Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Върху правата AB е взета произволна точка C. Точките M и N лежат в една полуравнина спрямо AB и са такива, че ΔACM и ΔCBN са равностранни. Ако T е петата на перпендикуляра, спуснат от C към MN, да се намери геометричното място на точката T, когато C описва AB.

Ксения Горская, Дарья Коптева, Даниил Микуров – Архангелск, Русия

Задача 2. Върху отсечката AB е взета произволна точка C. Точките M и N лежат в различни полуравнини относно AB и са такива, че ΔACM и ΔCBN са равностранни. Ако T е пресечната точка на общата допирателна през C за описаните окръжности на ΔACM и ΔCBN с отсечката BM, да се намери геометричното място на точката T, когато C описва AB.

Еркен Мудебаев, Казбек Мухамбетов, Адилбек Темирханов – Актау, Казахстан

Задача 3. Дадени са ΔABC и точки A_0, B_0 и C_0, лежащи съответно върху страните BC, CA и AB. Вътрешно за ΔABC са построени равнобедрените триъгълници BA_0M_a, CB_0M_b и AC_0M_c с ъгли при основите BA_0, CB_0 и AC_0, равни на α_0. Аналогично, вътрешно за ΔABC са построени равнобедрените триъгълници CA_0N_a, AB_0N_b и BC_0N_c с ъгли при основите CA_0, AB_0 и BC_0, равни на β_0. Точките T_a, T_b и T_c са вътрешни за отсечките M_aN_a, M_bN_b и M_cN_c и такива, че $\dfrac{M_aT_a}{N_aT_a}=\dfrac{\cos\alpha_0.A_0M_a}{\cos\beta_0.A_0N_a}$, $\dfrac{M_bT_b}{N_bT_b}=\dfrac{\cos\alpha_0.B_0M_b}{\cos\beta_0.B_0N_b}$, $\dfrac{M_cT_c}{N_cT_c}=\dfrac{\cos\alpha_0.C_0M_c}{\cos\beta_0.C_0N_c}$. Когато A_0, B_0 и C_0 се движат по BC, CA и AB, точките T_a, T_b и T_c описват съответно геометричните места π_a, π_b и π_c. Да се докаже, че:

а) геометричните места π_a, π_b и π_c са части от параболи;

б) ако V_a, V_b и V_c са върховете на параболите π_a, π_b и π_c, правите AV_a, BV_b и CV_c се пресичат в една точка или са успоредни.

Лили Стефанова, Ирина Христова, Радина Иванова – Ловеч, България

Краен срок за изпращане на решения 31 май 2017 г.

Конкурсът продължава и през настоящата година. В края на 2016 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2017 г.

Решенията трябва да бъдат представяни ясно, като всяка задача е задължително да бъде на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg и vnenkov@mail.bg

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 1/2016

Задача 1. Целочислените редици $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ са дефинирани чрез равенствата $x_1 = a-1$, $y_1 = a+1$, $x_n = a.x_{n-1} + a - 1$, $y_n = a.y_{n-1} - a + 1$, при $n \geq 2$.

а) Да се докаже, че за всяко цяло число a точно едно от числата x_n, y_n и $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ се дели на 3.

б) Да се определят целите числа a, за които x_n и y_n са взаимно прости числа за всяко естествено число n.

Христо Лесов – Казанлък

Решение: дадените рекурентни равенства представяме по следния начин: $x_n + 1 = a(x_{n-1} + 1)$ и $y_n - 1 = a(y_{n-1} - 1)$. От тях получаваме последователно $x_{n-1} + 1 = a(x_{n-2} + 1)$ и $y_{n-1} - 1 = a(y_{n-2} - 1)$, ..., $x_2 + 1 = a(x_1 + 1)$ и $y_2 - 1 = a(y_1 - 1)$. След почленно умножаване на съответните равенства за отделните редици намираме равенствата: $x_n + 1 = a^{n-1}(x_1 + 1)$ и $y_n - 1 = a^{n-1}(y_1 - 1)$. Оттук следва, че $x_n = a^n - 1$ и $y_n = a^n + 1$. Нека a е цяло число. Тъй като x_n, $\frac{1}{2}(x_n + y_n)$ и y_n са три последователни числа, точно едно от тях се дели на 3. С това твърдение а) е доказано. По-нататък от получените за x_n и y_n равенства следва, че ако a е нечетно число, то x_n и y_n са четни за всяко естествено число n. Ако a е четно, то x_n и y_n са нечетни и е изпълнено равенството $x_n - y_n = 2$. Оттук следва, че най-големият общ делител на x_n и y_n е делител на 2. Тъй като тези числа са нечетни, то най-големият им общ делител е 1. Затова при всяко естествено число n и всяко четно число a числата x_n и y_n са взаимно прости. С това задачата е решена.

