

НЯКОИ ГРУПИ ЛОГАРИТМИЧНИ УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩТА НА EXCEL

Диана Стефанова, Пламен Пенев

Резюме. Предложени са възможности за решаване на някои групи логаритмични уравнения с помощта на компютърната програма Excel. Целта е усъвършенстване на уменията и повишаване интереса на учениците в обучението им по математика в средното училище.

Keywords: problem solving, log equations, number, table, macros

В училищния курс по математика се изучават логаритмични уравнения. Да се реши едно произволно логаритмично уравнение, е трудна задача и дори в много случаи нерешима с елементарни средства. За целта сме обособили логаритмичните уравнения в групи и тук ще разгледаме само някои от тях. При решаването на логаритмични уравнения се използват: определението за логаритъм, теореми за логаритми, основните свойства на логаритмичната функция и т.н. Ще отбележим, че често се налага да се антилогаритмуват двете страни на едно логаритмично уравнение, в резултат на което решаването му се свежда до алгебрично уравнение. Известно е обаче, че при антилогаритмуване дефиниционната област се разширява. Оттук следва, че при решаването на логаритмични уравнения проверката става логически необходима. При решаването на тези уравнения ще включим възможностите на програмата Excel, т.е. ще покажем как тя се използва в обучението по математика. Разработката е направена така, че да се използва паралелно с традиционния начин на изучаване на логаритмични уравнения. Задачите, които са включени за илюстрация, имат една и съща формулировка: „Да се реши уравнението“, която ще изпускате, за да избегнем повторения. Ще отбележим, че групите от I до V наричаме „Основни логаритмични уравнения“. Останалите групи се свеждат до основните логаритмични уравнения след подходящи преобразувания.

I група. Уравнения от вида $\log_a f(x) = b$, където $a > 0, a \neq 1$, при $f(x) > 0$ то е еквивалентно на уравнението $y^b = y$

- Задачи:** 1. $\log_{\sqrt{3}\sqrt{3}} x = -5$; 2. $\log_7(2x^2 - 5x + 3) = 2$; 3. $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$;
 4. $\lg(2x - 5)^2 = 0$; 5. $1 - \lg 5 = \frac{1}{3}\left(\lg \frac{1}{2} + \lg x + \frac{1}{3}\lg 5\right)$; 6. $\log_2 \log_3 x = 1$;
 7. $\log_8(x^2 - 80)^2 = 4$.

Решение: нека определим допустимите стойности на уравнението $1 - \lg 5 = \frac{1}{3}\left(\lg - + \lg x + - \lg 5\right)$ от задача 5, т.е. Д. С. $x > 0$. Като използваме, че $1 - \lg 5 = \lg 2$ и $\lg \frac{1}{2} = -\lg 2$, то изходното уравнение е еквивалентно на уравнението $4\lg 2 - \frac{1}{3}\lg 5 = \lg x$, т.е. $\lg \frac{16}{\sqrt[3]{5}} = \lg x$, откъдето получаваме, че $x = \frac{16}{\sqrt[3]{5}}$ е единствен корен на уравнението.

Решение: като използваме определението за понятието логаритъм в уравнението $\log_8(x^2 - 80)^2 = 4$ от задача 7, получаваме $(x^2 - 80)^2 = 8^4$. След което преобразуваме до вида $(x^2 - 80 - 64)(x^2 - 80 + 64) = 0$ и намираме корените $x_{1/2} = \pm 12$, $x_{3/4} = \pm 4$.

Решение с Excel:

	B2		f_x	log((x*x-80)^2;8)-4				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	Знак	q	p	p/q	От -N до N	Бр.корени
2	-13	0,317156		1	-4	-4,0000	30	4
3	-12	0,000000		1	-12	-12		
4	-11	-0,428299		1	4	4		
5	-5	-0,145760		1	12	12		
6	-4	0,000000						
7	-3	0,099831						
8	3	0,099831						
9	4	0,000000						
10	5	-0,145760						
11	11	-0,428299						
12	12	0,000000						
13	13	0,317156						

Забележка: ако решаваме по следния начин: $2\log_8(x^2 - 80) = 4$ (1), след това и $\log_8(x^2 - 80) = 2$, откъдето получаваме $x^2 - 80 = 8^2$, намираме само два корена $x_{1/2} = \pm 12$. Грешката при това решаване се дължи на неправилното използване на равенството $\log_a b^2 = 2\log_a b$, което е вярно само при $b > 0$. В резултат множеството от допустими стойности се

стеснява и някои корени моогат да се изгубят. Даденото уравнение има Д. С. $x \in (-\infty; -4\sqrt{5}) \cup (-4\sqrt{5}; 4\sqrt{5}) \cup (4\sqrt{5}; +\infty)$.

