Educational Technologies
Образователни технологии

НЯКОИ НОВИ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СРЕДНИТЕ АРИТМЕТИЧНО, ГЕОМЕТРИЧНО, ХАРМОНИЧНО И КВАДРАТИЧНО

Тодор Митев
Русенски университет „Ангел Кънчев“

Резюме. Нека A_n, H_n, S_n са съответно аритметичното, хармоничното и квадратичното средни за положителните реални числа $a_1, a_2, ..., a_n$. В тази статия са доказани следните теореми:

Теорема 1. За $n = 3$ е изпълнено

$$A_n \geq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ и } A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Теорема 2. За $n = 4$ е изпълнено

$$A_n \geq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ и } A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теорема 3. За $n = 5$ е изпълнено $A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Предложени са и няколко нерешени задачи.

Keywords: ineaquality, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, quadratic mean

Въведение. Нека a_1, a_2,...a_n са положителни реални числа и както е прието, означаваме:

$$M_p = \begin{cases} \min\{a_i\} & i = 1,2,...,n \quad p = -\infty \\ \max\{a_i\} & i = 1,2,...,n \quad p = +\infty \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} & p = 0 \\ \left(\frac{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} & p \neq \pm\infty,\ p \neq 0 \end{cases}$$

Означаваме съответно още:

$$M_0 = \sqrt[n]{a_1.a_2...a_n} = G_n, \quad M_1 = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = A_n \quad , \quad M_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = H_n,$$

$$M_2 = (\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n})^{\frac{1}{2}} = S_n.$$

Добре е известно, че M_p е растяща функция на p, т.е. $M_{p_1} \leq M_{p_2}$ за $p_1 < p_2$ (това е доказано например в (Hardy et al., 1952), като равенство се достига само когато $a_1 = a_2 = ... = a_n$. При горните означения следва, че $H_n \leq G_n \leq A_n \leq S_n$. В настоящата статия ще приложим метод , чрез който ще докажем следните теореми.

В случая, когато $n = 3$

Теорема 1.1 Неравенството $A_n \geq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Теорема 1.2 Неравенството $A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

В случая когато $n = 4$

Теорема 1.3 Неравенството $A_n \geq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Теорема 1.4 Неравенството $A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

В случая, когато $n = 5$

Теорема 1.5 Неравенството $A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Известни са много неравенства между класическите средни (за повече информация например Hardy et al., 1952; Niculesco, 2000; Sato, 2001; Mitev, 2003; Stolarsky, 1971), но неравенства от горния тип не са разглеждани. Доказателствата на горните теореми показват как могат да се доказват симетрични хомогенни неравенства между 3, 4, 5 произволни положителни числа. Прилагайки същия метод, ще покажем как могат да се доказват неравенства между основните метрични величини на произволен триъгълник.

Същност на метода и примери

Да разгледаме неравенството

(2.1) $\quad F(a,b,c) \geq (>)\ 0$,

където $F(a,b,c)$ е хомогенна симетрична функция на положителните реални променливи a,b,c. Освен това ще искаме F да може да се представя *явно* като функция на елементарните симетрични полиноми $\sigma_2 = ab+bc+ca = t, \quad \sigma_3 = abc = p$. Последното е възможно, например когато F е хомогенен симетричен полином. Метод за доказване на неравенство (2.1), когато F е симетричен хомогенен полином от трета степен, е предложен например от Stolarsky в (Stolarsky, 1971). Други методи за доказване на подобни неравенства на (2.1) са разгледани например в (Hardy et al., 1952), (Niculesco, 2000), (Sato, 2001), (Mitev, 2003), (Stolarsky, 1971), (Aliyev, 2007), (Barbara, 2008).

Тъй като F е хомогенна, можем да считаме, че $\sigma_1 = a+b+c = 1$. Означаваме $\sigma_2 = ab+bc+ca = t, \quad \sigma_3 = abc = p$. Тогава $F(a,b,c)$ може да се представи явно като функция на t и p, т.е. $F(a,b,c) = f(t,p)$. Нашият метод се основава на разглеждането на $f(t,p)$, като функция на t при фиксирано p. Следващите леми дават някои оценки за t и p, както и неравенства между тях (ще считаме, че поне две от променливите a,b,c не са равни).

Лема 2.1 Изпълнени са неравенствата

$$(2.2) \qquad 0 < p < \frac{1}{27}$$

$$(2.3) \qquad 0 < t < \frac{1}{3}.$$

Доказателство: (2.2) следва от $0 < abc < (\frac{a+b+c}{3})^3 = \frac{1}{27}$. (2.3) следва от $0 < t = ab+bc+ac < \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$.

Лема 2.2 Изпълнени са неравенствата

$$(2.4) \qquad t > \sqrt{3p},$$

$$(2.5) \qquad t < \frac{1+9p}{4}.$$

Доказателство: в известното неравенство $(x+y+z)^2 > 3(xy+yz+zx)$ (поне две от числата са различни) полагаме $x = ab, \quad y = bc, \quad z = ca$ и получаваме

$$t^2 = (ab+bc+ca)^2 > 3(ab^2c+bc^2a+ca^2b) = 3abc(a+b+c) = 3abc = 3p,$$

откъдето следва верността на (2.4). (2.5) е неравенството $ab+bc+ca < \frac{1}{4}+\frac{9}{4}abc$. То следва например от известното неравенство (Schur) $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0,$ от равенството $a+b+c=1$ и от тъждеството

$$(a+b+c)^3+9abc-4(ab+bc+ca) = a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)\cdot$$

Ще разгледаме няколко примера, при чието доказателство ще демонстрираме нашия метод.

Пример 1. Вярно е неравенството

(2.6) $\quad 2.A_3 \geq H_3 + S_3$.

Доказателство: съгласно горните означения получаваме, че

$$A_3 = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}, \quad H_3 = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+bc+ca} = \frac{3p}{t},$$

$$S_3 = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \sqrt{\frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)}{3}} = \sqrt{\frac{1-2t}{3}}.$$

Тогава (2.6) е еквивалентно на следното неравенство:

(2.7) $\quad 2.\frac{1}{3} \geq \frac{3p}{t} + \sqrt{\frac{1-2t}{3}}$

Лесно се вижда, че когато трите числа са равни, то в (2.6) се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Сега лесно се проверява, че (2.7) е еквивалентно на

(2.8) $\quad f(t) \geq 0$, където $f(t) = 6t^3 + t^2 - 36pt + 81p^2$.

Фиксираме p, $p \in (0;\frac{1}{27})$ и разглеждаме $f(t)$ като функция на t за $t \in (\sqrt{3p};\frac{1+9p}{4})$ (последното следва от Лема 2.2). От $f'(t) = 18t^2 + 2t - 9p$ и от (2.4) последователно получаваме $f'(t) > 18t^2 - 9p > 18.3p - 9p = 45p > 0$, т.е. $f'(t) > 0$ и следователно $f(t)$ е растяща функция $\Rightarrow$ достатъчно е да докажем, че

(2.9) $\quad f(\sqrt{3p}) \geq 0$, откъдето ще следва (2.8).

Но $f(\sqrt{3p}) = 18p\sqrt{3p} + 3p - 36p\sqrt{3p} + 81p^2 = 3p(3\sqrt{3p} - 1)^2 > 0$, т.е (2.9) е вярно. Следователно всичко е доказано.

Пример 2. Вярно е неравенството

(2.10) $\quad 3.A_3 \geq 2.G_3 + 1.S_3$

Доказателство: когато трите числа са равни, се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Както при доказателството на (2.6) получаваме, че

$$(2.10) \Leftrightarrow \quad 1 \geq 2.\sqrt[3]{p} + \sqrt{\frac{1-2t}{3}} \qquad (a+b+c=1, \quad abc = p, \quad ab+bc+ca = t)$$

$$\Leftrightarrow \quad t \geq 6.\sqrt[3]{p} - 6.\sqrt[3]{p^2} - 1.$$

За да докажем последното неравенство и оттам и (2.10), е достатъчно да проверим верността на следното $\sqrt{3p} \geq 6.\sqrt[3]{p} - 6.\sqrt[3]{p^2} - 1$ (използвахме (2.4)).

В това неравенство полагаме $p = q^6$, следователно $q \in (0; \frac{\sqrt{3}}{3})$ съгласно (2.2). Тогава лесно се проверява, че е еквивалентно на следното вярно неравенство $(\frac{\sqrt{3}}{3} - q)((6q + 3\sqrt{3})(\frac{1}{3} - q^2) + q) > 0$. Следователно (2.10) е доказано.

