

*Research Insights  
Изследователски проникновения*

## ДИДАКТИЧЕН МОДЕЛ „КОНСТРУКТИВНА МАТЕМАТИКА ЗА ДЕЦА“

**Даринка Гълъбова  
Надя Делчева**

*Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“*

**Резюме.** Разглеждат се същността и ролята на моделирането и конструирането като методи за изследователска дейност в обучението по математика на децата от детската градина. Изследователско-конструкторският подход в математическото обучение на децата се основава на самостоятелна дейност за „построяване – конструиране“ на модели на математически понятия и отношения. В процеса на конструиране на моделите децата разкриват, осъзнават и затвърдяват основни свойства и отношения на математически понятия.

*Keywords:* shaping, constructing, model, mathematics, preschool education

### **Въведение**

Моделирането е водещ познавателен метод във всички науки и се прилага на всички етапи от научното познание. Моделирането има евристичен потенциал за превръщане на абстрактното в зримо и достъпно, на сложното – в просто, на абстрактните обекти – в достъпни за изследване и опознаване от изследователите. Съществен аспект на този съвременен подход в обучението по математика е развиването на детските способности за нагледно и динамично моделиране като предпоставка за овладяване на моделиращи действия, които по-късно се превръщат в учебни действия и улесняват прехода към математическото моделиране. Това твърдение сближава идеите за развитие на познавателните способности на децата с идеите за развитие на учебната дейност на малките ученици.

Мотивите за проучване на проблема за ролята на моделирането и конструирането в обучението по математика на предучилищния етап са следните.

1. В международен план (Европа, Русия, САЩ и др.) още през 90-те години на XX век се извеждат идеите на развиващо и конструктивистко обучение, насочено към интелектуалното и творческото детско развитие. Внедряват се алтернативни педагогически за стимулиране на изследователското, самостоятел-

ното и творческото мислене на децата (ТРИЗ педагогика, Монтесори педагогика, методика на Никитин, методика на Денеш и др.).

2. Педагогически идеи за синергетично обучение чрез интегративни връзки между направленията „Математика“ и „Конструиране и технологии“ са реализирани в модел на съвременен дизайн на математико-техническо взаимодействие (Galabova & Gaydova, 2006).

3. Бавно се внедряват съвременни методики за математическо развитие на децата в българската образователна практика. Има недостиг на развиващи дидактични материали в детските градини. В предучилищното образование методът моделиране се прилага като средство за математическо обучение (децата работят с готови модели), но не и за развиване уменията на децата да моделират математически отношения.

4. Математическите понятия са абстрактни и могат да се изучават от децата само с помощта на модели. За да се овладее моделирането като метод на научното познание, е необходимо да се създават и изследват модели на понятията на всеки обучаващ етап.

*Актуалността на изследователския проблем* е свързана с развиване и разгръщане на конструктивно-моделиращата дейност на децата като предпоставка за овладяване основите на математическата грамотност. *Изследователската педагого-методическа задача* се изразява в създаване на дидактична система „Конструктивна математика за деца“, която да съответства на образователното математическо съдържание в предучилищния етап и да осигурява материализирана форма за изразяване и развиване на съответни умствени действия.

### **Методите моделиране и конструиране в обучението по математика**

Модернизацията на математическото обучение в края на XX век и началото на XXI век наложи да се търсят нови подходи, методи и дидактични средства за усвояване от децата на логико-математическите представи и отношения, операции и закономерности. В качеството си на съвременни изследователски подходи в обучението по математика се прилагат моделирането и конструирането.