Уравнението (1) има Д. С. $x \in (-\infty; -4\sqrt{5}) \cup (4\sqrt{5}; +\infty)$.

Правилното решение е $2 \log_8 |x^2 - 80| = 4$ или $\log_8 |x^2 - 80| = 2$, след което и $|x^2 - 80| = 8^2$ и т.н.

II група. А) Уравнения от вида $\log_x a = b$, $a > 0$.

Съгласно определението за понятието логаритъм:

а) при $a \neq 1$ и $b \neq 0$ има единствено решение $x = a^{\frac{1}{b}}$, например $\log_x \left(\frac{\sqrt[3]{25}}{3} \right) = -\frac{3}{5}$;

б) при $a = 1$ и $b = 0$ има за решение всяко положително, различно от единица, число, например $\log_x 1 = 0$;

в) при $a \neq 1$ и $b = 0$ няма решение, например $\log_x 1 = 2$;

г) при $a = 1$ и $b = 0$ няма решение, например $\log_x (7 - 3\sqrt{3}) = 0$.

Б) Уравнения от вида $\log_{f(x)} a = b$, $a > 0$.

Има решение при такива a и b , за които $[f(x)]^b = a$, $f(x) > 0$ и $f(x) \neq 1$.

Задачи: 1. $\log_{x^3-19} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}$; 2. $\log_{\frac{3}{1-|x|}} 1 = 0$; 3. $\log_{x-1} 3 = 2$;

4. $\log_{\log_3 x} 3 = 2$.

Решение: определяме допустимите стойности на уравнението $\log_{\log_3 x} 3 = 2$

от задача 4 със системата $\begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x \neq 1 \end{cases}$.

Тогава изходното уравнение е еквивалентно на системата $\begin{cases} \log_3 x > 0 \\ \log_3 x \neq 1 \\ \log_3 x = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$,

откъдето намираме, че $x = 3^{\sqrt{3}}$. Числото $3^{\sqrt{3}}$ е единственият корен на изходното уравнение.

III група. Уравнения от вида $\log_{f(x)} u(\) = \ .$

За решаването им използваме отново определението на понятието

логаритъм. Уравнението е еквивалентно на системата $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 0 \\ [f(x)]^b = g(x) \end{cases}$

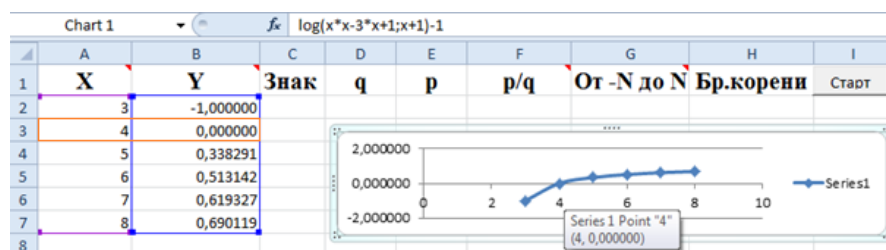
- Задачи:** 1. $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$; 2. $\log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 = 4$;
3. $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$.

Решение: уравнението $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 1) = 1$ от задача 3 е еквивалентно на

$$\text{системата } \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \neq 1 \\ x^2 - 3x + 1 = x+1 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Следователно единствен корен на уравнението се явява числото 4.

Решение с Excel:



IV група. А) Уравнения от вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0, a \neq 1$.

Такова уравнение може да се замени с еквивалентна на него система по два начина:

$$\text{I начин } \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или II начин } \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

Изборът на една от двете системи се определя от това кое от неравенствата $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$ се решава по-лесно.

Задачи: 1. $\log_2(x^2 - 3) = \log_2(3x - 5)$; 2. $\log_7(x^2 - 9x + 19) = \log_7(x - 5)$;

3. $\lg(2x^2 - 5x + 2) = \lg(x^2 - 3x + 2)$; 4. $\log_5(x - 1) = \log_5 \frac{x}{x+1}$;

5. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2x-1} - \log_{\frac{1}{3}}(x-2) = 0$; 6. $\frac{1}{2} \log_6(x^2 - 2x + 1) = 1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7}$.

