

## EXCEL В ПОМОЩ ПРИ РЕШАВАНЕ НА НЯКОИ ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ

Диана Стефанова, Пламен Пенев

**Резюме.** Статията предлага включване на възможности на експерименталната среда на програмата Excel за разнообразяване решаването на някои групи показателни уравнения от ученици в средното училище

*Keywords:* problem solving, indicative equation, number, table, macros

В настоящата статия прилагаме идеята за решаване на тригонометрични уравнения от брой 2/2016 г. при решаване на показателни уравнения. Ще покажем как програмата Excel се използва в обучението по математика по тази тема. В училищния курс по математика се изучават показателни уравнения, систематизирани в групи, което дава възможност на учениците да се ориентират към начина за решаването им. Ще илюстрираме възможностите на Excel при решаването на някои групи показателни уравнения. Разработката е направена така, че да се използва паралелно с традиционния начин на изучаване на показателни уравнения.

Уравнение, в което неизвестното е в степенния показател, се нарича показателно уравнение. Например: уравненията  $6^x - 3^{2x} = 2^{2x}$ ;  $2.5^{x-2} = 7.5^x + 3$ ;  $4^{x-1} = x+5$  са показателни.

При решаването на показателни уравнения се използват: определението за степен; правила за действия със степени и логаритми; теореми и свойства на показателната функция. В сила са всички теореми за равносилност на алгебрични уравнения. Задачите, които ще използваме за илюстрация, имат една и съща формулировка: „Да се реши уравнението“, която ще изпускате, за да избегнем повторението.

За успешното формиране на умения за решаване ще систематизираме показателните уравнения в следните групи.

**I група.** Уравнения от вида  $a^{f(x)} = b$ , където  $f(x)$  е елементарна функция, а  $a \in \mathbb{R}$  и  $b \in \mathbb{R}$ . Решенията на това уравнение зависят от стойностите на  $a$  и  $b$  и затова трябва да се разгледат следните случаи.

A) Ако  $a > 0$ ;  $a \neq 1$  и  $b > 0$ , то уравнението има решение и корените могат да се намерят по два начина. Първият начин е чрез привеждане на двете страни на уравнението към степени с една и съща основа. Вторият начин е чрез логаритмуване на двете страни на даденото уравнение.

**Задачи:**

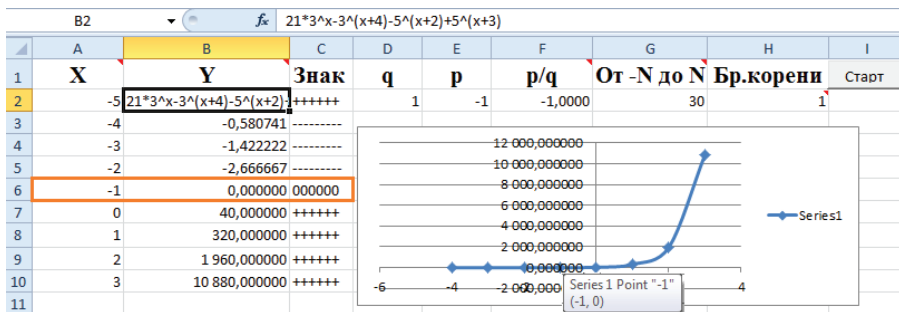
1.  $2^{x^2-5x+6} = 1$ .
2.  $3^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{9}$ .
3.  $8^{x-3} = 9^{3-x}$ .
4.  $(3^{5-x})^{6-x} = 9$ .
5.  $5^{x-\sqrt{3x-5}} = 125$ .
6.  $21.3^x - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}$

Ще илюстрираме решението на задача 6. Прилагаме свойството  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$  и получаваме  $21.3^x - 3^x \cdot 3^4 = 5^x \cdot 5^2 - 5^x \cdot 5^3$ , след което представяме уравнението във вида

$$-60.3^x = -100.5^x, \text{ а оттам и до } \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-1}. \text{ Намираме, че } x = -1.$$

**Решение с Excel:**

Използваме макрос ForFor, описан в (Penev, 2014b).



7.  $9^{2x+1} = 7$ .

8.  $5^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 100$ .

**Решение:** определяме Д.С.  $x \neq -1$  на задача 8, след което записваме уравнението във вида:  $5^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 10^2$ , делим на  $10^2$  двете страни на уравнението и получаваме  $5^{x-2} \cdot 2^{\frac{x-2}{x+1}} = 1$  или  $\left(5.2^{\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2} = 1$ .