За съвременната наука **моделирането** се превръща в универсален инструмент и средство за научни изследвания – придобива статут на общогносеологическа категория и език, осигуряващ взаимното разбиране между представителите на различни дисциплини. Моделирането е метод за изследване на обектите на познанието чрез техни модели. В основата на моделирането е заместването на оригинала с подобие на обекта или явлениято, включващо качествени, количествени, структурно-логически видове аналогия. Моделът е в качеството си на обект на действието (Bogdanova, 1988: 9). За моделите съществуват десетки определения, като това на

В. А. Штоф (1966 г.): „Моделът е такава мислено представена или материално реализирана система, която, отразявайки и възпроизвеждайки обекта, е способна така го замести, че изучаването ѝ ни дава нова информация за този обект“, или следното определение за модел, дадено от К. Б. Батороев (1981): „Това е създадена или избрана от човека система, възпроизвеждаща съществени за дадени цели на познанието страни (елементи, свойства, отношения, параметри)“. В психолого-дидактически аспект редица автори, като Н.Ф. Тализина, Л.В. Занков, П.Я. Галперин и др., отъждествяват модела със система от обекти или знаци, възпроизвеждащи съществените свойства на системата оригинал на основата на организирана индукция или дедукция с цел получаване на нова информация. Това означава, че моделите не съществуват сами по себе си, откъснати от мисловната дейност на хората. За понятието модел се систематизират следните четири отличителни признака:

1. Моделът е мислено представима или материално реализирана система.
2. Моделът отразява съществените свойства на обекта на изследването А (наречен оригинал).
3. Моделът има способност да замества оригинала.
4. Изучаването на модела носи нова информация за обекта на изследването.

Тези теоретични постановки утвърждават, че моделирането винаги е свързано със *заместване* на обекта оригинал с негов модел. В зависимост от вида на създадения модел са разглеждат две големи групи модели: *веществени*, или *физически* модели (реални предмети, макети, конструкции) и *символични – графични модели* (знаци, таблици, схеми, чертежи, формули, графики и др.). Съществуват и други класификации на моделите (модели според научната област, и др.). В обучението по математика същността на математическата дейност най-добре, ясно и точно се отразява в *математическото моделиране*, което променя традиционния образ на математиката, защото успява да я представи откъм нейната „действена“ страна (Varbanova, 2013: 22). Като се позовава на теорията на П. Галперин за поэтапното формиране на умствените действия, М. Върбанова отчита, че „етапите на усвояване на знания се разглеждат съвместно с етапите на усвояване на дейностите. От самото начало знанията се включват в структурата на дейностите. Качеството на тяхното усвояване зависи от адекватността на дейностите, които се използват за тяхното усвояване“ (Varbanova, 2013: 24). За да достигне обаче до равнището на математическото моделиране, детето (ученикът) трябва да измине дълъг път на развитие на умствените си действия и да усвои умения за моделиране с различни равнища на сложност. Трудностите при усвояване на математическите понятия и релации, които са абстрактни по своята същност (идеални, логико-математически модели), налагат проучване на специфични дидактични средства и техно-

логии, съобразени с равнището на познавателната математическа дейност на 3 – 7-годишните деца. Необходима е нова образователна парадигма, в която водещи методи за овладяване на математическите знания от децата да бъдат моделирането и конструирането.

### **Методика на педагогическо изследване „Конструктивна математика за деца“**

Педагогическото изследване „Конструктивна математика за деца“ е проведено в периода октомври 2015 – февруари 2016 година. *Обект на изследването* са продуктивнотворчески технологии за формиране на математически представи и отношения на 4 – 7-годишните деца в детската градина. *Предмет на изследването* са ролята и функциите на изследователско-конструкторския подход за формиране на математически представи и отношения при 4 – 7-годишните деца. Целта е теоретично проучване на проблема и разработване на модел на дидактична система, основана на изследователско-конструкторския подход в процеса на формиране на математически представи у 4 – 7-годишните деца. *Работните хипотези са следните:*