Решение: определяме допустимите стойности на x в уравнението $\frac{1}{2} \log_6(x^2 - 2x + 1) = 1 + \log_6 \frac{x+3}{x+7}$ от задача 6 и получаваме, че $x \in (-\infty; -7) \cup (-3; 1) \cup (1; +\infty)$. За тези стойности даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $6 \cdot \frac{x+3}{x+7} = |x-1|$. Когато $x \in (-\infty; -7) \cup (-3; 1)$,

получаваме, че $x-1 < 0$ и решаваме уравнението $6 \cdot \frac{x+3}{x+7} = 1-x$, чиито корени са $x_1 = -11$ и $x_2 = -1$. Получените две числа -11 и -1 принадлежат на интервала $x \in (-\infty; -7) \cup (-3; 1)$, следователно са корени на даденото уравнение. Когато $x \in (1; +\infty)$, получаваме, че $x-1 > 0$ и решаваме уравнението $6 \cdot \frac{x+3}{x+7} = x-1$, чиито корени са $x_1 = -5$ и $x_2 = 5$. Но от тях само 5 е по-голямо от 1 . Даденото логаритмично уравнение има три корена: $-11, -1$ и 5 .

Тук трябва да подчертаем, че уравнението $f(x) = g(x)$ е следствие от уравнението $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ при $a > 0, a \neq 1$, тъй като антилогаритмуването може да доведе до разширяване на множеството от допустими стойности на неизвестното, а оттам и до поява на чужди корени.

Б) Уравнения от вида $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$.

Отново можем да използваме еквивалентна система по три начина:

$$\begin{array}{l|l|l} \text{I начин} & \left. \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} & \begin{array}{l} \text{или II начин} \\ \left. \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \end{array} \end{array}$$

III начин: при тези уравнения не е необходимо да решаваме непременно неравенствата на една такава система.

Можем да решим уравнението и ако то има решения, да проверим дали те удовлетворяват неравенствата.

И отново изборът на една от двете системи се определя от това кое от неравенствата $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$ се решава по-лесно.

Задачи: 1. $\log_{x^2-4}(x^3+x) = \log_{x^2-4}(4x^2-6)$; 2. $\log_{x^2-1}(x^3+6) = \log_{x^2-1}(4x^2-x)$;

3. $\log_{\sqrt{37-x}}(2x-10) = \log_{\sqrt{37-x}}(7\sqrt{-2}-2)$.

Решение: след антилогаритмуване на двете страни на уравнението $\log_{\sqrt{37-x}}(2x-10) = \log_{\sqrt{37-x}}(7\sqrt{-2}-2)$ от задача 3 се получава ирационалното уравнение $2x-10 = 7\sqrt{x-2}-2x$. При него полагаме $\sqrt{x-2} = y, y \geq 0$. Решаваме уравнението $4y^2-7y-2=0$, получаваме $y_1 = 2$ и $y_2 = -\frac{1}{4}$, като $-\frac{1}{4} < 0$, тогава само $y_1 = 2$ е решение. Когато $y = 2$, получаваме, че $x = 6$. Тъй като числото 6 удовлетворява неравенствата $\sqrt{37-x} > 0$, $\sqrt{37-x} \neq 1$ и $2x-10 > 0$, следователно то е решение на даденото уравнение.

Решение с Excel:

	B2		f _x	log(2*x-10;sqrt(37)-x)-log(7*sqrt(x-2)-2*x;sqrt(37)-x)					
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	X	Y	Знак	q	p	p/q	От -N до N	Бр.корени	Старт
2	1	#NUM!	#NUM!	1	6	6,0000	30	1	
3	2	#NUM!	#NUM!						
4	3	#NUM!	#NUM!						
5	4	#NUM!	#NUM!						
6	5	#NUM!	#NUM!						
7	6	0,000000	000000						
8	7	#NUM!	#NUM!						
9	8	#NUM!	#NUM!						

Често при решаване на логаритмични уравнения използваме свойството: два логаритъма на едно положително число (при положителни и различни от единица основи) са равни тогава и само тогава, когато основите са равни. Въз основа на това свойство определяме следващата група с нейните два варианта за решаване.