Следващият пример показва, че оценките в Лема 2.1 и Лема 2.2 невинаги са достатъчни при прилагане на метода.

Пример 3. За произволни положителни числа a, b, c е изпълнено неравенството

(2.11) $(a+b+c)^4 + 6abc(a+b+c) + 4(ab+bc+ca)^2 \ge (a+b+c)^2(ab+bc+ca)$

Доказателство: лесно се проверява, че за $a = b = c$ се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. (2.11) е хомогенно и затова можем да считаме, че $a+b+c=1$. Лесно се проверява, че (2.11) е еквивалентно на

(2.12) $f(t) \ge 0$, $\quad f(t) = 4t^2 - 5t + 1 + 6p$, $\quad t = ab + bc + ca$, $\quad p = abc$.

Отново фиксираме p, $\quad p \in (0; \frac{1}{27})$ и разглеждаме $f(t)$ като функция на t за $t \in (\sqrt{3p}; \frac{1+9p}{4})$. Но $f'(t) = 8t - 5 < 0$ съгласно (2.3). Следователно $f(t)$ е намаляваща функция и затова е достатъчно (но не е необходимо!) да докажем, че $(\frac{1\quad 9}{\qquad}) \ge 0$. Но последното неравенство не е вярно, защото $f(\frac{1+9p}{4}) = \frac{3p(27p-1)}{4}$ и $\quad p \in (0; \frac{1}{27})$. Последното следва от факта, че множеството от стойности на t не съвпада с интервала $(\sqrt{3p}; \frac{1+9p}{4})$. Ще се върнем към доказателството на (2.11) по-късно.

Следващата теорема се отнася за множеството от стойности на t.

Теорема 1. Нека p е фиксирано число от интервала $(0; \frac{1}{27})$. Тогава е изпълнено:

(i) Уравненията $2x^3 - x^2 + p = 0$ и $x^3 - 2x^2 + x - 4p = 0$ имат точно по два корена в интервала $(0;1)$, съответно x_1, x_2 и x_3, x_4, като при това са изпълнени неравенствата

2.13) $\quad 0 < x_3 < x_1 < \frac{1}{3} < x_2 < x_4 < 1$ и

(2.14) $\quad x_2 < \frac{1}{2}$

(ii) Нека a,b,c са положителни числа, поне две от които са различни, $a+b+c=1$, $abc=p$. Тогава множеството от стойности на $t=ab+bc+ca$ съвпада с интервала $[m;M]$, където

(2.15) $m=\min\{g(x_1\}, h(x_4)\}$

(2.16) $M=\max\{g(x_2), h(x_3)\}$

$g(x)=2x-3x^2$, $h(x)=\frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в (i).

(iii) Изпълнени са неравенствата

(2.17) $m>\sqrt{3p}$ и

(2.18) $M<\frac{1+9p}{4}$.

Освен това, когато

(2.19) $t=m=2x_1-3x_1^2$, то $p=x_1{}^2-2x_1^3$. Ако $t=M=2x_2-3x_2^2$, то $p=x_2{}^2-2x_2^3$

(2.20) $t=m=\frac{1}{4}(1+2x_4-3x_4^2)$, то $p=\frac{1}{4}(x_4^3-2x_4^2+x_4)$. Ако $t=M=\frac{1}{4}(1+2x_3-3x_3^2)$, то $p=\frac{1}{4}(x_3^3-2x_3^2+x_3)$, x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в (i), m, M са определени в (ii).

(iv)

(2.21) Когато са изпълнени (2.19) или (2.20), точно две от числата a,b,c са равни помежду си.

(Доказателството на теоремата е в края на статията.)

Продължение на доказателството на (2.11).

Разглеждаме $f(t)$ за $t\in[m;M]$ (m,M са определени в теорема 1). Тогава е достатъчно да докажем, че $f(M)\geq 0$. Съгласно (2.13), (2.14), (2.19), (2.20) разглеждаме два случая:

(i) $t=M=2x-3x^2$, $p=x^2-2x^3$, $x\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, $x=x_2$. Тогава

(2.22) $\Leftrightarrow 4(2x-3x^2)^2-5(2x-3x^2)+1+6(x^2-2x^3)\geq 0$
$\Leftrightarrow (3x-1)^2(2x-1)^2\geq 0$

Последното неравенство е строго, защото $x\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$.

(ii) $t=M=\frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$
$p=\frac{1}{4}(x^3-2x^2+x)$, $x\in(0;\frac{1}{3})$, $x=x_3$. Тогава (2.22)

$$\Leftrightarrow 4\left(\frac{1+3x-3x^2}{4}\right)^2-5\left(\frac{1+2x-3x^2}{4}\right)+1+6\left(\frac{x^3-2x^2+x}{4}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9x^4-6x^3+x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2(3x-1)^2\geq 0 .$$

Последното неравенство е строго, защото $x\in(0;\frac{1}{3})$. Следователно (2.11) е доказано.

Заб. (2.11) е еквивалентно на (част от problem 2839 от (Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem, 2004)) $(a^3+b^3+c^3)^2+3(abc)^2\geq 4(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$, защото съответната функция е $f(t)=(1-t)(4t^2-5t+1+6p)$.

Заб. От доказателствата на *примери 1 – 3* се вижда, че равенство се достига само при $a=b=c$.

3. Основни резултати

Припомняме, че сме въвели следните означения:

$M_0=\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}=G_n$, $M_1=\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A_n$, $M_{-1}=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=H_n$,

$M_2=\left(\dfrac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=S_n$.

Теорема 1.1. Неравенството

(3.1) $A_3\geq(1-\lambda)H_3+\lambda S_3$ е вярно $\Leftrightarrow$ $\lambda\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Доказателство: Нека $\dfrac{a+b+c}{3}\geq(1-\lambda)\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\lambda\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ е изпълнено за произволни положителни числа a,b,c където λ е фиксирано. Полагаме $a=1-2\varepsilon$, $b=c=\varepsilon$ в последното неравенство. При $\varepsilon\to+0$ получаваме, че $\lambda\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Следователно е достатъчно да докажем следното неравенство

(3.2) $$\frac{a+b+c}{3}\geq\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} .$$

При $\grave{u} = \ =$ се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Можем да считаме, че $a+b+c=1$. Тогава при означенията $ab+bc+ca=t$, $abc=p$ получаваме

(3.2) $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{3} \geq \frac{3-\sqrt{3}}{3}.\frac{3p}{t}+\frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{\frac{1-2t}{3}}$ $\Leftrightarrow$ $t-3(3-\sqrt{3})p \geq t\sqrt{1-2t}$.

$\Leftrightarrow$

(3.3) $(t-3(3-\sqrt{3})p)^2 \geq (t\sqrt{1-2t})^2$ (от (2.2) и (2.4) следва $t-3(3-\sqrt{3})p>0$).

Лесно се проверява, че (3.3) е еквивалентно на следното

(3.4) $f(t) \geq 0$, където $f(t)=2t^3-6(3-\sqrt{3})pt+54(2-\sqrt{3})p^2$.

Фиксираме p, $p \in (0;\frac{1}{27})$ и разглеждаме $f(t)$ за $t \in [m;M]$, където m,M са определени в Теорема 1. От $f'(t)=6t^2-6(3-\sqrt{3})p$ и (2.4) следва

$f'(t)>f'(\sqrt{3p})=6\sqrt{3}p>0$ $\Rightarrow$ $f(t)$ е растяща функция, следователно (3.4) ще е вярно, ако докажем следното

(3.5) $f(m) \geq 0$.

Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

(i) $t=2x-3x^2$, $p=x^2-2x^3$, $x \in (0;\frac{1}{3})$, $x=x_1$

Тогава (3.5) $\Leftrightarrow$ $2(2x-3x^2)^3-6(3-\sqrt{3})(x^2-2x^3)(2x-3x^2)+54(2-\sqrt{3})(x^2-2x^3)^2 \geq 0$.

След опростяване получаваме, че последното неравенство е еквивалентно на следното вярно неравенство $6x^3(3x-1)^2[(21-12\sqrt{3})x+6\sqrt{3}-10] \geq 0$. Последното неравенство е строго, защото $x \in (0;\frac{1}{3})$.

(ii) $t=\frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, $p=\frac{1}{4}(x^3-2x^2+x)$, $x \in (\frac{1}{3};1)$, $x=x_4$

Тогава

(3.5) $\Leftrightarrow$ $2\frac{(1+2x-3x^2)^3}{64}-6(3-\sqrt{3})\frac{(1+2x-3x^2)(x^3-2x^2+x)}{16}+54(2-\sqrt{3})\frac{(x^3-2x^2-x)^2}{16} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(1-x)^3(1-3x)^2[(12\sqrt{3}-21)x+1] \geq 0$.