Имаме две възможности: показател нула или основа единица, т.е.  $x_1 = 2$  или  $5.2^{\frac{1}{x+1}} = 1$  (1). За да намерим корена от (1), логаритмуваме двете му страни при основа 5, преобразуваме и получаваме  $x_2 = -\log_5 10$ .

Б) Ако  $a > 0$  и  $b \leq 0$ , то уравнението няма решение, например:  $5^{x-3} = -2$ .

В) Ако  $a = 1$  и  $b \neq 1$ , то уравнението няма решение, например:  $1^{x+3} = 2$ .

Г) Ако  $a = 1$  и  $b = 1$ , то всяка допустима стойност на неизвестното е решение на уравнението, например:  $1^{\sqrt{x-5}} = 1$ .

Съществуват показателни уравнения, които след преобразуване се свеждат до случаите в I група, като:

**II група.** Уравнения от вида  $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ , където  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  и  $b \neq 1$ . Решаваме ги, като логаритмуваме двете страни на уравнението при една и съща основа. Тогава уравнението добива вида  $a^{f(x)} = a^{g(x)\log_a b}$ , което е еквивалентно на  $f(x) = g(x)\log_a b$ .

Уравненията от тази група се явяват обобщения на уравненията от I група.

Решете уравненията в задачи от 1 до 8:

$$1. 3^{x-\frac{1}{2}} - 2^{2x} = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3^{x+\frac{1}{2}}. \quad 2. 3 \cdot 2^{x-5} = 5 \cdot 7^{2x}. \quad 3. 5^{x^2+x} \cdot 4^{x^2} = 100^{x^2}. \quad 4. 3^{2x-1} = 5^{3-x}.$$

$$5. 4 \cdot 7^{x-2} = 28^{x+1}. \quad 6. 5^x \cdot \sqrt[3]{8^{x-1}} = 500. \quad 7. 2^x \cdot 3^x = \frac{3}{2^{-1}} \sqrt[3]{6^{4x-10}}. \quad 8. 5^{x-3} = 8^{x^2-7x+12}.$$

Ще илюстрираме решението на задача 8:

*Решение:* в уравнението  $5^{x-3} = 8^{(x-3)(x-4)}$  делим двете му страни на  $5^{x-3}$  и получаваме  $1 = \left(\frac{8^{x-4}}{5}\right)^{x-3}$ , откъдето  $x-3=0$  или  $1 = \frac{8^{x-4}}{5}$ , т.е.  $x_1 = 3$  или  $x_2 = 4 + \log_8 5$ .

**III група.** Показателни уравнения, които се решават чрез разлагане на множители.

По този начин могат да се решат например следните уравнения:

$$1. 4^{x+1} + 4^x = 320. \quad 2. 2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450. \quad 3. 6^x + 15 = 5 \cdot 2^x + 3^{x+1}.$$

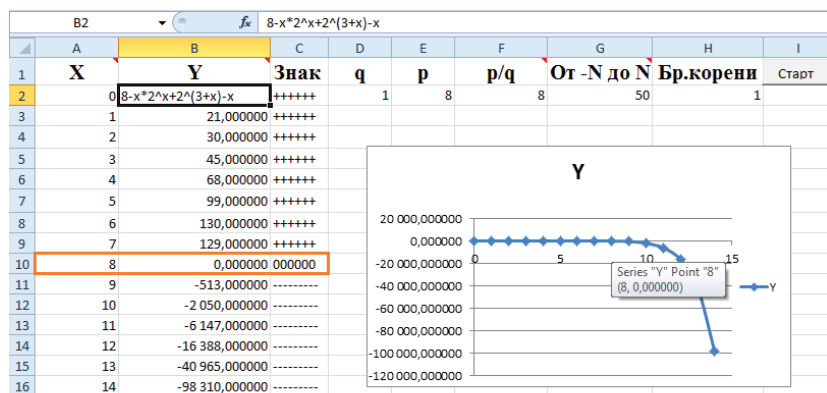
$$4. 4^{2x-9} - 2^{4x-24} + 4^{2x-12} - 16^{x-6} = 1008.$$

Ще илюстрираме решението на тази група с решаването на следната задача:

$$5. 8 - x \cdot 2^x + 2^{3+x} - x = 0.$$

*Решение:* като използваме свойство  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ , представяме уравнението във вида  $8 - x \cdot 2^x + 2^3 \cdot 2^x - x = 0$  и след групиране получаваме уравнението  $(2^x + 1) \cdot (8 - x) = 0$ . Тъй като  $2^x + 1 = 0$  няма решение, то единствен корен на уравнението е  $x = 8$ .