V група. А) Уравнения от вида $\log_{f(x)} a = \log_{g(x)} a$, $a > 0$.

Може да използваме еквивалентна система по два начина:

$$\text{I начин} \left\{ \begin{array}{l} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right. \quad \text{или II начин} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x). \end{array} \right.$$

Задачи: 1. $\log_{x^2-3x-5} 9 = \log_{2x-1} 9$; 2. $\log_{\frac{5+x}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{x+1}} 3$.

Б) Уравнения от вида $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$.

Такова уравнение е еквивалентно е на една от системите $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \\ f(x) = g(x) \end{array} \right.$ или $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \\ f(x) = g \end{array} \right.$

. И отново изборът на една от системите се определя от това кое от

неравенствата $f(x) > 0$ или $g(x) > 0$ се решава по-лесно.

Задачи: 1. $\log_{-x^3+12x} (x^2-9) = \log_{-x+12} (x^2-9)$; 2. $\log_{x^3+x} (x^2-4) = \log_{4x^2-6} (x^2-4)$.

Решение: уравнението $\log_{x^3+x} (x^2-4) = \log_{4x^2-6} (x^2-4)$ от задача 2

$$\text{равносилно на системата: } \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^3 + x > 0 \\ x^3 + x \neq 1 \\ x^3 + x = 4x^2 - 6 \end{cases} . \text{ От получената система решаваме}$$

уравнението $x^3 + x = 4x^2 - 6$ и намираме, че то има три корена $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$. След като направим проверка, установяваме, че само числото 3 удовлетворява всички условия на системата. Следователно даденото уравнение има само един корен – числото 3.

VI група. А) Уравнение от вида $f(\log_x A) = 0$, $A > 0$ е еквивалентно на съвкупностите от уравнения $\log_x A = t_1$, $\log_x A = t_2, \dots, \log_x A = t_n$, където $t_1, t_2, \dots, t_n$ са всички корени на $f(t) = 0$.

Задачи: 1. $2(\log_x \sqrt{5})^2 - 3\log_x \sqrt{5} + 1 = 0$; 2. $\log_x^2 6 - 3\log_x^2 6 - 10\log_x 6 = 0$;

Б) Уравнение от вида $f(\log_a x) = 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ е еквивалентно на съвкупностите от уравнения $\log_a x = t_1$, $\log_a x = t_2, \dots, \log_a x = t_n$, където $t_1, t_2, \dots, t_n$ са всички корени на $f(t) = 0$.

Задачи: 1. $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$; 2. $\log_x^2 6 - 3\log_x^2 6 - 10\log_x 6 = 0$;

$$3. \frac{1 - \log_3(x-1)}{1 - \log_3^2(x-1)} + \frac{1}{1 - \log_3(x-1)} = 1.$$

VII група. Уравнение от вида $\log_{\alpha(x)}(\log_{\beta(x)} f(x)) = 0$ е еквивалентно на

$$\text{системата } \begin{cases} \alpha(x) > 0 \\ \alpha(x) \neq 1 \\ \log_{\beta(x)} f(x) = 1 \end{cases} , \text{ която, на свой ред, е еквивалентна на системата}$$

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0 \\ \alpha(x) \neq 1 \\ \beta(x) > 0 \\ \beta(x) \neq 1 \\ f(x) = \beta(x) \end{cases} .$$

Задачи: 1. $\log_{x^2-6x+8} [\log_{2x^2-2x-8} (x^2 + 5x)] = 0$;

$$2. \log_{x^2+6x+8} [\log_{2x^2+2x+3} (x^2 - 2x)] = 0.$$

Решение: уравнението $\log_{x^2+6x+8} [\log_{2x^2+2x+3} (x^2 - 2x)] = 0$ от задача 2 е

$$\text{еквивалентно на системата } \begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ x^2 + 6x + 8 \neq 1 \\ \log_{2x^2+2x+3} (x^2 - 2x) = 1 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ x^2 + 6x + 8 \neq 1 \\ 2x^2 + 2x + 3 > 0 \\ 2x^2 + 2x + 3 \neq 1 \\ 2x^2 + 2x + 3 = x^2 - 2x \end{cases}.$$

Като решим уравнението от системата, намираме, че $x_1 = -1$ и $x_2 = -3$. Числото -3 не удовлетворява неравенството $x^2 + 6x + 8 > 0$. Числото -1 удовлетворява всички неравенства от системата. Следователно изходното уравнение има единствен корен $x = -1$.

