Educational Technologies
Образователни технологии

ПСЕВДОЦЕНТЪР И ОРТОЦЕНТЪР – ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНИ ТОЧКИ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА

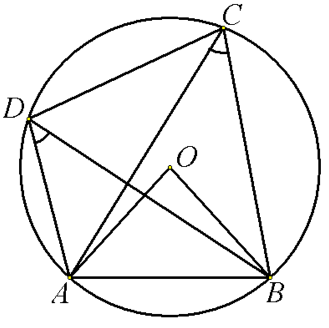
[1)]Веселин Ненков, [2)]Станислав Стефанов, Хаим Хаимов
[1)]Технически колеж – Ловеч
[2)]Технически университет – София

Резюме. В статията са описани някои свойства на две забележителни точки в изпъкналия четириъгълник, които са естествени обобщения на центъра на описаната окръжност и ортоцентъра на вписания четириъгълник.
Keywords: quadrilateral, circumcircle, circumcenter, orthocenter, Euler circle

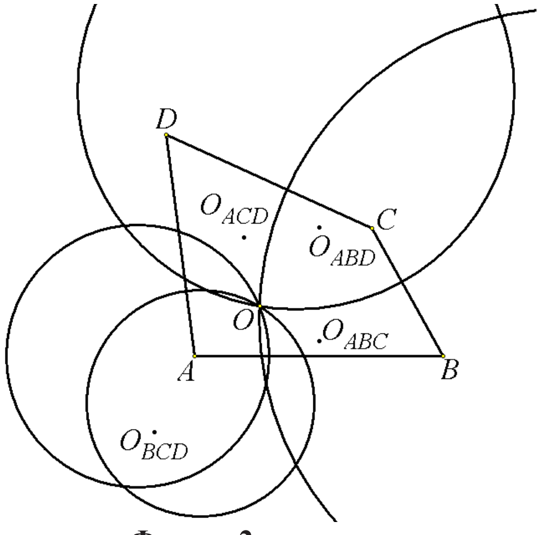
В редица публикации са описани и изследвани различни забележителни точки в произволен изпъкнал четириъгълник (вж. литературата). Някои от забележителните точки в четириъгълника са аналози на забележителните точки в триъгълника, други са строго специфични за четириъгълника, трети са обобщения на забележителни точки на специални видове четириъгълници (вписан, описан, хармоничен и т.н.). Забележителните точки са интересни, на първо място, с многобройните си и разнообразни свойства и на второ – с връзките помежду си. Някои тройки от тях са разположени на забележителни прави, а някои четворки и дори повече – на забележителни окръжности. Те се изобразяват една в друга при различни преобразувания в четириъгълника. Разстоянията между някои от тях и върховете на четириъгълника се определят по прости формули. Интересни характеристики имат педалните четириъгълници на някои точки.

Тук ще разгледаме две тясно свързани забележителни точки в изпъкналия четириъгълник, които са обобщения на центъра на описаната окръжност и ортоцентъра на вписания четириъгълник (Grozdev & Nenkov, 2011). Както е разяснено в (Haimov, 2010), повечето от свойствата им са идентични със свойствата на последните.

Нека $ABCD$ е произволен изпъкнал четириъгълник, а r_{BCD}, r_{CDA}, r_{DAB} и r_{ABC} са радиусите на описаните окръжности съответно на триъгълниците BCD, CDA, DAB и ABC. Ако $ABCD$ е вписан в окръжност с център O, то $r_{BCD} = r_{CDA} = r_{DAB} = r_{ABC}$ и $\dfrac{AO}{BO} = \dfrac{r_{CDA}}{r_{BCD}}$, $\dfrac{BO}{CO} = \dfrac{r_{DAB}}{r_{CDA}}$, $\dfrac{CO}{DO} = \dfrac{r_{ABC}}{r_{DAB}}$, $\dfrac{DO}{AO} = \dfrac{r_{BCD}}{r_{ABC}}$



Фигура 1



Фигура 2

(фиг. 1). Тези свойства на центъра на описаната около $ABCD$ окръжност ни дават основание да търсим точка O (ако съществува) със същите свойства, но в равнината на произволен изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Горните отношения показват, че ако O съществува, тя е пресечна точка на четири Аполониеви окръжности (фиг. 2). Следователно, ако точката O съществува, тя е единствена.

