_c.\end{cases}$$

Ако правите AQ_a и BQ_b се пресичат в точката $T(x_T,y_T,z_T)$, за нейните координати се получават равенствата: $x_T=\dfrac{a^2(1-\mu)(1-\nu)}{\tau}$,

$y_T=\dfrac{b^2(1-\nu)(1-\lambda)}{\tau}$, $z_T=\dfrac{c^2(1-\lambda)(1-\mu)}{\tau}$,

където $\tau=a^2(1-\mu)(1-\nu)+b^2(1-\nu)(1-\lambda)+c^2(1-\lambda)(1-\mu)$. Лесно се проверява, че координатите на T удовлетворяват и уравнението на правата CQ. Следователно правите AQ_a, BQ_b и CQ_c минават през една точка. Ако $\tau = 0$, трите прави са успоредни.