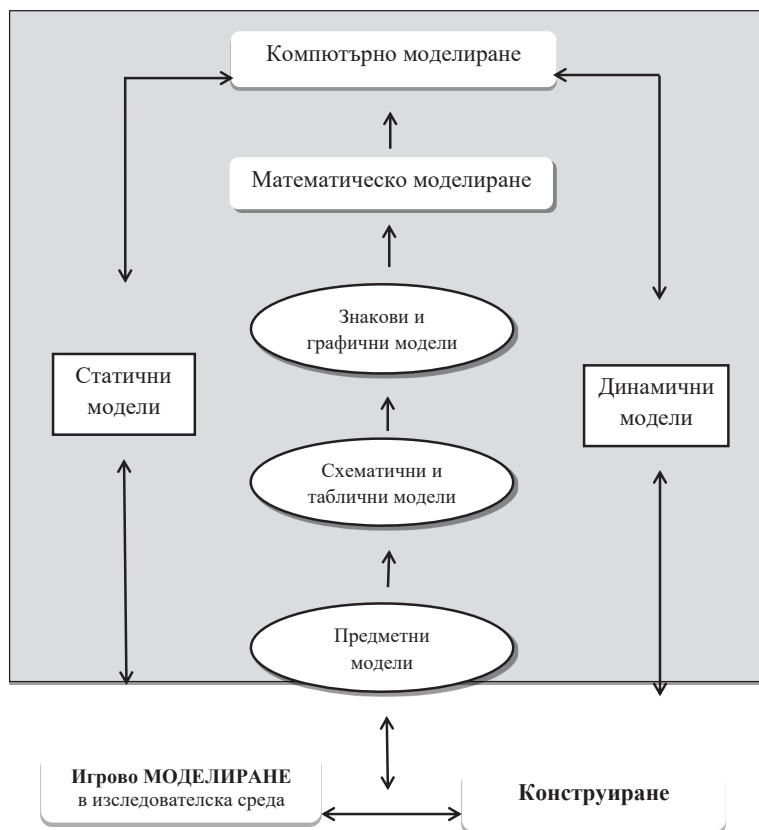
1. Изследователско-конструкторският подход в математическото обучение стимулира и развива самостоятелната познавателна дейност на децата в процеса на „моделиране и конструиране“ на математически понятия и отношения.

2. Методите моделиране и конструиране осигуряват предметно-развиваща и изследователско-творческа среда за преоткриване, обобщаване и прилагане на основни математически знания (свойства, структури, количествени и пространствени отношения).

Теоретичното проучване на изследователския проблем разкри съвременните подходи на динамичната и конструктивната математика и позволи систематизирането на редица идеи и дидактични модели. Теоретична база на изследването „Конструктивна математика за деца“ е теорията на моделирането, въплътена в изследванията на редица философи, педагози и психолози, като Д.Б. Елконин, Л.М. Фридман, Л.А. Венгер, В.В. Давидов, В.В. Краевски, В. Щоф и др., и методици, изследващи ролята на моделирането и обучаващата среда за математическото обучение на деца – А. Столяр, Л. Фридман, М. Георгиева, М. Върбанова, Д. Гълъбова, М. Богданова, З. Узунова и др. Определени са подходите, разкриващи и надграждащи идеите на конструктивизма в обучението по математика: синергетичен и конструктивистки подход, изследователски подход и конструкторски подход. Изследването ни е повлияно от иновативния модел *NDM* (нова динамична модификация) в границите на Аз-концепцията на математическото моделиране, разработен от М. Георгиева и С. Гроздев, които описват система от 10 учебни среди, базирани на единна технологична среда

(Georgieva & Grozdev, 2015: 6). Авторите посочват необходимостта от съчетаване на глобални дискурси: съобразяване с приемствеността и улесняване развитието на интелекта в настоящото и бъдещото технологично общество при все по-усложняващата се интеграция в различни научни области. Извеждането на познавателната страна над съдържателната на обучението е пътят за приобщаване на поколенията към непрекъснатите изменения на образователната система в контекста на високотехнологичното пространство на бъдещето (Georgieva & Grozdev, 2015: 10).

В резултат на нашето теоретично изследване е разработен модел, разкриващ връзките между видовете моделиране в обучението по математика (фигура 1) и ролята на конструирането за стимулиране на познавателната моделираща и продуктивната познавателна дейност по математика на децата в детската градина.