Решение с Excel:



**IV група.** Показателни уравнения, които се опростяват чрез субституция. Те имат вида  $F(a^{f(x)}) = 0$ , където  $F$  и  $f$  са елементарни функции. Чрез субституцията  $t = a^{f(x)}$ ,  $t > 0$  даденото уравнение се свежда до алгебричното уравнение  $F(t) = 0$ ,  $t > 0$ . Сред тези уравнения са уравненията от вида:

А)  $m \cdot a^{2f(x)} + n \cdot a^{f(x)} + p = 0$ , които чрез субституцията  $a^{f(x)} = t$ ,  $t > 0$  се свеждат до квадратно уравнение (тричленно показателно уравнение).

1.  $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$ . 2.  $2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^x - \frac{1}{2} \cdot 4^{2x} = 1$ . 3.  $5^x - 5^{3-x} = 20$ .

Б)  $A_0 \cdot a^{f(x)} + A_1 \cdot b^{f(x)} + A_2 = 0$

1.  $4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$

В) Показателни уравнения от вида  $A^x \pm B^x = C$ , където  $A \cdot B = 1$ .

1.  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x + (\sqrt{6} - \sqrt{35})^x = 12$

**Решение:** понеже  $\sqrt{6} + \sqrt{35} \cdot \sqrt{6} - \sqrt{35} = 1$ , умножаваме двете страни на уравнението с  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x$ , след което получаваме  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^{2x} - 12(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x + 1 = 0$ . Полагаме  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = y$ . Определяме Д.С.  $y > 0$  и решаваме квадратното уравнение. Получаваме  $y_{1,2} = 6 \pm \sqrt{35}$ . Следователно  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = 6 + \sqrt{35}$  с корен  $x_1 = 2$  и  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = 6 - \sqrt{35}$ , което преобразуваме до  $(\sqrt{6} + \sqrt{35})^x = \frac{1}{6 + \sqrt{35}}$ . Получаваме  $x_2 = -2$ .

2.  $(2 + \sqrt{3})^x + 3(2 - \sqrt{3})^x = 4$     3.  $(\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x + (\sqrt{5 - 2\sqrt{6}})^x = 10$ .

Г)  $A_0(a^{2x} + a^{-2x}) + A_1(a^x + a^{-x}) + A_2 = 0$ .

Решаването на задачи от Г) ще илюстрираме със следния пример 1:

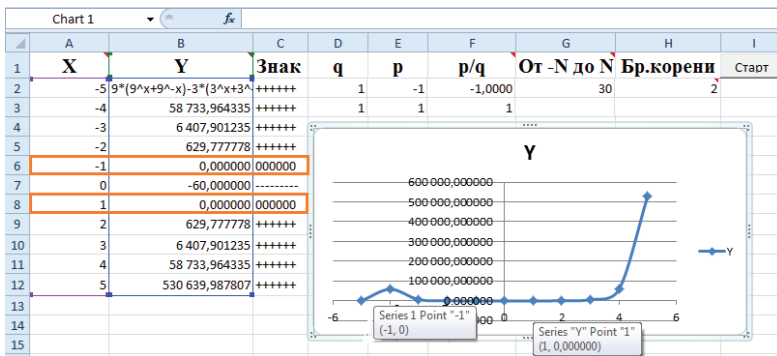
1.  $9(9^x + 9^{-x}) - 3(3^x + 3^{-x}) - 72 = 0$

Решение: за целта полагаме  $3^x + 3^{-x} = y$ ,  $y \geq 2$ . Тогава  $9^x + 9^{-x} = 3^{2x} + 3^{-2x} = y^2 - 2$  и  $9(y^2 - 2) - 3y - 72 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - y - 30 = 0$ .