Лесно се вижда, че разгледаните отношения са еквивалентни със следните равенства:

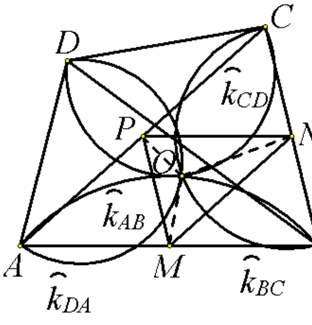
$$(1) \qquad AO.r_{BCD} = BO.r_{CDA} = CO.r_{DAB} = DO.r_{ABC}.$$

Въз основа на (1) въвеждаме следното

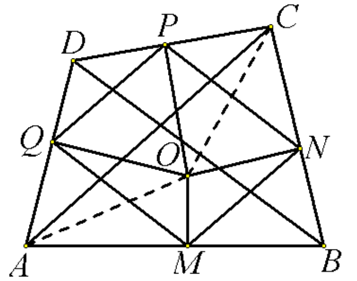
Определение 1. Точката O в равнината на изпъкналия четириъгълник $ABCD$, за която са изпълнени равенствата (1), наричаме псевдоцентър.

От извършените разсъждения следва, че ако $ABCD$ е вписан в окръжност, четириъгълникът притежава псевдоцентър O, който съвпада с центъра на описаната му окръжност. Следователно съществуват четириъгълници, които притежават псевдоцентър. По-нататък ще покажем, че всеки изпъкнал четириъгълник притежава забележителната точка псевдоцентър. Преди това ще въведем следното

Определение 2. Сборът от ъглите, под които се вижда страната AB на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ от върховете му C и D, наричаме ъглова мярка на страната AB. Ъгловата мярка на страната AB ще означаваме с φ_{AB}. Следователно $\varphi_{AB} = \sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB$ (фиг. 1).



Фигура 3



Фигура 4

За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ въвеждаме и следните означения: с $\widehat{k}_{AB}$, $\widehat{k}_{BC}$, $\widehat{k}_{CD}$ и $\widehat{k}_{DA}$ означаваме съответно дъгите от окръжности, лежащи в $ABCD$, от които страните AB, BC, CD и AB се виждат съответно под ъгъл φ_{AB}, φ_{BC}, φ_{CD} и φ_{DA} (фиг. 3).

Съществуването на псевдоцентър ще докажем само в случая, когато ъгловите мерки на всички страни на $ABCD$ са по-малки от 180^0. В останалите случаи разсъжденията са аналогични.

Теорема 1. *Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, страните на който имат ъгловите мерки, по-малки от 180^0, дъгите $\widehat{k}_{AB}$, $\widehat{k}_{BC}$, $\widehat{k}_{CD}$ и $\widehat{k}_{DA}$ се пресичат в точка O, за която са изпълнени равенствата* (1) (фиг. 3).

Доказателство. Нека O' е втората пресечна точка на дъгите $\widehat{k}_{AB}$ и $_{BC}$ (фиг. 3). Ще докажем, че са изпълнени равенствата

$$(*) \qquad AO'.r_{BCD} = BO'.r_{CDA} = CO'.r_{DAB}\,.$$

Означаваме ортогоналните проекции на O' върху AB, BC и CA съответно с M, N и P. Тъй като AO' е диаметър на описаната около APM окръжност, от синусовата теорема следва $AO' = \dfrac{PM}{\sin\sphericalangle CAB}$. Аналогично $BO' = \dfrac{MN}{\sin\sphericalangle ABC}$. От синусовата теорема, приложена за триъгълниците BCD, CDA, MNP и ABC, получаваме съответно $r_{BCD} = \dfrac{BC}{2\sin\sphericalangle BDC}$, $r_{CDA} = \dfrac{AC}{2\sin\sphericalangle DCA}$, $\dfrac{PM}{MN} = \dfrac{\sin\sphericalangle MNP}{\sin\sphericalangle MPN}$, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sin\sphericalangle ABC}{\sin\sphericalangle CAB}$. От последните равенства следва

$$(2) \qquad \frac{AO'}{BO'}.\frac{r_{BCD}}{r_{CDA}} = \frac{\sin\sphericalangle MNP}{\sin\sphericalangle MPN}.\frac{\sin\sphericalangle CDA}{\sin\sphericalangle BDC}\,.$$