Фигура 1. Математическо обучение в съвременна технологична среда

**Изследователско-конструкторският подход** предполага „учене чрез правене“ и „учене чрез откритие“, т.е. практическо разработване от децата (чрез моделиране и конструиране) на модели на изучаваните математически понятия и отношения, формулирани в образователната програма за детската градина. Изследователско-конструкторският подход позволява системно и ефективно да се формират компонентите на познавателната дейност на децата – като умствените операции класификация, сравнение, анализ и синтез, обобщение, абстрахиране, елементи на индуктивни и дедуктивни разсъждения, и не на последно място, да се стимулират пространствено-аналитичното и словесно-логическото мислене на децата. При реализацията на конструкторския подход в математическото обучение е необходимо конструктивната дейност да се съобрази с изискванията за построяване на дидактичните модели на понятията и с етапите на формиране на умствените действия на децата. Основните методи за реализация на изследователско-конструкторския подход са „моделирането“ и „конструирането“, което налага да се разкрият същността, връзката и ролята им в обучението по математика в детската градина.

В предучилищното образование моделирането се използва като приоритетен метод за развиване на математическите способности на децата. Визуализацията на абстрактните логико-математически свойства и зависимости може да се представи пред децата *единствено и само чрез моделирането им*. На предматематически език, когато се говори за моделиране на математически понятия и отношения при 3 – 7-годишни деца, се разбира работа със смесен тип модели: предметни (материални) модели и знаково-образни модели. Моделирането развива интелектуалното умение на детето да замества дадени обекти или техни отношения със съответни техни модели (реални предмети от природата и бита, макети, жетони, образи, кодове, символи, знаци, таблици и др.).

**Конструирането** може да се определи като частен метод спрямо общия метод моделиране. Конструирането, като метод за обучението по математика на децата, разглеждаме като веществено-игрово моделиране на математически понятия и отношения. Целта е децата да овладеят похвати за моделиране на нагледно-действено равнище, съответстващо на нагледно-действието мислене на 3 – 5-годишните и на образно-схематичното мислене на 5 – 7-годишните деца. В малките възрастови групи на децата трябва да се предлага веществено моделиране (предметно моделиране и конструиране на обекта), докато в големите възрастови групи – съчетаване на конструирането със схематично-графично и математическо моделиране (числа, числови изрази, геометрични фигури и др.). Постепенно при 6 – 7-годишните деца материалните и материализираните модели ще отстъпват място на схематично-знаковите и таблично-графичните моде-

ли. В процеса на моделирането на изучаваните математически понятия се развиват и конструктивните умения на децата. Моделирането се явява опосредствана форма на мисленето, а конструирането осигурява продуктивната интелектуална дейност на децата, която ще се развие в училище като универсална интелектуална способност.

Конструкторският подход отчита спецификата на математиката и предполага създаване на програма за конструктивна математика за деца, надграждаща уменията им. Използването на тази методология в математиката изисква проучване и създаване на сензорно възприемаеми модели и построяване на система от моделиращи действия, които са свързани не толкова с използване и изучаване на готови модели, а с осигуряване участието на децата в изследователски и продуктивни дейности. С приоритет се използват предметните модели, в които са изявени конструктивните особености на обекта (неговата структура, пропорциите, съотношения на частите към цялото и техни вътрешни връзки). Възможността за представяне на дадено понятие или отношение във веществен модел (макет, конструкция) позволява у детето да се оформи ясна представа за абстрактния математически обект или релация на нагледно-действено и образно равнище.

Изследователско-конструкторският подход в контекста на педагогическите ситуации по математика предполага самостоятелна конструкторско-моделираща дейност на децата със специални **конструкторски материали** за логико-математическо развитие. Тези материали са както плоскостни модели, така и обемни пространствено-геометрични модели за формиране на сензорните еталони за форма, количество, величина, разположение, цвят, големина. Те осигуряват осмислянето на формата и геометричните фигури, разкриват отношението „цяло и неговите части“, формират представи за числата и числовата редица. За целите на изследването са проучени и модифицирани развиващи материали и игри на М. Монтесори, логически блокове на Денеш, кодове на З. Семадени, цветни графи на Папи, пръчици на Кюизинер, разрязани квадрати на Никитин, кубчетата на Зайцев, игрови материали на З. Михайлова, лабиринти на Л.А. Венгер, геометрични конструктори „Танграм“, „Пентамино“ и др.