Решение с Excel:

	B2		f _x	log(log(x*x-2*x;2*x*x+2*x+3);x*x+6*x+8)				
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	Знак	q	p	p/q	От -N до N	Бр.корени
2	-5	-0,051233	-----	1	-1	-1,0000	30	1
3	-4	#NUM!	#NUM!					
4	-3	#NUM!	#NUM!					
5	-2	#NUM!	#NUM!					
6	-1	0,000000	000000					
7	0	#NUM!	#NUM!					
8	1	#NUM!	#NUM!					
9	2	#NUM!	#NUM!					
10	3	-0,309003	-----					

VIII група. А) Уравнение от вида

$2n \log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in N$ е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f^{2n}(x) = g(x) \end{cases}, \text{ например } 2 \lg(4x - 5) = \lg 2x.$$

Б) Уравнение от вида $(2n + 1) \log_a \alpha(x) = \log_a \beta(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$, $n \in N$

е еквивалентно на уравнението $\log_a (\alpha(x))^{(2n+1)} = \log_a \beta(x)$, което е екви-

валентно на системата $\begin{cases} \beta(x) > 0 \\ \alpha^{2n+1}(x) = \beta(x) \end{cases}$, например $3 \lg(2x - 1) = \lg(8 - 10x - 12x^2)$.

В) Уравнение от вида $\frac{1}{2} \log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ е еквивалентно

на уравнението $\log_a f(x) = 2 \log_a g(x)$, което е еквивалентно на системата

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}, \text{ например } \frac{1}{2} \lg(x+1) = \lg x.$$

IX група. А) Уравнение от вида $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a m(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$

е еквивалентно на системата $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \log_a f(x) \cdot g(x) = \log_a m(x) \end{cases}$, която е еквивалент-

на на системата $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) \cdot g(x) = m(x) \end{cases}$.

Задачи: 1. $\log_3(x-2) + \log_3 x = \log_3 8$; 2. $\lg(x-9) + 2 \lg \sqrt{2x-1} = 2$;

3. $\frac{1}{2} \log_5(x+5) + \log_5 \sqrt{x-3} = \frac{1}{2} \log_5(2x+1)$.

Б) Уравнение от вида $\log_a \alpha(x) - \log_a \beta(x) = \log_a f(x) - \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ е еквивалентно на уравнението $\log_a \alpha(x) + \log_a g(x) = \log_a f(x) + \log_a \beta(x)$,

което е еквивалентно на системата $\begin{cases} \alpha(x) > 0 \\ \beta(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \log_a \alpha(x) \cdot g(x) = \log_a f(x) \cdot \beta(x) \end{cases}$, т.е

$$\begin{cases} \alpha(x) > 0 \\ \beta(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ \alpha(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \beta(x) \end{cases}.$$

Задачи: 1. $\log_7(x-2) - \log_7(x+2) = 1 - \log_7(2x-7)$;

2. $2 \lg(x + \frac{1}{2}) - \lg(x-1) = \lg(x + \frac{5}{2}) - \lg \frac{1}{2}$; 3. $\log_9(x+1) - \log_9(1-x) = \log_9(2x+3)$.

X група. Уравнения, за решаването на които се използват свойства на логаритмите.

А) Използване на свойството $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$ или неговия частен случай $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Задачи: 1. $\log_{\sqrt{2}}^2 x + 3 \log_2 x + \log_1 x = 2$; 2. $\log_5^2 x + 3 \log_{5x} \frac{5}{x} = 1$;

3. $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \frac{1}{2} \log_{4x} \sqrt{x} = 0$.

Решение: в уравнението $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \frac{1}{2} \log_{4x} \sqrt{x} = 0$ от задача 3 определяме допустимите стойности, а те са $x > 0$, $x \neq \frac{1}{16}$, $x \neq \frac{1}{4}$, $x \neq 2$. При допустимите стойности изходното уравнение е еквивалентно на $2 \log_{\frac{x}{2}} x - 42 \log_{16x} x + 20 \frac{1}{2} \log_{4x} x = 0$, което има корен $x_1 = 1$. Числото 1 принадлежи на множеството на допустимите стойности, следователно е корен на изходното уравнение. Използваме свойствата от този случай и преобразуваме уравнението до вида

$$\frac{1}{\log_x \frac{x}{2}} - \frac{21}{\log_x 16x} + \frac{10}{\log_x 4x} = 0, \text{ а след това до } \frac{1}{1 - \log_x 2} - \frac{21}{1 + 4 \log_x 2} + \frac{10}{1 + 2 \log_x 2} = 0. \text{ Полагаме } t = \log_x 2 \text{ и получаваме}$$