От друга страна, от вписаните четириъгълници $AMO'P$ и $MBNO'$ следва $\sphericalangle PMN = \sphericalangle PMO' + \sphericalangle NMO' = \sphericalangle PAO' + \sphericalangle NBO'$. Следователно

$$(3) \qquad \sphericalangle PMN = \sphericalangle CAO' + \sphericalangle CBO'.$$

Тъй като от всички точки на дъгата $\overset{\frown}{k}_{AB}$ страната AB се вижда под ъгъл $\varphi_{AB} = \sphericalangle ADB + \sphericalangle ACB$, то $\sphericalangle CAO' + \sphericalangle CBO' = \sphericalangle AO'B - \sphericalangle ACB = \varphi_{AB} - \sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Сега от (3) намираме, че $\sphericalangle PMN = \sphericalangle ADB$. Аналогично от $O' \in \overset{\frown}{k}_{BC}$ следва, че $\sphericalangle MNP = \sphericalangle BDC$. От последните две равенства намираме

$$\frac{\sin \sphericalangle MNP}{\sin \sphericalangle MPN} = \frac{\sin \sphericalangle BDC}{\sin(\sphericalangle MNP + \sphericalangle PMN)} = \frac{\sin \sphericalangle BDC}{\sin(\sphericalangle BDC + \sphericalangle ADB)} = \frac{\sin \sphericalangle BDC}{\sin \sphericalangle CDA}.$$

Оттук, след заместване в (2), получаваме $\dfrac{AO'}{BO'}.\dfrac{r_{BCD}}{r_{CDA}} = 1$, т.е. $AO'.r_{BCD} = BO'.r_{CDA}$. С това първото равенство в $(*)$ е доказано. Аналогично се доказва и равенството $BO'.r_{CDA} = CO'.r_{DAB}$. С това равенствата $(*)$ са доказани.

Нека сега втората пресечна точка на дъгите $\overset{\frown}{k}_{AB}$ и $\overset{\frown}{k}_{DA}$ е O''. Аналогично на $(*)$ се получават равенствата

$$(**) \qquad BO''.r_{CDA} = AO''.r_{BCD} = DO''.r_{ABC}.$$

От $(*)$ и $(**)$ следват равенствата $\dfrac{AO'}{BO'} = \dfrac{AO''}{BO''} = \dfrac{r_{CDA}}{r_{BCD}}$. Това означава, че точките O' и O'' лежат на една и съща Аполониева окръжност α за отсечката AB. От друга страна, O' и O'' са точки от дъгата $\overset{\frown}{k}_{AB}$. Тъй като α и $\overset{\frown}{k}_{AB}$ имат само една обща точка, то $O' \equiv O'' \equiv O$, където $O = \overset{\frown}{k}_{AB} \cap \overset{\frown}{k}_{BC} \cap \overset{\frown}{k}_{DA}$.

Аналогично се доказва, че ако O''' е втората пресечна точка на $\overset{\frown}{k}_{BC}$ и $\overset{\frown}{k}_{CD}$, то $O''' \equiv O$. Оттук следва, че четирите дъги $\overset{\frown}{k}_{AB}$, $\overset{\frown}{k}_{BC}$, $\overset{\frown}{k}_{CD}$ и $\overset{\frown}{k}_{DA}$ минават през точката O. С това теорема 1 е доказана.

От доказателството на теорема 1 следва, че всеки изпъкнал четириъгълник притежава псевдоцентър. Освен от това теорема 1 се получава следното:

Свойство 1. *Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, страните на който имат ъглови мерки, по-малки от $180°$, то всяка страна на четириъгълника се вижда от псевдоцентъра му под ъгъл, равен на ъгловата ѝ мярка.*

Забележка 1. С помощта на следствие 1 лесно се убеждаваме, че дефиницията на псевдоцентъра, изразена с определение 1, е еквивалентна с тази, представена в (Haimov, 2010).

Следват още няколко свойства на псевдоцентъра.