**Учебната форма** в дидактичната система „Конструктивна математика за деца“ е „Ателието“. То се реализира като незадължителна регламентирана педагогическа ситуация по математика по графика на тематична образователна програма. *Основните учебни методи* са евристичният метод, игровото моделиране и конструиране. *Основният познавателен метод* за стимулиране на мисловната дейност е емпиричното обобщение на резултатите на собствената дейност на детето на основата на сензорно възприета информация. Дейността на децата от експерименталните групи в ателието

по конструктивна математика се насочва към: изследване и оценяване на математическите характеристики на конструкции; изработване на сензорни материали с математически характер (сензорни книжки и игри за себе си или за по-малките деца); конструиране на пътечки, пирамиди, числова стълба, геометрични и аритметични мандали, релефни цифри и фигури; конструктивни игри (геометрични фигури, логически блокчета, таблици и кубчета, схеми, лабиринти, таблици и квадратни мрежи и др.).

Използват се съвременни методики за сензорно и математическо развитие на децата, основани на конструктивни игри с развиващи материали, като:

- конструктивни материали на Монтесори за числа и числови отношения (нанизани числа, златният материал и др.);

- геометрични конструктори: конструктивни триъгълници на М. Монтесори, разрязани квадрати и правоъгълници на Г.А. Репина и Никитин („Сглоби квадрат“), източноазиатски геометрични конструктори (игра „Танграм“, „Пентамино“, Монголска игра и др.);

- конструктивни кубчета: „Куб Хамелеон“ „Уникуб“;

- конструктивни цветни пръчици и лентички – М. Монтесори, Кюизинер и др.;

- динамични конструкции („Геоплан“ с ластици, тел, пластилин, шини и болтове и др.).

- конструкции от хартия и картон: обемни цифри с техниката оригами, числов крокодил, числова гъсеница, разгъвки на обемни тела и др.;

- пространствено-геометрични конструкции (план на куклена стая, координатни мрежи и равнини, „Сръчни строители“ и др.);

- конструкции, формиращи логическата операция класификация („Класификационно дърво“, къщи матрици, обръчи и блокчета и др.);

- конструкции с математически характеристики в средата „Лего-математика“.

С посочените конструктивни материали се създава развиваща образователна среда за постигане на три основни цели (в 3 етапа), които ясно разкриват връзката и единството на изследователския и конструкторския подход.

**I етап.** Изследване на математическо понятие или отношение върху готова конструкция (образец) и самостоятелно откриване от децата на свойства, връзки, отношения, наименования, размери и др.

**II етап.** Създаване от детето на конструкция по зададени логикоматематически характеристики (форма, размери, графически образ, количествени, пространствени и времеви характеристики, логически операции), като се преминава през етапите:

- а) конструиране на обект върху образец (налагане, вгнездяване);

- б) конструиране на обект по образец;



в) конструиране по творчески зами-сьл на детето или по указание (достига се разбирането на математическите знания и развиване на уменията в разнообразни познавателни ситуации).