Последното неравенство е вярно (защото от $x \in (0;\frac{1}{3})$ следва

$(12\sqrt{3}-21)x+1>(12\sqrt{3}-21)\frac{1}{3}+1=4\sqrt{3}-6>0$)

и е строго. Следователно (3.5) е доказано и в двата случая, с което приключва доказателството на теоремата.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато трите числа са равни.

Теорема 1.2. Неравенството

(3.6) $\grave{u}_{\grave{u}}$ —ù λ λ е вярно $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Доказателство: нека $\frac{a+b+c}{3} \leq (1-\lambda)\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \lambda\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ е изпълнено за произволни положителни числа a,b,c, където λ е фиксирано. Полагаме $a = 2\varepsilon$, $b = c = \frac{1}{2} - \varepsilon$ в последното неравенство.

При $\varepsilon \to +0$ получаваме, че $\lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Следователно е достатъчно да докажем следното неравнство

(3.7) $$\frac{a+b+c}{3} \leq (1-\frac{\sqrt{6}}{3})\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} + \frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

При $a = b = c$ се достига равенство. Нека поне две от числата са различни. Можем да считаме, че $a+b+c = 1$. Тогава при означенията $ab+bc+ca = t$, $abc = p$ получаваме, че (3.7) $\Leftrightarrow$

(3.8) $F(t) \geq 0,$ където $F(t) = \sqrt{2-4t} + 3(3-\sqrt{6})\frac{p}{t} - 1$.

Фиксираме p, $p \in (0;\frac{1}{27})$ и разглеждаме $F(t)$ за $t \in [m;M]$, където m, M са определени в Теорема 1. От $F'(t) = -\sqrt{\frac{2}{1-2t}} - \frac{(3-\sqrt{6})p}{t^2} < 0$ следва, че $F(t)$ е намаляваща функция. Следователно (3.8) ще е вярно, ако докажем, че

(3.9) $F(M) \geq 0$.

След преобразуване на (3.8) получаваме следното еквивалентно неравенство

(3.10) $f(t) \geq 0$,

където $f(t) = -4t^3 + t^2 + 6(3-\sqrt{6})pt - 27(5-2\sqrt{6})p^2$. Тогава (3.9) ще следва от $f(M) \geq 0$, което ще докажем. Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

(i) $t = 2x - 3x^2$, $p = x^2 - 2x^3$, $x \in (\frac{1}{3};\frac{1}{2})$, $x = x_2$.

Заместваме в (3.10) и получаваме следното вярно неравенство

$$f(M) = x^2(3x-1)^2(1-2x)[1-(3\sqrt{6}-6)x] \geq 0$$

(от $x \in (\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ следва $1-(3\sqrt{6}-6)x > 1-(3\sqrt{6}-6)\frac{1}{2} = \frac{8-3\sqrt{6}}{2} > 0$).

Последното неравенство е строго.

$(ii)\ t = \frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, $\quad p = \frac{1}{4}(x^3-2x^2+x)$, $\quad x \in (0;\frac{1}{3})$, $\quad x = x_3$.

Заместваме в (3.10) и получаваме следното вярно неравенство

$$f(M) = x(3x-1)^2(1-x)^2[8-3\sqrt{6}+(3\sqrt{6}-6)x] \geq 0$$

(от $x \in (0;\frac{1}{3}) \quad \Rightarrow \quad 8-3\sqrt{6}+(3\sqrt{6}-6)x > 8-3\sqrt{6} > 0$).

Последното неравенство е строго. Следователно (3.9) е доказано и в двата случая, с което приключва доказателството на теоремата.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато трите числа са равни.

Теорема 1.1.1. Неравенството $A_3 \geq (1-\lambda).G_3 + \lambda.S_3$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Неравенството $A_3 \geq (1-\lambda).G_3 + \lambda.S_3$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Доказателството е подобно на доказателствата на Теорема 1.1 и Теорема 1.2, но е свързано с дълги (елементарни) пресмятания и преобразувания.

Теорема 1.3. Неравенството $A_4 \geq (1-\lambda).H_4 + \lambda.S_4$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Доказателство: Нека

$$\frac{a+b+c+d}{4} \leq (1-\lambda)\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} + \lambda\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \tag{3.11}$$

е изпълнено за произволни положителни числа *a, b, c, d,* където λ е фиксирано. Можем да считаме, че

$$a+b+c+d=1 \tag{3.12}$$

Полагаме $a=b=c=\varepsilon$, $\quad d=1-3\varepsilon$ в последното неравенство. При $\to +$ получаваме, че $\lambda \leq \frac{1}{2}$. Достатъчно е да докажем, че (3.11) е вярно за $\lambda = \frac{1}{2}$. Явно, когато и четирите числа са равни, се достига равенство. Нека поне две от тях са различни. Без да ограничаваме общността, можем да считаме, че

$$a \leq b \leq c \leq d\ . \tag{3.13}$$

Фиксираме d и полагаме

(3.14) $\qquad a = a_1\theta\,,\;\; b = b_1\theta\,,\;\; c = c_1\theta\,,\;\; 1-d = \theta\,.$

Тогава от (3.12), (3.13) следва, че $d \in (\frac{1}{4};1)$ откъдето

(3.15) $\qquad \theta \in (0;\frac{3}{4})\,.$

От (3.12) и (3.14) получаваме $a_1+b_1+c_1 = \frac{a+b+c}{\theta} = \frac{a+b+c}{1-d} = \frac{1-d}{1-d} = 1$, т.е.

(3.16) $\qquad a_1+b_1+c_1 = 1\,.$

Последното равенство позволява да приложим метода, който използвахме при доказателствата на Теорема 1.1 и Теорема 1.2.

Заместваме в (3.11) $\lambda = \frac{1}{2}$ и от (3.12), (3.14) получаваме, че е достатъчно да докажем следното:

$$\frac{1}{4} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\frac{1}{\theta}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{1}{c_1})+\frac{1}{1-\theta}}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta^2(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+(1-\theta)^2}{4}} \Leftrightarrow$$

(3.17) $\quad F_\theta(t) \le 1\,,$

където $F_\theta(t) = \frac{8\theta(1-\theta)p}{(1-\theta)t+\theta p} + \sqrt{\theta^2(1-2t)+(1-\theta)^2}\,,$

$t = a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1 \quad , \quad p = a_1b_1c_1$, също така използвахме (3.16). Първо ще разгледаме случая, когато $a_1 = b_1 = c_1$. Тогава $t = \frac{1}{3}, \quad p = \frac{1}{27}$ и от (3.17) следва, че е достатъчно да докажем следното

(3.18) $\qquad g(\theta) \le 1 \quad , \quad g(\theta) = \frac{8\theta(1-\theta)}{9-8\theta} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\theta^2-6\theta+3} \quad , \quad \theta \in (0;\frac{3}{4})$

(съгласно (3.15)).

(3.18) $\qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{8\theta(1-\theta)}{9-8\theta} \le 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\theta^2-6\theta+3} \quad .$

$$\Leftrightarrow \quad -(4\theta-3)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{9-8\theta} - \frac{1}{\sqrt{3}-2\sqrt{4\theta^2 \quad 6\theta \quad 3}}\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{9-8\theta} - \frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}} \ge 0 \Leftrightarrow$$

(3.19) $\quad \theta(3-2\theta) \ge 0\,.$

От верността на (3.19) следва (3.18). Нека сега поне две от числата a_1, b_1, c_1 са различни.

Разглеждаме функцията $F_\theta(t)$, определена в (3.17) при фиксирано p, $p \in (0; \frac{1}{27})$ за $t \in [m; M]$, където m, M са определени в Теорема 1. От $F'_\theta(t) = -\frac{8\theta(1-\theta)^2 p}{[(1-\theta)t + \theta p]^2} - \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2}} < 0$ следва, че $F_\theta(t)$ е намаляваща функция, следователно, за да довършим доказателството на теоремата, е необходимо да докажем:

(3.20) $\qquad F_\theta(m) \le 1$.

Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

(i) $t = 2x - 3x^2$, $\quad p = x^2 - 2x^3$, $\quad x \in (0; \frac{1}{3})$, $\quad x = x_1$.