Задача 2. Един изпъкнал четириъгълник се нарича хармоничен, ако е вписан в окръжност и произведенията на срещуположните му страни са равни помежду си. Нека $ABCDEF$ е изпъкнал шестоъгълник, в който четириъгълниците $ABDF$ и $ACDE$ са хармонични. Да се докаже, че средите M, N,

P съответно на диагоналите AD, BE, CF и пресечната точка Q на BE и CF лежат на една окръжност.

Хаим Хаимов – Варна

Решение: в решението на задачата ще използваме следната

Лема. *Ако* $ABCD$ *е хармоничен четириъгълник и* U *е средата на диагонала* AC*, то са изпълнени равенствата:* 1) $\sphericalangle AUB = \sphericalangle AUD$*;* 2) $BU.DU = \dfrac{1}{4}.AC^2$.

Доказателство. От теоремата на Птолемей $AB.CD + BC.DA = AC.BD$ за вписан четириъгълник и равенството $AB.CD = BC.DA$ от определението следва $2.AB.CD = AC.BD$, което е еквивалентно с $\dfrac{AB}{AU} = \dfrac{BD}{CD}$. Освен това $\sphericalangle BAU = \sphericalangle BDC$ (вписани ъгли). Следователно $\Delta ABU \sim \Delta DBC$. Оттук $\sphericalangle AUB = \sphericalangle DCB$ и $\dfrac{AU}{BU} = \dfrac{CD}{BC}$. Аналогично се получава, че $\Delta UAD \sim \Delta CBD$, откъдето $\sphericalangle AUD = \sphericalangle DCB$ и $\dfrac{AU}{DU} = \dfrac{BC}{CD}$. От равенствата между ъглите следва $\sphericalangle AUB = \sphericalangle AUD$, а от равенствата на отношенията се получава $BM.DM = AM^2 = \dfrac{1}{4}.AC^2$. С това лемата е доказана.

Преминаваме към решение на задачата. Прилагаме 1) от лемата към хармоничните четириъгълници $ABDF$ и $ACDE$ и получаваме съответно равенствата $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMF$ и $\sphericalangle CMD = \sphericalangle EMD$. След почленно събиране на тези равенства следва, че $\sphericalangle AMB + \sphericalangle CMD = \sphericalangle AMF + \sphericalangle EMD$.

Оттук $\sphericalangle BMC = \sphericalangle FME$. Използвайки това равенство, получаваме $\sphericalangle BME = \sphericalangle BMF + \sphericalangle FME = \sphericalangle BMF + \sphericalangle BMC = \sphericalangle FME$, т.е. $\sphericalangle BME = \sphericalangle FME$. Сега прилагаме 2) от лемата към $ABDF$ и $ACDE$ и получаваме съответно $BM.FM = \dfrac{1}{4}AD^2$ и $EM.CM = \dfrac{1}{4}AD^2$. Следователно $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{EM}{FM}$. От това равенство и последното равенство между ъгли следва, че $\Delta BME \sim \Delta CMF$. Тъй като MN и MP са съответни медиани в двата подобни триъгълника, то $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MPF$, т.е. $\sphericalangle MNE = \sphericalangle MPQ$. Оттук следва, че $\sphericalangle MNQ + \sphericalangle MPQ = 180°$. Последното равенство означава, че точките M, N, P и Q лежат на една окръжност.

Задача 3. Да се намери множеството от точки M, двете допирателни през които към дадена елипса са перпендикулярни.

Милен Найденов – Варна

Решение: спрямо каноничната си координатна система *Oxy* елипсата има уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нека точката $M\left(\xi,\eta\right)$ е от търсеното геометрично място и лежи върху допирателна l с уравнение $y=kx+n$. От двете уравнения следва квадратното уравнение $\left(a^2k^2+b^2\right)x^2+2a^2knx+a^2\left(n^2-b^2\right)=0$. Правата l е допирателна тогава и само тогава, когато дискриминантата на последното уравнение е нула. Следователно е изпълнено равенството $n^2=a^2k^2+b^2$. Тъй като $M\in l$, то $\eta=k\xi+n$. Затова $\eta-k\xi=\pm\sqrt{a^2k^2+b^2}$. След повдигане в квадрат на двете страни на последното равенство стигаме до квадратното спрямо k уравнение $\left(a^2-\xi^2\right)k^2+2\xi\eta k+b^2-\eta^2=0$.

Ако k_1 и k_2 са корените на това уравнение, от формулите на Виет следва, че $k_1k_2=\frac{b^2-\eta^2}{a^2-\xi^2}$. Тъй като k_1 и k_2 са ъгловите коефициенти на двете допирателни през M и тези допирателни трябва да са перпендикулярни, то $k_1k_2=-1$. Оттук следва, координатите на M удовлетворяват равенството $\xi^2+\eta^2=a^2+b^2$. Последното е уравнение на окръжност с център O и радиус $\sqrt{a^2+b^2}$. Следователно търсеното геометрично място е окръжността, описана около правоъгълника, определен от върховите допирателни на елипсата.