Корените на това уравнение са  $y_1 = \frac{10}{3}$  и  $y_2 = -3$ . Тъй като  $y_2 < 0$ , а по условие  $y \geq 2$ , решението на уравнението се определя от  $y_1 = \frac{10}{3}$ . Тогава

$3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3}$ . Полагаме  $3^x = t$ ,  $t > 0$  и получаваме уравнението  $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$ , чиито корени са  $t_1 = 3$  и  $t_2 = \frac{1}{3}$ . Решението на даденото уравнение се свежда до решаване на двете уравнения  $3^x = 3$  и  $3^x = \frac{1}{3}$ , откъдето намираме, че  $x_1 = 1$  и  $x_2 = -1$ .

Решение с Excel:



Ще предложим и решение на задача 2:

2.  $(1 + \sqrt{3})^x + 2^{x-1}(2 + \sqrt{3})^x = 4$

Решение: отново използваме свойството  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$  и получаваме  $(1 + \sqrt{3})^x + \frac{2^x(2 + \sqrt{3})^x}{2} = 4$ , след което преобразуваме до вида  $(1 + \sqrt{3})^x + \frac{(2 \cdot 2 + 2 \cdot \sqrt{3})^x}{2} = 4$ . От  $(1 + \sqrt{3})^{2x} = (4 + 2\sqrt{3})^x$  следва, че мо-

жем да запишем уравнението във вида  $(1 + \sqrt{3})^x + \frac{(1 + \sqrt{3})^{2x}}{2} = 4$ . Полагаме

$(1 + \sqrt{3})^x = y, y > 0$  и получаваме уравнението  $y^2 + 2y - 8 = 0$ , което има корени  $y_1 = 2$  и  $y_2 = -4 < 0$ . Окончателно намираме, че  $x = \log_{(1+\sqrt{3})} 2$ .

**V група.** Показателни уравнения, които са хомогенни:

А) хомогенни от първа степен относно  $a^x$  и  $b^x$ :  $m \cdot a^x + n \cdot b^x = 0$ , където  $m$  и  $n$  са реални числа. Нека  $0 < b < a$ . Разделяме двете страни на даденото уравнение на  $b^x > 0$  и получаваме показателно уравнение  $m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^x + n = 0$ , което е от първа група.

Задачи:

1.  $9 \cdot 7^x - 49 \cdot 3^x = 0$ .    2.  $5^{x-3} = 7^x$ .    3.  $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2}$ .

Б) Уравнение от вида:  $m \cdot a^{2x} + n \cdot a^x \cdot b^x + p \cdot b^{2x} = 0$ , където  $a, b$  и  $m, n, p$  са реални константи, като  $a > 0, a \neq 1, b > 0$  и  $b \neq 1$ . Такива уравнения се наричат хомогенни показателни уравнения от втора степен относно  $a^x$  и  $b^x$ . Те се свеждат до квадратни след деление на  $b^{2x} > 0$  и полагане  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y, y > 0$ .

4.  $4^x + 6^x = 9^x$ .    5.  $16^x + 36^x = 2.81^x$ .    6.  $2.7^x - 5^x = \sqrt{35^x}$ .    7.  $9^x = 6^x + 2^{2x+1}$ .

*Решение:* ще решим уравнението от задача 7. Записваме го по следния на-

чин:  $3^{2x} = 3^x \cdot 2^x + 2^{2x} \cdot 2$  и преобразуваме до  $3^{2x} - 3^x \cdot 2^x - 2^{2x} \cdot 2 = 0$ . Делим двете страни на  $2^{2x}$  и записваме уравнението във вида  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0$ ;

откъдето получаваме  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$  или  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$ . Тъй като  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1$  няма решение, то решението се определя от  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2$ , т.е.  $x = 4 + \log_{1.5} 2$ .

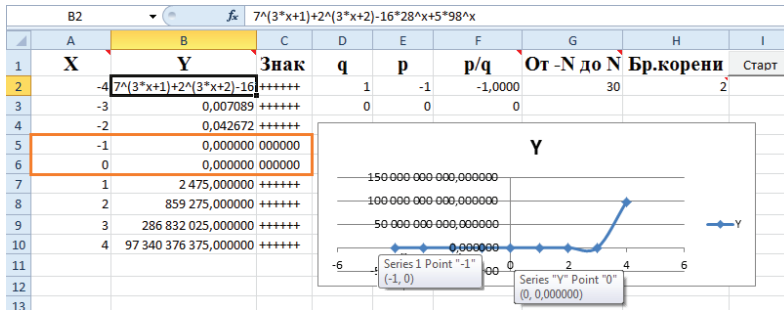
В) Хомогенни уравнения от трета степен относно  $a^x$  и  $b^x$ .