дробното уравнение $\frac{1}{1-t} - \frac{21}{1+4t} + \frac{10}{1+2t} = 0$ с корени $t_1 = -2$ и $t_2 = \frac{1}{2}$. Следователно $\log_x 2 = -2$ и $\log_x 2 = \frac{1}{2}$, откъдето намираме, че $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_2 = 4$.

Получаваме, че числата $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, 4 са корени на изходното уравнение.

Б) Използване на свойството $a^{\log_a b} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, например $x^{\log_x (x+3)^2} = 16$.

В) Използване на свойството $f^{\log_a g} = g^{\log_a f}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $f > 0$, $g > 0$.

Задачи: 1. $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$; 2. $3^{2+\log_2^2 x} = x^{3 \log_2 3}$.

Решение: нека $x > 0$ са допустими стойности на уравнението $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$ от задача 1. Като използваме, че $x^{\log_5 2} = 2^{\log_5 x}$, получаваме,

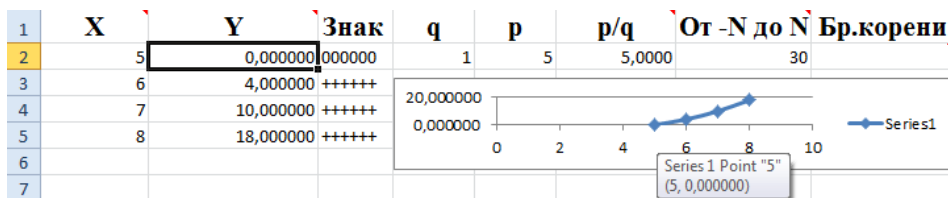
че изходното уравнение е еквивалентно на уравнението $3 \cdot 2^{\log_5 x} + 2^{\log_5 x} = 64$. Оттук $2^{\log_5 x} = 16$, т.е. $\log_5 x = 4$, което има корен $x = 625$.

XI група. Показателно-логаритмични уравнения. Това са уравнения, които можем да разглеждаме като показателни и като логаритмични. Например: $x^{\log_a x} = A$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$. При този вид уравнения двете страни се логаритмуват при подходящо избрана основа и се получава логаритмично уравнение, което най-често се решава с полагане. Но за целта трябва да осигурим тези изрази да са положителни. Основата, при която ще логаритмуваме, може да бъде произволно положително число, различно от единица. Но най-често изборът се прави измежду основите на участващите в даденото уравнение логаритми.

Задачи: 1. $(x-3)^{\log_{x-3}(x^2-7x+13)} = 3$; 2. $x^{2\lg x} = 10x$; 3. $x^{\frac{\lg x+5}{3}} = 10^{\lg x+1}$; 4. $x^{\log_2 4x} = 4x$.

Решение: ако в уравнението $(x-3)^{\log_{x-3}(x^2-7x+13)} = 3$ от задача 1 приложим формално $a^{\log_a b} = b$, без да обърнем внимание на ограниченията $x-3 > 0$ и $x-3 \neq 1$, получаваме уравнението $x^2 - 7x + 13 = 3$ с корени $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$ от които $x_1 = 2$ не е решение на даденото уравнение. Следователно изходното уравнение има единствен корен $x = 5$

Решение с Excel:



XII група. Уравнения, които се решават с използване свойството монотонност на функции и построяване графика на функция.

Задачи: 1. $\log_3 x = 4 - x$; 2. $\log_5(x+3) = 3 - x$; 3. $\log_2(3^x - 7) = 5 - x$; 4. $\lg x = x^2$.

Решение: в уравнението $\log_5(x+3) = 3 - x$ от задача 2 определяме допустимите стойности и получаваме, че Д.С.: $x > -3$. Лесно се проверява, че $x = 2$ е корен на даденото уравнение. Други корени то няма, защото функцията $y_1 = \log_5(x+3)$ е растяща за всяко δ , което принадлежи на допустимите стойности, а функцията $y_2 = 3 - x$ е намаляваща.