Свойство 2. *За псевдоцентъра* O *на изпъкналия четириъгълник* $ABCD$ *са изпълнени равенствата* $\frac{AO}{CO}=\frac{\sin\sphericalangle BCD}{\sin\sphericalangle DAB}$ *и* $\frac{BO}{DO}=\frac{\sin\sphericalangle CDA}{\sin\sphericalangle ABC}$.

Доказателството на първото равенство в това свойство се получава от равенството $AO.r_{BCD}=CO.r_{DAB}$ и синусовата теорема за триъгълниците DAB и BCD по следния начин $\frac{AO}{CO}=\frac{r_{DAB}}{r_{BCD}}=\frac{BD}{2\sin\sphericalangle DAB}.\frac{2\sin\sphericalangle BCD}{BD}=\frac{\sin\sphericalangle BCD}{\sin\sphericalangle DAB}$.
Второто равенство се получава по същия начин.

Определение 3. Ако M, N, P и Q са ортогоналните проекции на точката O съответно върху правите AB, BC, CD и DA, четириъгълникът $MNPQ$ се нарича педален на точката O (фиг. 4).

Свойство 3. *Педалният четириъгълник* $MNPQ$ *на псевдоцентъра* O *на изпъкналия четириъгълник* $ABCD$ *е успоредник* (фиг. 4).

Доказателство. От синусовата теорема за триъгълниците AMQ и CPN следват съответно равенствата $QM=AO.\sin\sphericalangle DAB$ и $PN=CO.\sin\sphericalangle BCD$. От друга страна, според свойство 2 е изпълнено $AO.\sin\sphericalangle DAB=CO.\sin\sphericalangle BCD$. Следователно $QM=PN$. Аналогично се показва, че $MN=PQ$. Следователно $MNPQ$ е успоредник.

По аналогичен начин се доказва и следното

Свойство 4. *Ортогоналните проекции на псевдоцентъра* O *на изпъкналия четириъгълник* $ABCD$ *върху двойка срещуположни страни и двата диагонала са върхове на успоредник.*

Други свойства на псевдоцентъра се съдържат в (Haimov, 2010).

Забележка 2. Лесно се доказва, че псевдоцентърът O на четириъгълника $ABCD$ лежи или в ъгъла между правите AB и CD, съдържащ четириъгълника, или в съответния ъгъл между правите BC и DA. Доказва се, че в равнината на $ABCD$ може да има най-много две точки, чиито педални четириъгълници са успоредници. Едната според свойство 3 е псевдоцентърът. Другата, както лесно се съобразява, лежи извън споменатите ъгли. Следователно, ако педалният четириъгълник на една точка от тези ъгли е успоредник, то тя съвпада с псевдоцентъра. Този факт ще ни послужи по-нататък.

Определение 4. Педалният четириъгълник $MNPQ$ на псевдоцентъра O за изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ще наричаме педално вписан успоредник на $ABCD$.

Дотук разгледахме част от свойствата на псевдоцентъра. Преди да преминем към втората забележителна точка на произволен изпъкнал четириъгълник $ABCD$, да предположим, че $ABCD$ е вписан в окръжност. От направения в началото коментар следва, че псевдоцентърът му съвпада с центъра O на описаната окръжност. Педалният четириъгълник на този център е успоредник. Той има за върхове средите на страните на $ABCD$ (понеже O лежи върху симетралите на страните). Известно е, че перпендикулярите, спуснати от средите на страните на вписания четириъгълник $ABCD$ към срещуположните страни се пресичат в една точка H (Grozdev & Nenkov, 2011). Тя се нарича ортоцентър на четириъгълника, а самите перпендикуляри – негови височини. Както ще видим сега, с помощта на педално вписания успоредник на четириъгълника $ABCD$ могат да се дефинират обобщения на височините и ортоцентъра и в случая, когато той не е вписан в окръжност.

Определение 5. Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, перпендикулярите, спуснати от върховете на педално вписания му успоредник $MNPQ$ към срещуположните им страни, се наричат височини на четириъгълника.

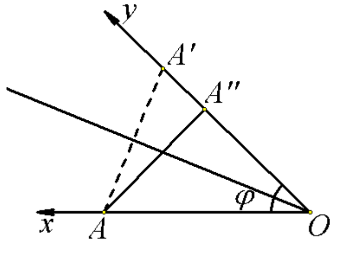
Теорема 2. *Височините на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ се пресичат в една точка H.*

Доказателството на тази теорема се съдържа в (Haimov, 2010).