8.  $7^{3x+1} + 2^{3x+2} = 16.28^x - 5.98^x$

*Решение:* използваме свойство  $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$  и записваме уравнението по следния начин:  $7 \cdot 7^{3x} + 4 \cdot 2^x - 16 \cdot 2^{2x} \cdot 7^x + 5 \cdot 2^x \cdot 7^{2x} = 0$ . Делим двете му страни на  $2^{3x}$  и уравнението добива вида  $7 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{3x} + 5 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2x} - 16 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^x + 4 = 0$ . Полага-

ме  $\left(\frac{7}{2}\right)^x = y$ , като  $y > 0$  и получаваме уравнението  $7.y^3 + 5.y^2 - 16.y + 4 = 0$ , чиито корени са  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = \frac{2}{7}$  и  $y_3 = -2$ . Решенията на уравнението намираме чрез субституцията  $\left(\frac{7}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0$  и  $\left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{2}{7} \Leftrightarrow x_2 = -1$ .

Решение с Excel:



**VI група.** Показателни уравнения с неизвестно и в основата. Те са от вида:

A) Уравнение от вида  $f(x)^{\varphi(x)} = 1$ .

За да се реши уравнение от този вид, трябва да се разгледат три случая:

1.  $\begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$
2.  $\begin{cases} \varphi(x) \text{ е дефинирана} \\ f(x) = 1 \end{cases}$
3.  $\begin{cases} \varphi(x) \text{ е четно число} \\ f(x) = -1 \end{cases}$

Задачи:

1.  $(x-3)^{x+5} = 1$ .
2.  $(x^2-5x)^{3x-6}(x+3)^{6-3x} = 1$ .
3.  $(4x^2+2x+1)^{\frac{x^2-2x-15}{x+0,5}} = 1$ .
4.  $|x|^{x^2-x-2} = 1$ .

Ще илюстрираме решаването на задачи от тази група със следващата задача

5.  $(x^2-3x)^{2x-4} \cdot (x+1)^{4-2x} = 1$

**Решение:** тъй като  $x = -1$  не е решение, даденото уравнение е еквивалентно на уравнението  $\left(\frac{x^2-3x}{x+1}\right)^{2x-4} = 1$ . За целта ще разгледаме:

$$1) \left| \begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \neq 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ x \neq 0 \text{ и } x \neq 3. \\ x \neq -1 \end{array} \right. \text{ Следователно } x = 2 \text{ е решение.}$$

$$2) \left| \begin{array}{l} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \neq 0 \\ 2x - 4 \text{ е дефинирана за всяко } x \end{array} \right| \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}.$$

3)  $\frac{x^2 - 3x}{x + 1} = -1 \Leftrightarrow x = 1$ . Освен това за  $x = 1$  показателят  $2x - 4 = -2$  е четно число. Следователно решенията на уравнението са:  $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{5}$ ;  $x_3 = 2$ ;  $x_4 = 1$ .

Б) Уравнението  $f(x)^{\varphi(x)} = f(x)^{g(x)}$  се решава чрез специфични изследвания и методи. Неговите решения се намират, като се обединят решенията на следните уравнения:

1.  $f(x) = 0$ , при условие че  $\varphi(x) > 0$  и  $g(x) > 0$ .
2.  $f(x) = 1$ , при условие че  $\varphi(x)$  и  $g(x)$  са дефинирани.
3.  $f(x) = -1$ , при условие че  $\varphi(x)$  и  $g(x)$  са едновременно четни или едновременно нечетни числа или са несъкратими обикновени дроби с нечетен знаменател, на който числителите са с една и съща четност.
4.  $\varphi(x) = g(x)$ , при  $f(x) > 0$ , а когато  $f(x) < 0$ , трябва  $\varphi(x)$  и  $g(x)$  да са цели числа с или дробни числа с нечетен знаменател.