XIII група. Логаритмични уравнения, които се решават с две величини.

А) Логаритмични уравнения с две променливи.

Задачи: 1. $(x+1)\log_2^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$; 2. $3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x$;
3. $\log_2^2 x + 2x = 6 + (1-x)\log_2 x$.

Решение: в уравнението $\log_2^2 x + 2x = 6 + (1-x)\log_2 x$ от задача 3 определяме допустимите стойности и получаваме, че Д.С.: $x > 0$. Полагаме $\log_2 x = y$ и получаваме уравнение с две променливи $y^2 + (x-1)y + 2x - 6 = 0$, което решаваме относно y . Намираме, че $y_1 = -2$ и $y_2 = 3 - x$, след което решаваме и уравненията $\log_2 x = -2$ и $\log_2 x = 3 - x$. От уравнението $\log_2 x = -2$ получаваме, че $x = 0,25$. От уравнението $\log_2 x = 3 - x$ получаваме, че $x \cdot 2^x = 2^3$ (1). Уравнението (1) има Д.С.: $x > 0$. Очевидно уравнението (1) има решение $x = 2$. Ще докажем, че то е единствено. При $x > 0$ функцията $y = x \cdot 2^x$ е монотонно растяща и следователно графиките на функциите $y = x \cdot 2^x$ и $y_2 = 2^3$ имат само една пресечна точка, която очевидно е с абсциса $x = 2$. Следователно уравнението (1) има единствено решение $x = 2$. Тогава изходното уравнение има корени числата 0,25 и 2.

Решение с Excel:

B2		fx log(x;2)^2+2*x-6-(1-x)*log(x;2)						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	Знак	q	p	p/q	От -N до N	Бр.корени
2	0,25	0,000000	000000	4	1	0,2500	30	2
3	2	0,000000	000000	1	2	2		
4	3	5,682031	+++++					
5	4	12,000000	+++++					

Б) Параметрични логаритмични уравнения.

Задачи:

1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $(2 + \log_2 a)x^2 + (6 \log_2 a)x + 4 \log_2 a + 1 = 0$ има един корен.

Решение: множеството от допустимите стойности на уравнението са: Д.С.: $a > 0$.

Квадратното уравнение ще има един корен, ако става линейно, т.е. ако коефициентът пред втората степен на x е равен на нула, или ако дискриминантата е равна на нула.

Нека $2 + \log_2 a = 0$, тогава $a = \frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4} > 0$. Намираме дискриминантата на даденото уравнение, т.е. $D = 9 \log_2 a - (2 + \log_2 a) \cdot (4 \log_2 a + 1)$, преобразуваме я до вида $D = 5(\log_2 a)^2 - 9 \log_2 a - 2$. Полагаме $\log_2 a = y$ и решаваме квадратното уравнение $5y^2 - 9y - 2 = 0$. Числата $-\frac{1}{5}$ и 2 са негови корени.

При $y = -\frac{1}{5}$ получаваме $a = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$. При $y = 2$ получаваме $a = 4$. Даденото уравнение има един корен при $a = \frac{1}{4}$, $a = 4$ и $a = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.

2. Да се реши уравнението $\log_x a + \log_a x = \log_{\sqrt{x}} a + \log_a \sqrt{x} + \frac{1}{2}$, ако a е реален параметър.

Решение: определяме допустимите стойности и получаваме, че Д. С._x: $x > 0, x \neq 1$ и Д. С._a: $a > 0, a \neq 1$.

Преобразуваме уравнението до вида: $\frac{1}{\log_a x} + \log_a x = \frac{2}{\log_a x} + 0,5 \log_a x + \frac{1}{2}$.

Полагаме $\log_a x = y$ и получаваме дробното уравнение $\frac{1}{y} + y = \frac{2}{y} + y + \frac{1}{2}$, $y \neq 0$, с корени $y_1 = 2$ и $y_2 = -1$. След което решаваме $\log_a x = 2$ и $\log_a x = -1$. От уравнението $\log_a x = 2$ получаваме, че $x_1 = a^2$, а от уравнението $\log_a x = -1$ получаваме, че $x_2 = \frac{1}{a}$. Тъй като и двата корена принадлежат на множеството на допустимите стойности, то те са решения на уравнението.

3. Да се реши уравнението

$$(1 + (a + 2)^2) \log_3(2x - x^2) + (1 + (3a - 1)^2) \log_{11}(1 - \frac{x}{2}) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}(1 - \frac{x}{2}).$$

ако a е реален параметър.