След заместване на t, p в (3.17) и преобразуване, получаваме

(3.21) $$F_\theta(m) = F(x,\theta) = \frac{8\theta(1-\theta)(x-2x^2)}{2-3x-2\theta(x-1)^2} + \sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}\,.$$

Да отбележим, че x и θ не зависят едно от друго. Тогава от (3.21) получаваме:

(3.22) $\qquad \frac{\partial F}{\partial x}(x,\theta) = 2\theta(3x-1)F_1(x,\theta)$, където

$$F_1(x,\theta) = \frac{8(1-\theta)^2(x-1)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^2} + \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}}\,.$$

Означаваме:

$$f_1(x,\theta) = \frac{8(1-\theta)^2(x-1)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^2}\quad , \qquad f_2(x,\theta) = \frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}}\,.$$

Ще докажем, че

(3.23) $\qquad F_1(x,\theta) = f_1(x,\theta) + f_2(x,\theta) < 0$.

От $\frac{\partial f_1(x,\theta)}{\partial\theta} = \frac{8x(x-1)(2x-1)(1-\theta)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^3} > 0$ следва, че $f_1(x,\theta)$ е растяща функция по отношение на θ. Следователно

(3.24) $$f_1(x,\quad) < f_1(x,\frac{3}{4}) = f_{11}(x) = \frac{2(\qquad 1)}{(3\ \ ^2\qquad 1)^2}\,.$$

От $f_{11}'(x)=\dfrac{2(1-3x^2)(9x^2-12x+1)}{(3x^2-1)^4}$ лесно следва, че

$f_{11}(x)<f_{11}(\dfrac{2-\sqrt{3}}{3})=-\dfrac{3}{16}(5+3\sqrt{3})$.

От последното и от (3.24) получаваме

(3.25) $\qquad f_1(x,\theta)<f_{11}(x)<-\dfrac{3}{16}(5+3\sqrt{3})$.

От $\dfrac{\partial f_2(x,\theta)}{\partial x}=\dfrac{2\theta^3(1-3x)}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2]^3}}>0$

($x\in(0;\dfrac{1}{3})$, $\quad\theta\in(0;\dfrac{3}{4})$) следва, че

$f_2(x,\theta)$ е растяща функция по отношение на x. Следователно

(3.26) $\qquad f_2(x,\theta)<f_2(\dfrac{1}{3},\theta)=f_{22}(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}.\theta}{\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}}$.

От $f_{22}'(\theta)=\dfrac{3\sqrt{3}.(1-\theta)}{\sqrt{(4\theta^2-6\theta+3)^3}}>0$ следва, че $f_{22}(\theta)<f_{22}(\dfrac{3}{4})=\dfrac{3}{2}$. От последното и от (3.26) следва

(3.27) $\qquad f_2(x,\theta)<\dfrac{3}{2}$

От (3.25) и (3.27) получаваме

$F_1(x,\theta)=f_1(x,\theta)+f_2(x,\theta)<-\dfrac{3}{16}(5+3\sqrt{3})+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{16}(1-\sqrt{3})<0$, т.е. (3.23) е доказано.

От (3.22), (3.23) и от $x\in(0;\dfrac{1}{3})$ следва, че $F_x'(x,\theta)=2\theta(3x-1)F_1(x,\theta)>0$, откъдето следва, че $F(x,\theta)$ е растяща функция по отношение на x. Тогава (3.20) ще следва от $F(x,\theta)<F(\dfrac{1}{3},\theta)=g(\theta)=\dfrac{8\theta(1-\theta)}{9-8\theta}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}\le 1$, което е точно доказаното по-горе (3.18). Следователно (3.20) е доказано в този случай.

(ii) $t=\dfrac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, $\quad p=\dfrac{1}{4}(x^3-2x^2+x)$, $\quad x\in(\dfrac{1}{3};1)$, $\quad x=x_4$.

След заместване на t, p в (3.17) получаваме

(3.28) $F_\theta(m)=H(x,\theta)=\dfrac{8\theta(1-\theta)(x-x^2)}{1+3x-\theta(x+1)^2}+\sqrt{\dfrac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}$.

Тогава (3.20) $\Leftrightarrow$

(3.29) $\qquad H(x,\theta)\le 1$ за $x\in(\frac{1}{3};1)$ и $\theta\in(0;\frac{3}{4})$.

След пресмятане и преобразуване получаваме, че

(3.30) $\qquad \frac{\partial H}{\partial x}(x,\theta)=\theta(1-3x)[h_1(x,\theta)+h_2(x,\theta)]$,

Където $h_1(x,\theta)=\frac{8(1-\theta)^2(x+1)}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^2}$ и $h_2(x,\theta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2}}$.

По-долу ще докажем, че

(3.31) $\qquad h_1(x,\theta)+h_2(x,\theta)>0$.

От (3.31), $x\in(\frac{1}{3};1)$ и (3.30) следва, че $H'_x(x,\theta)<0$. Тогава $H(x,\theta)$ е намаляваща по отношение на x и съгласно (3.29) е достатъчно да докажем, че $H(\frac{1}{3},\theta)\le 1$, но това е еквивалентно на $H(\frac{1}{3},\theta)=g(\theta)=\frac{\theta(1-\theta)}{9-8\theta}+\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}\le 1$, $\theta\in(0;\frac{3}{4})$, което е точно доказаното по-горе (3.18). Остава само да докажем (3.31).

Доказателство: от (3.30) получаваме

$\frac{\partial h_1(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{16x(x-1)(x+1)(1-\theta)}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^3}<0$ ($x\in(\frac{1}{3};1)$). Следователно $h_1(x,\theta)$ е намаляваща функция по отношение на θ, $\Rightarrow$

(3.32) $\qquad h_1(x,\theta)>h_1(x,\frac{3}{4})=h_{11}(x)=\frac{8(x+1)}{(3x^2-6x-1)^2}$.

От $h_{11}'(x)=\frac{8(3x^2-6x-1)(-9x^2-6x+11)}{(3x^2-6x-1)^4}$ лесно се проверява, че за $x\in(\frac{1}{3};1)$ от последното и от (3.32) следва, че

(3.33) $\qquad h_1(x,\theta)>\frac{3(5+3\sqrt{3})}{32}$.

От $\frac{\partial h_2(x,\theta)}{\partial x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\theta^3(3x-1)}{\sqrt{[\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2]^3}}>0$ следва, че $h_2(x,\theta)$ е растяща функция по отношение на x. Тогава

(3.34) $\qquad h_2(x,\theta)>h_2(\frac{1}{3},\theta)=h_{22}(\theta)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\theta}{\sqrt{4\theta^2-6\theta+3}}$.

От $h_{22}'(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1-\theta}{\sqrt{(4\theta^2-6\theta+3)^3}} < 0$ следва, че $h_{22}(\theta)$ е намаляваща

$\Rightarrow \qquad h_{22}(\theta) > h_{22}(\frac{3}{4}) = -\frac{3}{4}$. От последното и от (3.34) следва

(3.35) $\qquad h_2(x,\theta) > -\frac{3}{4}$.

От (3.33) и от (3.35) получаваме, че

$h_1(x,\theta) + h_2(x,\theta) > \frac{3(5+3\sqrt{3})}{32} - \frac{3}{4} = \frac{9(\sqrt{3}-1)}{32} > 0$, т.е (3.31) е доказано.

Следователно (3.29) е доказано, с което завършваме доказателството на Теорема 1.3.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато всички числа са равни.

Теорема 1.4. Неравенството $A_4 \le (1-\lambda).H_4 + \lambda.S_4$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Доказателство: нека

(3.36) $$\frac{a+b+c+d}{4} \le (1-\lambda)\frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} + \lambda\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$$

е изпълнено за произволни положителни числа a,b,c,d ,където λ е фиксирано. Можем да считаме, че $a+b+c+d=1$. Полагаме $a=b=c=\varepsilon$, $\quad d=1-3\varepsilon$ в последното неравенство.