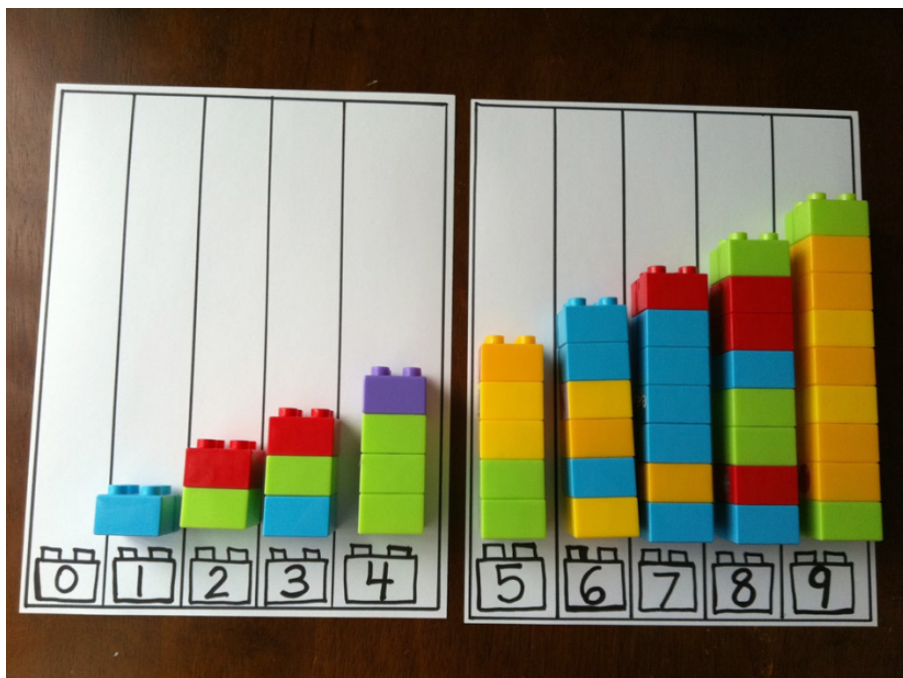
**III етап.** Анализ и оценяване математическите параметри на готова конструкция (модел) и даване идеи за коригиране и оптимизиране на конструкцията (оценка и творчески решения).

Конструктивната образователна среда „Лего-математика“ добре илюстрира приложението на изследователско-конструкторския подход в обучението по математика в предучилищния и в началноучилищния етап на обучение. В първия от посочените по-горе етапи се предлага например готова конструкция на две кули и се създава проблем да се постави един от знаците „по-голямо“, „по-малко“ или „равно“. Изисква се обяснение защо отворът на знака е към по-голямото число. Може да се използва „лента-дъска“, която да се постави върху кулите и визуално да се открие накъде е „отворен“ знакът по-голямо. Височината на кулите създава психически образ на количественото отношение „девет е по-голямо от четири“. Улеснява се переходът към разбиране на схематичния модел „ $9 > 4$ “, който детето подрежда чрез карти с цифри (фигура 2). Обратната задача се решава във втория етап: конструиране на обект върху или по образец, изискващ математически познания (количество, броене, цифри, числови отношения и др.). В изследването ни са разработени игрите „Поръчка за архитекта (строителя, художника)“, в които детето решава конструкторска задача за построяване на кула, коминче, стълбичка, леха, фриз, паркет, килим с определена площ, картина, геометрична мандала-витраж и т.н. (фигура 3). На третия етап се предлагат схеми за построяване на обект и готови конструкции, които някой друг е построил. Детето трябва да сравни заданието с готовия резултат и да даде оценка на конструкцията. В готовата конструкция са заложили грешки относно пространственото разположение на елементите, различни форми на тухлите или елементите, несъответствие с количеството елементи, посочени в схемата на образца.

Използването на метода конструиране в обучението по математика съдейства за решаване на редица задачи: задълбочено осмисляне и разбиране на математическите понятия и отношения, развиване на по-висши форми на



Фигура 2



Фигура 3

образно-действието мислене на децата, развиване на пространствено-схематичното, аналитико-синтетичното и комбинативното мислене; затвърдяване и приложение на знанията от направление „Математика“ при решаване на проблемно-практически задачи; развиване на моториката и на продуктивното творчество на децата; активизиране на математическата терминология и развиване на свързаната реч; създаване на условия за сътрудничество и развиване на нови компетенции в процеса на моделно-конструктивните дейности с математически характер. Резултатите от решаването на горепосочените задачи се отразяват върху пълноценното психическо и умствено развитие на детето.