Примери: 1.  $x^2 = x^{3x+1}$ . 2.  $x^{2x^2} = x^{x+1}$ . 3.  $x = x^{x-1}$ . 4.  $x^{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{x^x}$ .

$$5. \sqrt[4]{(x-3)^{x+1}} = \sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}$$

**VII група.** Уравнения от вида  $a^{f(x)} = \varphi(x)$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Ще търсим решенията на такива уравнения измежду стойностите на  $x$ , за които  $\varphi(x)$  и  $f(x)$  са дефинирани и  $\varphi(x) > 0$ . Уравненията от тази група се свеждат до разглеждане на показателната функция  $a^{f(x)}$ , а  $\varphi(x)$  е алгебрична или трансцендентна функция.

Задачи:

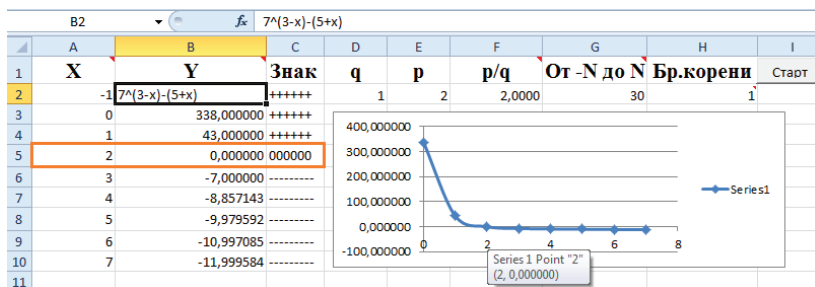
1.  $2^{x-1} = x + 1$ . 2.  $2^x = x^2 - 2x$ . 3.  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + \frac{1}{x}$ . 4.  $2^x = \operatorname{tg} x$ .
5.  $2^x = \sqrt{3 - x}$ .
6. Да се докаже, че уравнението  $7^{3-x} = 5 + x$  има единствено решение.



*Решение:*

I начин: да означим  $f(x) = 7^{3-x}$  и  $g(x) = 5+x$ . Разгледани като функции, изразите са определени за всяко  $x$ , но тъй като  $7^{3-x} > 0$ , то и  $5+x > 0$ , т.е.  $x > -5$  е множеството от допустими стойности на уравнението. Тъй като  $f(2) = 7$  и  $g(2) = 7$ , то числото 2 е решение на уравнението. Нека допуснем, че то има и други решения  $x_1 < 2$  и  $x_2 > 2$ . Функцията  $f(x) = 7^{3-x}$  е намаляваща, т.е.  $f(x_1) > f(2) = 7$  и  $f(x_2) < f(2) = 7$ . Функцията  $g(x) = 5+x$  е растяща, т.е.  $g(x_1) < g(2) = 7$  и  $g(x_2) > g(2) = 7$ . Оттук получаваме, че  $f(x_1) > 7 > g(x_1)$ , следователно  $f(x_1) \neq g(x_1)$ , т.е.  $x_1$  не е корен на даденото уравнение. Аналогично за  $x_2$  получаваме  $f(x_2) < 7 < g(x_2)$ , т.е.  $x_2$  не е корен на даденото уравнение. Следователно даденото уравнение няма друг корен освен числото 2.

Решение с Excel:



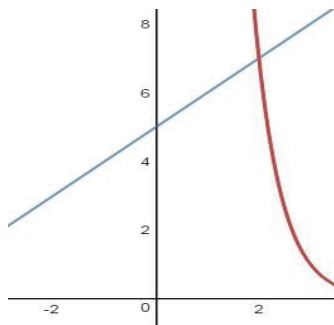
II начин: за да решим задачата без досещането, че  $x = 2$  е корен, можем да разсъждаваме така. Разглеждаме непрекъснатата и намаляваща функция  $F(x) = 7^{3-x} - x - 5$ . Тя приема както отрицателни, така и положителни стойности. Например  $F(1) = 43$  и  $F(3) = -7$ . Според теоремата на Болцано (свойство на непрекъснатата функция в интервал да приема всички „междинни“ стойности) съществува стойност на аргумента  $x_0 \in (1; 3)$ , за която  $F(x_0) = 0$ . Лесно се установява, че  $x = 2$  е корен на уравнението.