При $\varepsilon \to +0$ получаваме, че $\lambda \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$. Достатъчно е да докажем, че (3.36) е вярно за $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$. По аналогичен начин, както в доказателството на Теорема 1.3, получаваме, че трябва да докажем следното:

(3.37) $\qquad F_\theta(t) \ge 1$,където

$F_\theta(t) = \frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)p}{(1-\theta)t+pt} + \sqrt{3}\sqrt{\theta^2(1-2t)+(1-\theta)^2}$. Първо ще разгледаме случая, когато $a_1=b_1=c_1$. Тогава $t=\frac{1}{3}$, $\quad p=\frac{1}{27}$ и от (3.37) следва, че е достатъчно да докажем следното

(3.38) $\qquad g(\theta) \geq 1 \quad , \quad g(\theta) = \dfrac{(16 - 8\sqrt{3})\theta(1-\theta)}{9 - 8\theta} + \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} \quad , \quad \theta \in (0; \dfrac{3}{4})$.

$$(3.38) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(16 - 8\sqrt{3})\theta(1-\theta)}{9 - 8\theta} \geq 1 - \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} \quad , \quad \theta \in (0; \frac{3}{4})$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-(2-\sqrt{3})(4\theta - 3)^2}{9 - 8\theta} \geq \frac{-(4\theta-3)^2}{\sqrt{3} + 2\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2-\sqrt{3}}{9-8\theta} \leq \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (2+\sqrt{3})(9-8\theta) - \sqrt{3} \geq 2\sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} \quad \Leftrightarrow$$

(3.39) $\qquad 9 + 4\sqrt{3} \geq 4(2+\sqrt{3})\theta + \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}$.

Разглеждаме функцията $r(\theta) = \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3}$ за $\theta \in (0; \dfrac{3}{4})$. От $r'ù\theta \ = \dfrac{4\theta - 3}{\sqrt{ù\theta^2 - \ \ \theta +}} <$ следва, че (3.40) $\quad r(\theta) < r(0) = \sqrt{3}$.

От (3.39), (3.40) и от $\theta \in (0; \dfrac{3}{4})$ получаваме, че

(3.41) $\qquad 4(2+\sqrt{3})\theta + \sqrt{4\theta^2 - 6\theta + 3} < 4(2+\sqrt{3})\dfrac{3}{4} + \sqrt{3} < 9 + 4\sqrt{3}$.

Тогава от (3.39), (3.41) следва верността на (3.38). Нека сега поне две от числата a_1, b_1, c_1 са различни. Разглеждаме функцията $F_\theta(t)$, определена при фиксирано p, $p \in (0; \dfrac{1}{27})$

за $t \in [m; M]$ където m, M са определени в Теорема 1. От

(3.42) $\qquad F'_\theta(t) = -\dfrac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)^2 p}{[(1-\theta)t + \theta p]^2} - \dfrac{\sqrt{3}.\theta^2}{\sqrt{\theta^2(1-2t) + (1-\theta)^2}} < 0$

следва, че

(3.43) $\qquad F_\theta(t)$ е намаляваща функция.

Следователно, за да довършим доказателството на теоремата, е необходимо да докажем (3.44) $\quad F_\theta(M) \geq 1$.

По-долу ще считаме, че θ е фиксирано ($\theta \in (0; \dfrac{3}{4})$). Съгласно Теорема 1 разглеждаме следните два случая:

(i) $t = 2x - 3x^2$, $\quad p = x^2 - 2x^3$, $\quad x \in (\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2})$, $\quad x = x_2$.

След заместване на t , p и преобразуване, получаваме

(3.45) $F_\theta(M)=F(x)=\dfrac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)(x-2x^2)}{2-3x-2\theta(x-1)^2}+\sqrt{3}.\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}$.

Тогава от (3.45) следва

(3.46) $F'(x)=2\theta(3x-1)F_1(x)$,където

(3.47) $F_1(x)=\dfrac{2(16-8\sqrt{3})(1-\theta)^2(x-1)}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^2}+\dfrac{\sqrt{3}.\theta}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}}$.

От (3.47) след пресмятане и преобразуване получаваме:

(3.48) $F_1'(x)=\dfrac{2(16-8\sqrt{3})(1-\theta)^2[3x-4+6\theta(x-1)^2]}{[2-3x-2\theta(x-1)^2]^3}-\dfrac{2\sqrt{3}.\theta^3(3x-1)}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2]^3}}$.

От $\theta\in(0;\frac{3}{4})$ и $x\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ следва, че

$3x-4+6\theta(x-1)^2<3x-4+6.\frac{3}{4}(x-1)^2=\frac{1}{2}(9x^2-12x+1)<0$.

От последното и от (3.48) следва, че $F_1'(x)<0$, следователно

(3.49) $F_1(x)$ е намаляваща функция.

От (3.49), (3.46) и от $3x-1>0$ следва, че са възможни следните три случая:

(i1) $F_1(x)\ge 0$ за $x\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$.

Тогава от (3.46) следва, че $F(x)$ е растяща и тогава е достатъчно да докажем, че $(-)\ge 1$ $\Leftrightarrow$ (3.40), което е доказано по-горе.

(i2) $F_1(x)>0$ за $x\in(\frac{1}{3};x_0)$, $F_1(x)<0$ за $x\in(x_0;\frac{1}{2})$.

Тогава в т. x_0, $F(x)$ има локален max. Следователно е достатъчно да проверим верността на следните две неравенства: $F(\frac{1}{3})\ge 1$, което е доказано и

(3.50) $F(\frac{1}{2})\ge 1$.

Но от (3.45) следва

(3.50) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{3}.\sqrt{\frac{\theta^2}{2}+(1-\theta)^2}\ge 1$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{2}(3\theta^2-4\theta+2)\ge 1$ $\Leftrightarrow$ $(3\theta-2)^2\ge 0$,

т.е (3.50) е доказано.

(i3) $F(x)\le 0$ за $x\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$.

Тогава $F(x)$ е намаляваща и е достатъчно да докажем (3.50), което е направено.

$(ii)\ t=\frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, $\quad p=\frac{1}{4}(x^3-2x^2+x)$, $\quad x\in(0;\frac{1}{3})$, $\quad x=x_3$.

След заместване на t, p в (3.39) получаваме

(3.51) $$F_\theta(M)=H(x,\theta)=\frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)(x-x^2)}{1+3x-\theta(x+1)^2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2}.$$

Тогава (3.44) $\Leftrightarrow$ $H(x,\theta)\ge 1$.Считаме, че θ е фиксирано и ще пишем $H(x)$ вместо $H(x,\theta)$. От (3.51) получаваме, че

(3.52) $H'(x)=\theta(1-3x)H_1(x)$, където

(3.53) $$H_1(x)=\frac{(16-8\sqrt{3})\theta(1-\theta)^2(x+1)}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^2}-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\theta}{\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2}}.$$

От (3.53) получаваме

(3.54) $$H_1'(x)=\frac{(16-8\sqrt{3}).27.\theta(1-\theta)^2[3\theta(x+1)^2-5-3x]}{[1+3x-\theta(x+1)^2]^3}$$
$$-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\theta^3(1-3x)}{\sqrt{[\theta^2(3x^2-2x+1)+2(1-\theta)^2]^3}}$$

От $x\in(0;\frac{1}{3})$ и $\theta\in(0;\frac{3}{4})$ последователно получаваме

$$3\theta(x+1)^2-3x-5<3.\frac{3}{4}.(x+1)^2-3x-5=\frac{1}{4}(9x^2+6x-11)<0.$$

От последното, $x\in(0;\frac{1}{3})$ и от (3.54) следва, че $H_1'(x)<0\Rightarrow H_1(x)$ е намаляваща функция.

От последното, (3.52) и от $x\in(0;\frac{1}{3})$ следва, че са възможни следните три случая:

$(ii1)$ $H_1(x)\ge 0$ за $x\in(0;\frac{1}{3})$.

Тогава $H'(x)\ge 0$ за $x\in(0;\frac{1}{3})$, следователно $H(x)$ е растяща и тогава е достатъчно да докажем, че

(3.55) $(0)\ge 1$.

Последователно получаваме:

(3.55) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\frac{3}{2}}.\sqrt{3\theta^2-4\theta+2}\ge 1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{3}{2}(3\theta^2-4\theta+2)\ge 1$ $\Leftrightarrow$ $(3\theta-2)^2\ge 0$,

т.е. (3.55) е доказано.

$(ii2)$ $H_1(x)>0$ за $x\in(0;x_0)$, $\quad H_1(x)<0$ за $x\in(x_0;\frac{1}{3})$.

Тогава $H(x)$ има локален max в т. x_0 и следователно е достатъчно да докажем:

(3.55) (което е доказано) и $H(\frac{1}{3})\geq 1$. Но последното неравенство е точно доказаното по-горе.

(ii3) $H_1(x)<0$ за $x\in(0;\frac{1}{3})$.

Следователно $H(x)$ е намаляваща и тогава е достатъчно да докажем, че $H(\frac{1}{3})\geq 1$. И в трите случая $H(x)\geq 1$, следователно всичко е доказано.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато всички числа са равни.