### Заклучение

В процеса на моделирането и конструирането на математически понятия и отношения се постигат две цели: детето овладява система от умствени действия в процеса на интериоризация и усвоява система от математически представи и отношения като резултат от собствения си продуктивен опит. За разгръщането на конструктивно-моделираща дейност в педагогическите ситуации по математика е необходимо, първо, да се подбере математическо съдържание за опосредствано изучаване чрез веществени модели (конструкции) и да се осигурят

конструктивни развиващи материали, явяващи се ефективна опора на сензориката, мисленето, речта и творчеството на детето. Овластяването на моделирането и конструирането, като продуктивни методи на мисленето, се реализира чрез съвместната дейност на децата, учителите и родителите.

### БЕЛЕЖКИ

1. Да направим цифри с техниката оригами. [http://dela-ruk.ru/load/masteru/iz\\_bumagi/bumazhnye\\_cifry\\_v\\_tekhnike\\_origami\\_delaem\\_sami/23-1-0-1043](http://dela-ruk.ru/load/masteru/iz_bumagi/bumazhnye_cifry_v_tekhnike_origami_delaem_sami/23-1-0-1043)
2. Цифри с игра „Танграм“. [https://www.babyblog.ru/community/post/rannee\\_razvitiie/3067605](https://www.babyblog.ru/community/post/rannee_razvitiie/3067605)
3. Конструктивни триъгълници на Монтесори. <http://www.razumniki.ru/montessori.html>
4. LEGO-Математика. <https://www.pinterest.com/explore/lego-math/>

### ЛИТЕРАТУРА

- Bogdanova, M. (1988). *Modelirane to v obuchenieto po matematika v nachalnite klasove na ESPU*. St.Zagora: Univ. izd. „Paisiy Hilendarski“.
- [Богданова, М. (1988). *Моделирането в обучението по математика в началните класове на ЕСПУ*. Ст. Загора: Унив. изд. „Паисий Хилендарски“].
- Galabova, D. & Gaydova, R. (2006). Dizayn na matematiko-tehnicheskoto vzaimodeystvie v preduchilishtna vazrast. V: I. Ganchev & kolektiv (red.), *Matematika, informatika i kompyutarni nauki*, 267 – 273. Veliko Tarnovo: Slovo. [Гълъбова, Д. & Гайдова, Р. (2006). Дизайн на математико-техническото взаимодействие в предучилищна възраст. В: И. Ганчев & колектив (ред.), *Математика, информатика и компютърни науки*, 267 – 273. Велико Търново: Слово].
- Georgieva, M. & Grozdev, S. (2015). *Morfodinamika za razvitiето na noosferniya intelekt*. Sofia: Print. [Георгиева, М. & Гроздев, С. (2015). *Морфодинамика за развитието на ноосферния интелект*. София: Принт].
- Varbanova, M. (2013). *Strukturno-funksionalno modelirane v nachalnata uchilishtna matematika*. Plovdiv: Astarta. [Върбанова, М. (2013). *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*. Пловдив: Астарта].
- Venger, L. A. (1982). *Razvitiе sposobnosti k naglyadno-prostranstvenomu modelirovanie*. Moskva: *Doshkolnoe vospitanie*, 4. [Венгер, Л. А. (1982). Развитие способности к наглядно-пространственному моделированию. Москва: *Дошкольное воспитание*, 4].

## **DIDACTIC MODEL “CONSTRUCTIVE MATHEMATICS FOR CHILDREN”**

**Abstract.** In this article are considered the essence and the role of shaping and constructing as methods for investigating work in the education in mathematics by preschool children. The investigating constructor’s approach in the mathematical education of the children is based on independent work for “building-constructing” of the models of mathematical ideas and relations. In the process of constructing of the models the children discover, realize and consolidate basic skills and relations of the mathematical ideas.

✉ **Prof. Dr. Darinka Galabova**

**Mrs. Nadia Delcheva, PhD student**

St. Cyril and St. Methodius University of VelikoTarnovo

Veliko Tarnovo, Bulgaria

E-mail: darka\_galabova@abv.bg

E-mail: n\_delcheva@abv.bg