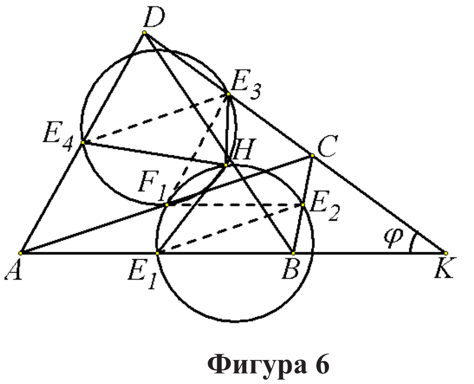
Определение 6. Пресечната точка H на височините на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ ще наричаме ортоцентър на $ABCD$.

Ортоцентърът H на четириъгълника $ABCD$ е образ на псевдоцентъра му O при едно важно преобразуване.

Определение 7. Нека xOy е произволен ъгъл с мярка φ $(0 < \varphi < 180°)$. Композицията от симетрията g спрямо ъглополовящата на ъгъла xOy и хомотетията h с център върха му O и коефициент $\cos\varphi$ ще наричаме симетрична хомотетия спрямо ъгъла xOy и ще означаваме с gh.



Фигура 5



Фигура 6

Лема 1. *Нека* xOy *е произволен ъгъл с мярка* φ. *Образът на произволна точка* A *от рамото* $\overrightarrow{Ox}$ *при симетричната хомотетия* gh *спрямо* xOy *е проекцията ѝ върху правата, на която лежи другото рамо на* xOy (фиг. 5).

Доказателство. Образът на точката A при симетрията g спрямо ъглополовящата на ъгъл xOy е точката A' от рамото $\overrightarrow{Oy}$, за която $OA' = OA$ (фиг. 5). От своя страна, образ на точката A' от рамото $\overrightarrow{Oy}$ при хомотетията h с център O и коефициент $\cos\varphi$ е точката A'' от правата l, за която $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA'}.\cos\varphi$. От $OA' = OA$ и последното равенство следва, че $\overrightarrow{OA''} = \overrightarrow{OA}.\cos\varphi$, т.е., точката A'' е проекция на точката A върху правата l.

Теорема 3. *Ако продълженията на страните* AB *и* DC *на изпъкналия четириъгълник* $ABCD$ *се пресичат в точка* K, *образът на псевдоцентъра* O *за* $ABCD$ *при симетричната хомотетия* gh *спрямо* $\measuredangle AKD$ *е ортоцентърът* H *на* $ABCD$.

Доказателството на тази теорема се съдържа в (Haimov, 2010).

Сега да направим следната важна

Забележка 3. Доказва се, че ортоцентърът H на вписания четириъгълник $ABCD$ има следното свойство: „Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB имат обща точка, която е H“. Но е известно още, че Ойлеровите окръжности на тези триъгълници имат обща точка и когато $ABCD$ не е вписан, а е произволен четириъгълник (Nenkov, 2008). Това е една забележителна точка, открита още в началото на XX век. В (Haimov, 2010) е доказано, че ортоцентърът на изпъкнал четириъгълник (дефиниран с определение 6) съвпада с тази точка. Ето защо всички свойства на ортоцентъра, разглеждани както тук, така и в (Haimov, 2010), са нови свойства на въпросната точка. Фактът, че във всеки изпъкнал четириъгълник $ABCD$ Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB имат ортоцентъра H за обща точка, ще ни послужи при доказателството на следната

Теорема 4. *Нека* $ABCD$ *е изпъкнал четириъгълник, продълженията на страните* AB *и* DC *се пресичат в точка* K *и* $\measuredangle AKD = \varphi$. *Ако* H *е ортоцентърът на* $ABCD$, *а* E_1 *и* E_3 *са средите съответно на страните* AB *и* DC, *то* $E_1HE_3 = 180° - \varphi$.