Теорема 1.5 Неравенството $A_5\leq(1-\lambda).H_5+\lambda.S_5$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Доказателство: нека

(3.56) $$\frac{a+b+c+d+e}{5}\leq(1-\lambda)\frac{5}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}}+\lambda\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}}$$

е изпълнено за произволни положителни числа a,b,c,d,e, където λ е фиксирано. Можем да считаме, че

(3.57) $a+b+c+d+e=1$

Полагаме $a=b=c=d=\frac{1}{4}-\varepsilon$, $e=4\varepsilon$. При $\varepsilon\to+0$ получаваме, че $\lambda\geq\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Достатъчно е да докажем, че (3.56) е вярно за $\lambda=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Можем да считаме, че

(3.58) $a\leq b\leq c\leq d\leq e$.

Полагаме: $a=a_1\theta$, $b=b_1\theta$, $c=c_1\theta$, $1-d-e=\theta$, $de=\delta$, $t=a_1b_1+b_1c_1+c_1a_1$, $p=a_1b_1c_1$.

Явно $a_1+b_1+c_1=1$. От (3.57) и (3.58) следват:

(3.59) $\theta\in(0;\frac{4}{5})$ и

(3.60) $\delta\in(0;\frac{(1-\theta)^2}{4}]$.

Лесно се проверява, че е достатъчно да докажем:

(3.61) $F(t,p,\theta,\delta)\geq 1$,

където $F(t,p,\theta,\delta)=\frac{5(5-2\sqrt{5})p\theta\delta}{\delta t+\theta(1-\theta)p}+2\sqrt{\theta^2(1-2t)+(1-\theta)^2-2\delta}$. Нека първо $a \ = b_1 = c_1$. Тогава $t = \dfrac{1}{3}, \quad p = \dfrac{1}{27}$. Имаме (3.61) $\Leftrightarrow$

(3.62) $\qquad f(\delta,\theta) \geq 1$,

Където $\quad f(\delta,\theta) = \dfrac{5(5-2\sqrt{5})\theta\delta}{9\delta+\theta(1-\theta)} + 2\sqrt{\dfrac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2-2\delta}$. Фиксираме θ, $\theta \in (0;\dfrac{4}{5})$ и разглеждаме $f(\delta,\theta)$ като функция на δ, $\delta \in (0;\dfrac{(1-\theta)^2}{4}]$ (ще пишем $f(\delta)$ вместо $f(\delta,\theta)$).

Последователно получаваме:

$$f'(\delta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta^2(1-\theta)}{[9\delta+\theta(1-\theta)]^2} - \frac{2}{\sqrt{\dfrac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2-2\delta}} ,$$

(3.63) $$f''(\delta) = -\frac{90(5-2\sqrt{5})\theta^2(1-\theta)}{[9\delta+\theta(1-\theta)]^3} - \frac{2}{\sqrt{[\dfrac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2-2\delta]^3}} < 0 .$$

Съгласно (3.63), (3.62) ще следва от верността на следните неравенства:

(3.64) $\qquad f(0) \geq 1$ и

(3.65) $\qquad f(\dfrac{(1-\theta)^2}{4}) \geq 1$.

Доказателство на (3.64) и (3.65):

(3.64) $\qquad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{\dfrac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2} \geq 1 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{4}{3}(4\theta^2-6\theta+3) \geq 1$

$\Leftrightarrow \quad 16\theta^2-24\theta+9 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \quad (4\theta-3)^2 \geq 0$.

(3.65) $\qquad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)}{9-5\theta} + \dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{5\theta^2-6\theta+3} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \qquad 3(\sqrt{5}-2)[-(5\theta-3)^2].\frac{1}{9-5\theta} \geq \frac{\sqrt{6}[-(5\theta-3)^2]}{\sqrt{6}+\sqrt{5}.\sqrt{5\theta^2-6\theta+3}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 3(\sqrt{5}-2).\frac{1}{9-5\theta} \leq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{25\theta^2-30\theta+15}} \Leftrightarrow$$

(3.66) $\qquad f_1(\theta) \geq f_2(\theta)$, Където $f_1(\theta)=\dfrac{2+\sqrt{5}}{3}(9\sqrt{6}-5\sqrt{6}\,\theta)$ и $f_2(t)=\sqrt{25\theta^2-30\theta+15}$. От $\theta\in(0;\dfrac{4}{5})$ лесно се получава, че

(3.67) $\qquad f_1(\theta)\geq f_1(\dfrac{4}{5})=\dfrac{\sqrt{6}(5\sqrt{5}+7)}{3}$,

(3.68) $\qquad f_2(\theta)<f_2(0)=\sqrt{15}$.

Тогава от $\dfrac{\sqrt{6}(5\sqrt{5}+7)}{3}>\sqrt{15}$, (3.67) и (3.68) следва верността на (3.66) и оттам следва (3.65). Нека сега поне две от числата a_1, b_1, c_1 са различни. Разглеждаме $F(t,p,\theta,\delta)$ (определена в (3.61)) като функция на t при фиксирано p (при условията на Теорема 1) и като функция на δ при фиксирано θ, $\theta\in(0;\dfrac{4}{5})$.

От $\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,\delta)=-\dfrac{(5-2\sqrt{5})\theta.\delta^2.p}{[\delta t+\theta(1-\theta)p]^2}-\dfrac{2}{\sqrt{\theta^2(1-2t)+(1-\theta)^2-2\delta}}<0$

следва, че е достатъчно да докажем:

(3.69) $\qquad F(M)\geq 1$

(M е определено в Теорема 1). Съгласно Теорема 1 разглеждаме два случая:

$(i)\ t=2x-3x^2$, $\quad p=x^2-2x^3$, $\quad x\in(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2})$, $\quad x=x_2$.

След заместване на t , p в (3.61) и преобразуване получаваме

(3.69) $\Leftrightarrow$

(3.70) $\qquad G(x,\delta)\geq 1$,

Където $G(x,\delta)=\dfrac{(5-2\sqrt{5})\theta(x-2x^2)}{\delta(2-3x)+\theta(1-\theta)(x-2x^2)}+2\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2-2\delta}$.

От $\dfrac{\partial^2 G}{\partial\delta^2}<0$

$\left(\dfrac{\partial^2 G}{\partial\delta^2}=-\dfrac{20(5-2\sqrt{5})\theta^2(1-\theta)(x-2x^2)(2-3x)}{[\delta(2-3x)+\theta(1-\theta)(x-2x^2)]^3}-\dfrac{2}{\sqrt{[\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2-2\delta]^3}}\right)$

следва, че за да е вярно (3.70), трябва да докажем следните:

(3.71) $\qquad G(x,0)\geq 1$

И

(3.72) $$G(x,\frac{(1-\theta)^2}{4})\geq 1.$$

(3.71) $\Leftrightarrow$ $g_1(x,\theta)\geq 1$, където $g_1(x,\theta)=2\sqrt{\theta(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}$. Да отбележим, че x и θ не зависят едно от друго.

От (3.71) $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial g_1(x,\theta)}{\partial x}=$

$\dfrac{12x-4}{\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+(1-\theta)^2}}>0$ $\left(x\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2})\right)$. Следователно $g_1(x,\theta)$ е растяща по отношение на x. Тогава (3.71) следва от:

$g_1(x,\theta)>g_1(\frac{1}{3},\theta)=2\sqrt{\frac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2}\geq 1$, което точно е доказаното по-горе (3.64).

(3.72) $\Leftrightarrow$

(3.73) $$g_2(x,\theta)\geq 1,$$

Където $g_2(x,\theta)=\dfrac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)x(1-2x)}{2-3x-\theta(8x^2-7x+2)}+2\sqrt{\theta^2(6x^2-4x+1)+\dfrac{(1-\theta)^2}{2}}$.

От (3.73) получаваме:

$$\frac{\partial g_2(x,\theta)}{\partial x}=\frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)[9x^2-8x+2+\theta(1-x)(3x-1)]}{[2-3x-\theta(8x^2-7x+2)]^2}+\frac{4\theta^2(3x-1)}{\sqrt{\theta(6x^2-4x+1)+\frac{(1-\theta)^2}{2}}}>0$$

(защото $x\in(\frac{1}{3};\frac{1}{2})$ и $\theta\in(0;\frac{4}{5})$). Тогава $g_2(x,\theta)$ е растяща по отношение на x и е достатъчно да докажем:

(3.74) $$g_2(\frac{1}{3},\theta)\geq 1\quad.$$

Но (3.74) е еквивалентно на $\dfrac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)}{9-5\theta}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{5\theta^2-6\theta+3}\geq 1$, т.е. на (3.65), което е доказано по-горе.