Решение: за даденото уравнение допустимите стойности се определят от

$$\text{системата } \begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ 1 - \frac{x}{2} > 0 \end{cases} \text{ и получаваме, че Д. С. } x \in (0; \sqrt{2}).$$

Разглеждаме $2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2 \leq 1$ и $1 - \frac{x^2}{2} \leq 1$, следователно

$$\log_3(2x - x^2) \leq 0 \text{ и } \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2}) \leq 0.$$

При $a \neq -2$ и $a \neq \frac{1}{3}$ имаме $(1 + (a + 2)^2) \log_3(2x - x^2) \leq \log_3(2x - x^2)$ и $(1 + (3a - 1)^2) \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2}) \leq \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2})$. Разглеждаме последните две неравенства и сравняваме получените резултати с изходното уравнение. Получаваме, че са възможни решения, удовлетворяващи системата

$$\left| \begin{array}{l} \log_3(2x - x^2) = 0 \\ \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2}) = 0 \end{array} \right. , \text{ т.е. системата } \left| \begin{array}{l} 2x - x^2 = 1 \\ 1 - \frac{x^2}{2} = 1 \end{array} \right. , \text{ която, от своя страна, няма реше-}$$

ния. Следователно при $a \neq -2$ и $a \neq \frac{1}{3}$ даденото уравнение няма корени.

При $a = -2$ изходното уравнение приема вида

$$\log_3(2x - x^2) + 50 \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2}) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2})$$

и когато вземем предвид, че $x \in (0; \sqrt{2})$, то е еквивалентно на уравнението $\log_{11}(1 - \frac{x^2}{2}) = 0$, което няма корени.

При $a = \frac{1}{3}$ изходното уравнение приема вида

$$\frac{58}{9} \log_3(2x - x^2) + \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2}) = \log_3(2x - x^2) + \log_{11}(1 - \frac{x^2}{2})$$

и когато вземем предвид, че $x \in (0; \sqrt{2})$, то е еквивалентно на уравнението $\log_3(2x - x^2) = 0$, което има единствен корен $x = 1$. Следователно при $a = \frac{1}{3}$ изходното уравнение има единствен корен $x = 1$, а при $a \neq \frac{1}{3}$, то няма корени.

В заключение можем да отбележим, че решаването на логаритмични уравнения трябва да става съзнателно, а не механично, и да се обръща внимание на прехода, където е възможно да загубим или да придобием чужди корени. Ако в хода на преобразуванията се появят чужди корени, то е необходимо да се направи проверка. От разработката се вижда, че програмата Excel е приложена само при задачи, когато решенията са реални числа. Въпреки това използването на програмата Excel при решаване на логаритмични уравнения дава възможност за: демонстрация на техники за автоматизиране на процеса на решаване на логаритмични уравнения; активизиране дейността на учениците; повишаване на интереса към математиката и ориентиране в спецификата на логаритмичните уравнения; даване на насоки за търсене на алгебрични решения и проверка на получените резултати; разнообразяване на работата в клас.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Borodulja, I. (1968) *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie.
- Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka.
- Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta.
- Paskalev, G. & Z. Paskaleva (2001). *Mathematics for 11-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Archimedes.
- Paskalev, G. et al. (20012). *General revision from the secondary school* (in Bulgarian). Sofia: Archimedes 2.
- Penev, P. & D. Stefanova (2015). *Individual problem solving by Excel* (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 58, 2, 149 – 156.
- Rangelova, P. (2006). *Collection of mathematical problems for 9. – 12. grades with methodological instructions* (in Bulgarian). Plovdiv: Makros.
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). One more idea for solving trigonometric equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182.
- Stefanova, D. & P. Penev (2016). Excel helps in solving some exponential equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 5.
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

GROUPS OF LOGARITHMIC EQUATIONS BY THE HELP OF EXCEL

Abstract. The paper proposes possibilities to solve some groups of logarithmic equations by the help of the computer program Excel. The goal is to improve the capacities and to increase the interest of students studying mathematics in the secondary school.

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Teacher in Mathematics
Asenovgrad, Bulgaria
E-mail: dianastefan@abv.bg

Mr. Plamen Penev
Teacher in Informatics
Shumen, Bulgaria
E-mail: plampenev@abv.bg