III начин: ще решим задачата, като използваме построяване на графиките на функциите на един и същи чертеж. Но по този начин единствеността на корена не е обоснована. Отново да означим  $f(x) = 7^{3-x}$  и  $g(x) = 5+x$ . Тъй като  $7^{3-x} > 0$ , то и  $5+x > 0$ , т.е.  $x > -5$  е множеството от допустими стойности на уравнението. Функцията  $f(x)$  е намаляваща, а  $g(x)$  – растяща. Тогава техните графики ще се пресекат в една точка, което означава, че уравнението

има точно един корен. От чертеж 1 следва, че  $x = 2$  е евентуален корен на уравнението. Правим проверка за  $x = 2$  и установяваме, че  $7^{3-2} = 2 + 5$ , откъдето получаваме, че  $x = 2$  е наистина решение на уравнението.

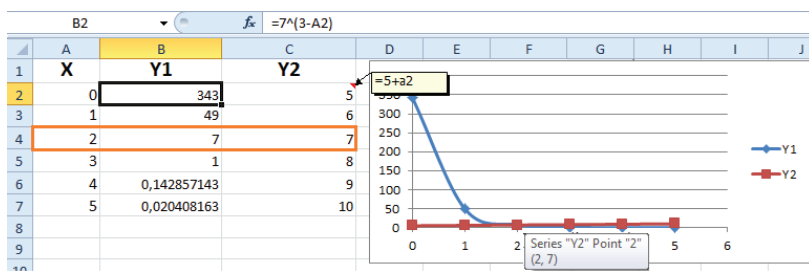
|                  |     |    |   |   |               |
|------------------|-----|----|---|---|---------------|
| $x$              | 0   | 1  | 2 | 3 | 4             |
| $f(x) = 7^{3-x}$ | 343 | 49 | 7 | 1 | $\frac{1}{7}$ |

|                |   |   |
|----------------|---|---|
| $x$            | 0 | 2 |
| $g(x) = 5 + x$ | 5 | 7 |



Чертеж 1

За проверка на графичното решение с Excel използваме обикновена таблица:



Вижда се, че  $x = 2$  е координата на пресечната точка на двете линии.

### VIII група. Параметрични показателни уравнения.

**Задача 1.** Намерете стойностите на параметъра  $a$ , за които уравнението  $9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} - 1 + 2a = 0$  има точно едно решение.

**Решение:** преобразуваме даденото уравнение по следния начин:  $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 18a - 9 = 0$ . Полагаме  $3^x = y$ , където Д.С.:  $y > 0$  и уравнението добива вида  $y^2 - 12y + 18a - 9 = 0$ , т.е. получаваме квадратно параметрично уравнение, което можем да решим по няколко начина: чрез формулите за кор-

ните на квадратно уравнение, чрез формулите на Виет, чрез разпределение на корените на квадратно уравнение върху числовата ос и други. Ще илюстрираме решаването на това уравнение чрез формулите за корените на квадратно уравнение. За целта намираме  $D = b^2 - 4ac$  и разглеждаме следните случаи:

1) Ако  $D < 0$ , то уравнението няма решение.

2) Ако  $D = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$ . Тогава коренът на уравнението е  $y = 6 \in \mathbb{D.C.}$ , т.е. при  $a = \frac{5}{2}$  даденото уравнение има един корен.

3) Ако  $D > 0$ , корените са два:  $y_{1/2} = 6 \pm \sqrt{45 - 18a}$ . За да принадлежат на  $\mathbb{D.C.}$ , те трябва да са положителни, т.е. решаваме две ирационални неравенства:  $6 - \sqrt{45 - 18a} > 0$  и  $6 + \sqrt{45 - 18a} > 0$ . Нека решим неравенството  $6 - \sqrt{45 - 18a} > 0$  Преобразуваме го до  $\sqrt{45 - 18a} < 6$  и записваме система-

$$\text{та } \begin{cases} 45 - 18a \geq 0 \\ 45 - 18a < 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \frac{5}{2} \\ a > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right]. \text{ Да решим и второто неравенство}$$

$$6 + \sqrt{45 - 18a} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{45 - 18a} > -6 \Leftrightarrow \text{всяко число } a \in \left(-\infty; \frac{5}{2}\right].$$

От 2) и 3) следва, че: при  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  уравнението има един корен; при  $a \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  уравнението има два корена; при  $a = \frac{5}{2}$  уравнението има един корен; при  $a \in \left(\frac{5}{2}; +\infty\right)$  уравнението няма корени. Следователно при  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{5}{2}\right\}$  даденото уравнение има един корен.