(ii) $t=\frac{1}{4}(1+2x-3x^2)$, $p=\frac{1}{4}(x^3-2x^2+x)$, $x\in(0;\frac{1}{3})$, $x=x_3$.

След заместване на t, p в (3.61) получаваме (3.69) $\Leftrightarrow$

(3.75) $$H(x,\delta)\geq 1,$$

където $H(x,\delta)=\dfrac{5(5-2\sqrt{5}\delta\theta(x-x^2)}{\delta(1+3x)+\theta(1-\theta)(x-x^2)}+2\sqrt{\dfrac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta^2)-2\delta}$.

От $\dfrac{\partial^2 H}{\partial\delta^2}<0$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \delta^2} = -\frac{10(5-2\sqrt{5})(1-\theta)\theta^2(x-x^2)^2(1+3x)}{[\delta(1+3x)+\theta(1-\theta)(x-x^2)]^3} - \frac{2}{\sqrt{[\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2-2\delta]^3}} \right)$$

получаваме,че (3.75) ще следва от верността на следните две неравенства:

(3.76) $\qquad H(x,0) \geq 1$

и

(3.77) $\qquad H(x, \dfrac{(1-\theta)^2}{4}) \geq 1$.

Припомняме, че $x \in (0; \frac{1}{3})$, $\delta \in (0; \frac{(1-\theta)^2}{4}]$ и $\theta \in (0; \frac{4}{5})$.

Доказателство на (3.76):

(3.76) $\Leftrightarrow$

(3.78) $\qquad h\ (x,\theta) \geq 1$,

където $h_1(x,\theta) = 2\sqrt{\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}$.

От $\dfrac{\partial h_1(x,\theta)}{\partial x} = \dfrac{\theta^2(3x-1)}{\sqrt{\frac{\theta^2}{2}(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}} < 0$ следва, че $h_1(x,\theta)$ е намаляваща по отношение на x. Тогава, за да е вярно (3.78), е достатъчно да докажем: $h_1(\frac{1}{3},\theta) \geq 1$, което е еквивалентно на доказаното по-горе

(3.64) $\qquad 2\sqrt{\frac{\theta^2}{3}+(1-\theta)^2} \geq 1$.

Доказателство на (3.77):

(3.77) $\qquad h_2(x,\theta) \geq 1$, където

$$h_2(x,\theta) = \frac{5(5-2\sqrt{5})\theta(1-\theta)(x-x^2)}{1+3x-\theta(4x^2-x+1)} + \sqrt{2}\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+1)+(1-\theta)^2}\ .$$

Последователно получаваме:

(3.79) $\qquad \dfrac{\partial h_2(x,\theta)}{\partial x} = \theta(1-3x)r(x,\theta)$,

Където $\quad r(x,\theta) = \dfrac{5(5-2\sqrt{5})(1-\theta)^2(x+1)}{[3x+1-\theta(4x^2-x+1)]^2} - \dfrac{\sqrt{2}.\theta}{\sqrt{\theta^2(3x^2-2x+2)-2\theta+1}}$.

След пресмятане и опростяване получаваме:

(3.80) $\qquad \dfrac{\partial r(x,\theta)}{\partial x} =$

$$\frac{5(5-2\sqrt{5})(1-\theta)^2[-3x-5+3\theta(4x^2+5x-1)]}{[3x+1-\theta(4x^2-x+1)]^3}+\frac{\sqrt{2}.\theta^3(3x-1)}{\sqrt{[\theta^2(3x^2-2x+2)-2\theta+1]^3}}.$$

От $x\in(0;\frac{1}{3})$ и $\theta\in(0;\frac{4}{5})$ следва

(3.81) $\qquad -3x-5+3\theta(4x^2+5x-1)<0$.

Сега от (3.81) и (3.80) следва, че $r(x,\theta)$ е намаляваща по отношение на x. От последното и от (3.79) получаваме, че са възможни следните три случая:

$(ii1)$ $\frac{\partial h_2(x,\theta)}{\partial x}>0$ за $x\in(0;\frac{1}{3})$,

$(ii2)$ $\frac{\partial h_2(x,\theta)}{\partial x}>0$ за $x\in(0;x_0)$ и $\frac{\partial h_2(x,\theta)}{\partial x}<0$ за $x\in(x_0;\frac{1}{3})$,

$(ii3)$ $\frac{\partial h_2(x,\theta)}{\partial x}<0$ за $x\in(0;\frac{1}{3})$.

От $(ii1)-(ii3)$ следва, че за да докажем (3.77), е достатъчно да докажем: $h_2(0,\theta)\ge 1$ и $h_2(\frac{1}{3},\theta)\ge 1$. Но последните две неравенства са еквивалентни съответно на вярното неравенство $\sqrt{2}.\sqrt{\theta^2+(1-\theta)^2}\ge 1 \quad (\Leftrightarrow \quad (2\theta-1)^2\ge 0)$ и на доказаното по-горе (3.65). С това приключва доказателството на Теорема 1.5.

Заб. От доказателството следва, че равенство се достига само когато всички числа са равни.

Заб. В доказателството на Теорема 1.5 в случаите, когато $\delta=\frac{(1-\theta)^2}{4}$, от наредбата на числата a,b,c,d,e следва, че $\theta\in(0;\frac{3}{5})$. Но последното не влияе на доказателството, защото считаме, че θ принадлежи на по-широк интервал, а именно $(0;\frac{4}{5})$.

4. Някои забележки и геометрични неравенства

Заб. От монотонността на M_p и от доказаните теореми в горния параграф например следват:

В случая, когато $n=3$

Теорема 4.1 За $p\in(-\infty;0)$ неравенството $A_n\ge(1-\lambda).M_p+\lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda\le\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Теорема 4.2 За $p \in (-\infty; 0)$ неравенството $A_n \le (1-\lambda).M_p + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \ge \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

В случая, когато $n = 4$

Теорема 4.3 За $p \in (-\infty; -1)$ неравенството $A_n \ge (1-\lambda).M_p + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \le \dfrac{1}{2}$.

Теорема 4.4 За $p \in (-\infty; -1)$ неравенството $A_n \le (1-\lambda).M_p + \lambda.S_n$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Прилагайки метода, използван при доказателствата на теоремите от горния параграф, могат да се доказват и хомогенни симетрични геометрични неравенства. Това става по следния начин. Нека означим с $x, y, z, s, , r, R, S$ съответно дължините на страните, полупериметъра, радиуса на вписаната окръжност, радиуса на описаната окръжност и лицето на произволен триъгълник. Полагаме $x = a + b$, $y = b + c$, $z = c + a$. Тъй като неравенствата са хомогенни относно x, y, z, то те са хомогенни и относно a, b, c. Затова можем да считаме, че $a + b + c = 1$. Тогава при приетите означения получаваме

(4.1) $$s = \frac{x+y+z}{2} = \frac{2(a+b+c)}{2} = 1,$$

$$S = \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \sqrt{(a+b+c)abc} = \sqrt{p}\,,\ r = \frac{S}{s} = \sqrt{p}\,,$$

$$R = \frac{xyz}{4S} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{4\sqrt{p}} = \frac{(1-c)(1-a)(1-b)}{4\sqrt{p}} = \frac{1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc}{4\sqrt{p}} = \frac{t-p}{4\sqrt{p}}$$

Пример (вж. следствие 4.2 от Niculesco, 2000). За произволен триъгълник е изпълнено неравенството

(4.2) $$(s^2 - 2R^2 - 10Rr + r^2)^2 \le 4R(R-2r)^3$$

Доказателство: за краткост ще пропуснем пресмятанията. За равностранен триъгълник се достига равенство. За неравностранен триъгълник от (4.1) получаваме, че

(4.2) $\Leftrightarrow$

(4.3) $f(t) \ge 0$, където $f(t) = -4t^3 + t^2 + 18pt - 4p - 27p^2$. Разглеждаме функцията $f(t)$, определена в (4.3) при фиксирано p, $p \in (0; \dfrac{1}{27})$ за $t \in [m; M]$, където m, M са определени в Теорема 1. От (4.3) следва $f'(t) = -12t^2 + 2t + 18p$. Явно уравнението $f'(t) = 0$ има корени $t_1 < 0 < t_2$.

Ще покажем, че

(4.4) $f'(m) > 0$.

Разглеждайки съответните два случая, получаваме, че последното неравенство е еквивалентно съответно на следните две верни неравенства:

$(3x_1-1)^2 + 6x_1^2(2-3x_1) > 0 \quad (x_1 \in (0;\frac{1}{3}))$ и $(1-x_4)(3x_4-1)^3 > 0 \quad (x_4 \in (\frac{1}{3};1))$.