Доказателство. Означаваме средите на диагонала AC и страните DC и AD съответно с F_1, E_2 и E_4 (фиг. 6). Ойлеровите окръжности на BCD, CDA, DAB и ABC означаваме съответно с k_A, k_B, k_C и k_D. Ортоцентърът H на $ABCD$ е обща точка на Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC, BCD, CDA и DAB (според забележка 3). Ойлеровите окръжности на триъгълниците ѝ и ABC са определени от средите на страните си съответно F_1, E_3, $E_4 \in DA$ и E_1, E_2, F_1. От $H \in k_D$ следва, че $\sphericalangle E_4HF_1 = \sphericalangle E_4E_3F_1$. От друга страна $AF_{\text{ù}}E\ E$ е успоредник и затова $\sphericalangle E_4E_3F_1 = \sphericalangle E_4AF_1$. Тогава $\sphericalangle E_4HF_1 = \sphericalangle E_4AF_1$. Аналогично от $H \in k_B$ се получава, че $\sphericalangle E_1HF_1 = \sphericalangle E_1AF_1$. Събираме почленно последните две равенства и получаваме

$$(5) \qquad \sphericalangle E_4HF_1 + \sphericalangle F_1HE_1 = \sphericalangle E_4AF_1 + \sphericalangle F_1AE_1 .$$

От друга страна, са изпълнени равенствата $\sphericalangle E_4HF_1 + \sphericalangle F_1HE_1 = \sphericalangle E_4HE_1$ и Đ$E_4AF_1 + \quad F_1AE_1 = \quad E_4AE_1$ (фиг. 6). Сега от равенството (5) следва

$$(6) \qquad \sphericalangle E_4HE_1 = \sphericalangle E_4AE_1 .$$

Аналогично се доказва равенството (фиг. 6)

$$(7) \qquad \sphericalangle E_4HE_3 = \sphericalangle E_4DE_1 .$$

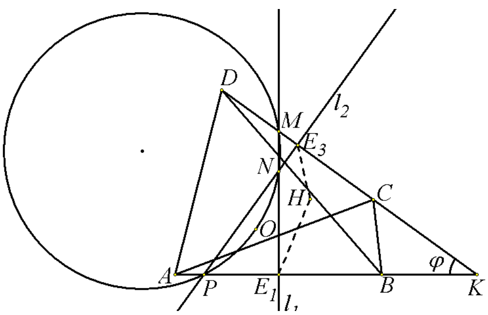
След почленно събиране на (6) и (7) се получава

$$(8) \qquad \sphericalangle E_4HE_1 + \sphericalangle E_4HE_3 = \sphericalangle E_4AE_1 + \sphericalangle E_4DE_3 .$$

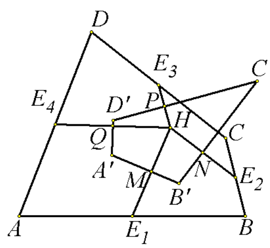
От друга страна, е изпълнено (фиг. 6)

$$(9) \qquad \sphericalangle E_4HE_1 + \sphericalangle E_4HE_3 = \sphericalangle E_1HE_3 .$$

От (8) и (9) следва равенството $\sphericalangle E_4AE_1 + \sphericalangle E_4DE_3 = \sphericalangle E_1HE_3$. Освен това от ΔAKD имаме $\sphericalangle E_4AE_1 + \sphericalangle E_4DE_3 = 180° - \sphericalangle AKD = 180° - \varphi$. Следователно $\sphericalangle E_1HE_3 = 180° - \varphi$. С това теоремата е доказана.



Фигура 7



Фигура 8

С помощта на теорема 4 ще докажем още едно свойство на псевдоцентъра на четириъгълника.

Свойство 5. *Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, в който AB не е успоредна на CD, симетралата l_1 на страната AB пресича правата CD в точка M, а симетралата l_2 на страната CD пресича правата AB в точка P. Ако N е пресечната точка на симетралите l_1 и l_2, то псевдоцентърът O*

на $ABCD$ *лежи на дъгата* $\overset{\frown}{MNP}$ *от описаната около* ΔMNP *окръжност* (фиг. 7).