**Задача 2.** Решете уравнението:  $\sqrt{a(2^x - 2)} + 1 = 1 - 2^x$

(Национален пролетен турнир – Казанлък, 1974 г., X клас)

*Решение:* полагаме  $2^x = y$  и получаваме ирационалното уравнение  $\sqrt{ay + 1 - 2a} = 1 - y$ . За да има решение полученото уравнение, необходимо е  $1 - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1$ . Повдигаме в квадрат и получаваме:  $ay + 1 - 2a = 1 - 2y + y^2$  или  $y^2 - (a + 2)y + 2a = 0$  с  $D = (a - 2)^2$  и корени  $y_1 = 2, y_2 = a$ . Но  $y \leq 1$  и

$y_1 = 2$  не е решение, а  $2^x = a$ , като  $0 < a \leq 1$  и решението е  $x = \log_2 a$ . Отговор: при  $0 < a \leq 1$  решението е  $x = \log_2 a$ . При  $a \leq 0$  или  $a > 1$  уравнението няма решение.

**Задача 3.** Намерете стойностите на реалния параметър  $a$ , за които уравнението  $(a^2 + a - 6) \cdot 2^x + 2^{-x} = 2a$  има един положителен и един отрицателен корен.

(Конкурсен изпит СУ, 1996 г.)

*Решение:* в уравнението  $(a^2 + a - 6) \cdot 2^x + 2^{-x} = 2a$  полагаме  $2^x = y$  и заместяваме:  $(a^2 + a - 6) \cdot \frac{1}{y} + y - 2a = 0$ , т.е.  $y^2 - 2ay + a^2 + a - 6 = 0$ . Ако единият

корен е положителен, т.е.  $x_1 > 0$ , следва, че  $y_1 \in (0; 1)$ . Ако другият корен е отрицателен, т.е.  $x_2 < 0$ , следва, че  $y_2 > 1$ . Според разпределението на корените на квадратното уравнение числото 0 трябва да е по-малко от корените на уравнението, а числото 1 трябва да е между корените. Числото 1 е между корените  $y_1$  и  $y_2$  на квадратното уравнение, ако  $a^2 - a - 5 < 0$ , т.е.

$a \in \left( \frac{1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$ . Числото 0 е по-малко от корените  $y_1$  и  $y_2$  на уравне-

нието, ако  $a^2 + a - 6 > 0$ , т.е.  $a \in (-\infty; 3) \cup (2; +\infty)$ . Сега намираме окончателно

$a \in \left( 2; \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \right)$ .

От разработката се вижда, че сме приложили програмата Excel само за уравнения, чиито корени са реални числа. Въпреки това използването на програмата Excel при решаване на показателни уравнения дава възможност за:

- демонстрация на техники за автоматизиране на процеса на решаване на показателни уравнения;
- активизиране дейността на учениците;
- събуждане на интереса на учениците към математиката;
- ориентиране в спецификата на показателните уравнения;
- даване на насоки за търсене на алгебрично решение и проверка на получени резултати;
- разнообразяване на работата в клас.

## REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968) *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie.
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka.
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1994). *Algebra for 10-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta.
- Onova, M. & V. Milushev (1994). *Exponential equations and inequalities* (in Bulgarian). Plovdiv: Bojking.
- Paskalev, G. & Z. Paskaleva (2001). *Mathematics for 11-th grade* (in Bulgaria). Sofia: Archimedes.
- Penev, P. (2014a). Heuristics by Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 57, 1, 18 – 33.
- Penev, P. (2014b). More Heuristics by Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 57, 5, 5472 – 479.
- Penev, P. & D. Stefanova (2015). Individual problem solving by Excel (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 58, 2, 149 – 156.
- Rangelova, P. (2006). *Collection of mathematical problems for 9. – 12. Grades with Methodological Instructions* (in Bulgarian). Plovdiv: Makros.
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One More Idea for Solving Trigonometric Equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

## EXCEL HELPS IN SOLVING SOME EXPONENTIAL EQUATIONS

**Abstract.** The paper proposes to include possibilities of the experimental environment of the program Excel in varying the problem solving of some groups exponential equations by secondary students.

✉ **Dr. Diana Stefanova**  
Teacher in Mathematics  
Asenovgrad, Bulgaria  
E-mail: dianastefan@abv.bg

✉ **Mr. Plamen Penev**  
Teacher in Informatics  
Shumen, Bulgaria  
E-mail: plampenev@abv.bg