Доказателство. Нека K е пресечната точка на продълженията на страните AB и CD, а E_1 и E_3 са съответните им среди и $\sphericalangle AKD = \varphi$ (фиг. 7). Ако gh е симетричната хомотетия спрямо $\sphericalangle AKD$, то $O \xrightarrow{gh} H$, където H е ортоцентърът на $ABCD$ и $M \xrightarrow{gh} E_1$, $P \xrightarrow{gh} E_3$ (по теорема 3 и лема 1). Следователно $\sphericalangle$ù се изобразява при gh в $\sphericalangle E_1HE_3$, т.е. $\sphericalangle MOP = \sphericalangle E_1HE_3$. Но $\sphericalangle E_1HE_3 = 180° - \varphi$ (по теорема 4) и затова $\sphericalangle MOP = 180° - \varphi$. Същевременно от това, че E_1KE_3N е вписан четириъгълник, следва $\sphericalangle MNP = \sphericalangle E_1NE_3 = 180° - \sphericalangle AKD = 180° - \varphi$. Следователно $\sphericalangle MOP = \sphericalangle MNP$ и точката O лежи на дъгата $\overset{\frown}{MNP}$ от окръжността, описана около ΔMNP.

Ще се спрем на още една връзка между разгледаните тук забележителни точки.

Определение 8. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а A', B', C' и D' са центровете на Ойлеровите окръжности съответно на триъгълниците DAB, BCD, ABC и CDA. Четириъгълника $A'B'C'D'$ ще наричаме спрегнат на $ABCD$ (фиг. 8).

Теорема 6. *Ако* $A'B'C'D'$ *е спрегнатият четириъгълник на изпъкналия четириъгълник* $ABCD$*, то псевдоцентърът на* $A'B'C'D'$ *съвпада с ортоцентъра на* $ABCD$.

Доказателство. Ортоцентърът H на четириъгълника $ABCD$ е обща точка на Ойлеровите окръжности на триъгълниците DAB, BCD, ABC и CDA (според забележка 3) (фиг. 8). Нека E_1, E_2, E_3 и E_4 са средите съответно на страните AB, BC, CD и DA. Освен това нека $A'B' \cap HE_1 = M$, $B'C' \cap HE_2 = N$, $C'D' \cap HE_3 = P$ и $D'A' \cap HE_4 = Q$. Отсечката $A'B'$ е централа на Ойлеровите окръжности k_C и k_D съответно на ΔDAB и ΔABC, а HE_1 е общата им хорда. Следователно $A'B' \perp HE_1$ и M е средата на HE_1. Тогава M е образ на E_1 при хомотетията $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ и $A'B' \perp HM$. Аналогично се доказва, че точките N, P и са образи съответно на E_2, E_3 и E_4 при същата хомотетия $h\left(H, \frac{1}{2}\right)$ и $B'C' \perp HN$, $C'D' \perp HP$ и $D'A' \perp HQ$. Четириъгълникът $E_1E_2E_3E_4$ с върхове средите на страните на $ABCD$ е успоредник. Следователно $MNPQ$ също е успоредник. От друга страна, $MNPQ$ е педалният четириъгълник на точката H по отношение на четириъгълника $A'B'C'D'$. Лесно се съобразява, че точката H лежи в ъгъла между правите $A'B'$ и $C'D'$, съдържащ $A'B'C'D'$, или в съответния ъгъл между правите $A'D'$ и $B'C'$. От забележка 2 следва, че H съвпада с псевдоцентъра на четириъгълника $A'B'C'D'$. Така се убедихме, че ортоцентърът H на $ABCD$ съвпада с псевдоцентъра на $A'B'C'D'$.

Накрая ще приведем без доказателство още едно свойство на ортоцентъра на изпъкнал четириъгълник, което има интересно приложение.

Свойство 6. *Нека $ABCD$ изпъкнал четириъгълник, като $T = AC \cap BD$, $U = AD \cap BC$, $V = AB \cap DC$. Ортоцентърът H на $ABCD$ лежи на окръжността, определена от точките U, V и T.*

От това свойство следва интересният факт, че точката на Фойербах в триъгълника (допирната точка на вписаната и Ойлеровата окръжност) лежи на окръжността, определена от петите на ъглополовящите, но доказателството е обемисто, затова не го излагаме.

Накрая предлагаме няколко задачи за упражнение.

Задача 1. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а $A'B'C'D'$ е неговият спрегнат четириъгълник. Да се докаже, че ортоцентърът на $A'B'C'D'$ съвпада с медицентъра на $ABCD$.

Упътване: използвайте доказателството на теорема 6 и следствието след определение 5 от (Haimov, 2010).

Задача 2. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който O е псевдоцентърът му. Означаваме с P точката в полуравнината на правата AB, съдържаща $ABCD$ такава, че $\sphericalangle PAB = \sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle PBA = \sphericalangle BDC$. Нека още правата BP пресича диагонала AC в точка M, а правата AP пресича диагонала BD в точка N. Да се докаже, че правата MN минава през псевдоцентъра O на $ABCD$.

Задача 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който O е псевдоцентърът му, а r_A и r_C са радиусите на описаните около триъгълниците AOB и COD окръжности. С M означаваме пресечната точка на симетралата на страната AB с правата CD, а с N – пресечната точка на симетралата на CD с правата AB. Да се докаже, че $\dfrac{OM}{ON} = \dfrac{r_A}{r_C}$.

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2011). Orthocenter of inscribed quadrilateral, *Mathematics Plus*, *4*, 63-69. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2011). Ортоцентър на вписан четириъгълник, *Математика плюс, 4,* 63 – 69.]

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2012). *Around the orthocenter in the plain and the space.* Sofia: Arhimedes 2000. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството.* София: *Архимед 2000.*]

Grozdev, S. & Nenkov, V. (2013). Several properties of the quadrilateral, determined by its circumscribed conics, *Mathematics Plus*, *1*, 57 – 66. [Гроздев, С. & В. Ненков. (2013). Няколко свойства на четириъгълника, определени от описаните му централни конични сечения, *Математика плюс, 1*, 57 – 66.]

Grozdev, S., Nenkov, V. & Haimov, H. (2013). Eight lines through a notable point of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, *4*, 63 – 65. [Гроздев, С., В. Ненков & Х. Хаимов. (2013). Осем линии през една забележителна точка за четириъгълник, *Математика плюс, 4,* 63 – 65.]

Nenkov, V. (2008). Four Euler circles through a point, *Mathematics Plus*, *2*, 60 – 61. [Ненков, В. (2008). Четири Ойлерови окръжности през една точка, *Математика плюс, 2*, 60 – 61.]

Nenkov, V. (2010). A set of the centers of conics inscribed in a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, *4*, 24 – 30. [Ненков, В. (2010). Множество на центровете на вписаните в четириъгълник конични сечения, *Математика и информатика, 4,* 24 – 30.]

Nenkov, V. (2011). A set of the centers of conics circumscribed for a quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, *4*, 15 – 20. [Ненков, В. (2011). Множество на центровете на описаните за четириъгълник конични сечения, *Математика и информатика, 4,* 15 – 20.]

Haimov, H. (1997). The epicenter – a notable point for the quadrilateral, *Mathematics*, *1*. [Хаимов, Х. (1997). Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, *Математика, 1.*]

Haimov, H. (1999). One more notable point in the quadrilateral, *Mathematics*, *6*. [Хаимов, Х. (1999). Още една забележителна точка в четириъгълника, *Математика, 6.*]

Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, *6*. [Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика, 6.*]

Haimov, H. (2005). Brocardian points of a quadrilateral, *Mathematics Plus, 5.* [Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълник, *Математика плюс, 5.*]

Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus, 2*, 28 – 50. [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс, 2, 28 – 50.*]

Georgieva, M. & Grozdev, S. (2016). *Morfodinamikata za razvitieto na noosfernia intelekt.* (4th ed.). Sofia: Publ. House "Iztok-Zapad". 327 pages [Георгиева М. Гроздев С. (2016). [*Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект.* (4-то изд.) София: Издателство „Изток – Запад".]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE, 295 pages.

Malcheski, R., Grozdev, S. & Anevska, K. (2015). *Geometry of complex number*, Sofia: Arhimedes 2000.

PSEUDOCENTER AND ORTHOCENTER – NOTABLE POINTS IN THE QUADRILATERAL

Abstract. The paper describes some properties of two notable points in the convex quadrilateral, which naturally generalize the circum-center and the orthocenter of the inscribed quadrilateral.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College – Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

Mr. Stanislav Stefanov, PhD student
Technical University – Sofia
1000 Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

Mr. Haim Haimov, Researcher
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna, Bulgaria