От (4.4) следва, че е достатъчно да проверим верността на следните неравенства: $f(m) \geq 0$ и $f(M) \geq 0$. Разглеждайки съответните четири случая, получаваме, че последните неравенства са всъщност тъждествата $f(m) \equiv 0$ и $f(M) \equiv 0$! (Т.е. неравенството (4.2) за положителните числа R, r е НДУ да съществува триъгълник с радиус на описаната окръжност, равен на R, и радиус на вписаната окръжност, равен на r). От последното, (2.19) и (2.20) следва, че равенство се достига за произволен равнобедрен триъгълник (което е добре известно).

Заб. Други доказателства на (4.2) могат да се намерят например в (Niculesco, 2000) и (Blundon, 1965).

Заб. От (4.2) следват неравенството на *Ойлер* и неравенствата на *Blundon.*

Предлагаме следните проблеми.

Да се намерят оптималните константи, при които са верни неравенствата

$M_{p_2} \leq (1-\lambda).M_{p_1} + \lambda.M_{p_3}$,

$M_{p_2} \geq (1-\lambda).M_{p_1} + \lambda.M_{p_3}$ за $p_1 < p_2 < p_3$.

1.За $n = 3$, $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 3, 4, 5...$

2.За $n = 3$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = 3, 4, 5...$

3.За $n = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$.

За $n = 3$, p_1, p_3, p_3 са произволни.

Аналогични неравенства за $n = 4$.

Следвайки доказателството на Теорема 1.3.1, да се докаже, че $A_5 \geq (1-\lambda).H_5 + \lambda.S_5$ е изпълнено $\Leftrightarrow$ $\lambda \leq \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Предположение:

за $n \geq 3$, $p > 1$

$A_n \leq (1-\lambda_1).G_n + \lambda_1.M_p$ и $A_n \geq (1-\lambda_2).G_n + \lambda_2.M_p$ са изпълнени $\Leftrightarrow$

$\lambda_1 \geq (\frac{n-1}{n})^{\frac{p-1}{p}}$ и $\lambda_2 \leq n^{\frac{1-p}{p}}$ съответно.

5. Доказателство на Теорема 1

Първо ще докажем следната:

Лема 1. Нека $f(x), g(x)$ са непрекъснати и растящи (или намаляващи) функции в интервала $(\alpha;\beta)$ и са изпълнени следните:

(5.1) $\quad \left| f(x) - g(x) \right| > 0$ за $\forall x \in (\alpha;\beta)$

(5.2) $\quad \exists a,b,c,d \in (\alpha;\beta)$, за които $f(a) = g(b)$, $\quad f(c) = g(d)$.

Тогава е изпълнено неравенството

(5.3) $\quad (a-b)(c-d) > 0$.

Доказателство: ще разгледаме случая, когато $f(x)$, $g(x)$ са растящи. Допускаме противното, т.е. $a > b$, $c < d$. Тогава от (5.2) получаваме $g(a) > d(b) = f(a)$, откъдето (5.3) $\quad g(a) > f(a)$. Аналогично $f(c) = g(d) > d(c)$, откъдето (5.4) $\quad f(c) \quad g(c)$.

Разглеждаме функцията $F(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (\alpha;\beta)$. От (5.3) и (5.4) следва, че $F(a) < 0$ и $F(c) > 0$. Тогава от теоремата на Вайерщрас следва, че $\exists x_0 \in (\alpha;\beta)$, за което $F(x_0) = 0$. Последното противоречи на (5.1), следователно (5.3) е доказано. Случаят, когато функциите са намаляващи, се разглежда аналогично.

Теорема 1. Нека p е фиксирано число от интервала $(0;\dfrac{1}{27})$. Тогава:

(i) Уравненията $2x^3 - x^2 + p = 0$ и $x^3 - 2x^2 + x - 4p = 0$ имат точно по два корена в интервала $(0;1)$ съответно x_1, x_2 и x_3, x_4, при което са изпълнени неравенствата

(2.13) $\quad 0 < x_3 < x_1 < \dfrac{1}{3} < x_2 < x_4 < 1$

и

(2.14) $\quad x_2 < \dfrac{1}{2}$.

(ii) Нека a,b,c са положителни числа, поне две от които са различни, $a+b+c=1$, $abc = p$. Тогава множеството от стойности на $t = ab + bc + ca$ съвпада с интервала $[m;M]$, където

(2.15) $\quad m = \min\{ g(x_1\}, h(x_4)\}$,

(2.16) $\quad M = \max\{ g(x_2), h(x_3)\}$

$g(x) = 2x - 3x^2$, $\quad h(x) = \dfrac{1}{4}(1 + 2x - 3x^2)$, x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в (i).

(iii) Изпълнени са неравенствата

(2.17) $\quad m > \sqrt{3p}$

и

(2.18) $\quad M < \dfrac{1+9p}{4}$.

Освен това, когато:

(2.19) $t = m = 2x_1 - 3x_1^2$, то $p = x_1^2 - 2x_1^3$, $t = M = 2x_2 - 3x_2^2$, то $p = x_2^2 - 2x_2^3$

(2.20) $t = m = \frac{1}{4}(1 + 2x_4 - 3x_4^2)$, то $p = \frac{1}{4}(x_4^3 - 2x_4^2 + x_4)$

$t = M = \frac{1}{4}(1 + 2x_3 - 3x_3^2)$, то $p = \frac{1}{4}(x_3^3 - 2x_3^2 + x_3)$,

x_1, x_2, x_3, x_4 са определени в ( ), m, M са определени в (ii).

(iv)

(2.21) Когато са изпълнени (2.19) или (2.20), точно две от числата a, b, c са равни помежду си.

Доказателство: разглеждаме функцията $f_1(x) = 2x^3 - x^2 + p$. От $f_1'(x) = 6x^2 - 2x$ получаваме

(5.5) $f_1(x)$ е растяща за $x \in (-\infty;0)$, $(\frac{1}{3};1)$ и е намаляваща за $x \in (0;\frac{1}{3})$.

От (5.5) и от неравенствата:

$f_1(0) = p > 0$, $f_1(\frac{1}{3}) = p - \frac{1}{27} < 0$, $f_1(1) = p + 1 > 0$, $f_1(\frac{1}{2}) = p > 0$, следва, че

(5.6) $\exists x_1, x_2 : \quad f_1(x_1) = f_1(x_2) = 0, \qquad 0 < x_1 < \frac{1}{3} < x_2 < \frac{1}{2} < 1.$

Аналогично доказваме, че

(5.7) $\exists x_3, x_4 : \quad f_2(x_3) = f_2(x_4) = 0, \qquad 0 < x_3 < \frac{1}{3} < x_4 < 1,$

където $f_2(x) = x^3 - 2x^2 + x - 4p$. Разглеждаме функциите $F(x) = \frac{x(1-x)^2}{4} = \frac{1}{4} f_2(x) + p$ и $G(x) = x^2(1-2x) = -f_1(x) + p$ за $x \in (0;\frac{1}{3})$. Лесно се проверява, че те са растящи в разглеждания интервал. Ако $a, b \in (0;\frac{1}{3})$: $F(a) = G(b) = \frac{1}{32}$, то лесно се проверява, че $a < \frac{1}{4} < b$. Уравнението $F(x) = G(x)$ няма решение в посочения интервал, защото е еквивалентно на $x(1-3x)^2 = 0$. От последните разглеждания и от (5.6), (5.7) следва, че можем да приложим Лема 1 за функциите $F(x), G(x)$, числата a, b, x_1, x_3 и интервала $(0;\frac{1}{3})$.

Оттук получаваме, че

(5.8) $0 < x_3 < x_1 < \frac{1}{3}.$

Разглеждаме $F(x)$ и $G(x)$, дефинирани по-горе за $x \in (\frac{1}{3};1)$.

Лесно се проверява, че тези функции са намаляващи в разглеждания интервал. От $\lim\limits_{x \to 1-0} F(x) = p = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} G(x)$ и от равномерната непрекъснатост на непрекъснатите функции $F(x)$ и $G(x)$ в интервала $[\frac{1}{3};1]$ следва, че

$$\exists c,d: \quad c < d, \quad c = \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad d = 1 - \delta, \quad G(c) = F(d),$$

където ε и δ са достатъчно малки. Прилагаме Лема 1 за функциите $F(x)$, $G(x)$, числата c, d, x_2, x_4 и интервала $(\frac{1}{3};1)$, откъдето получаваме:

(5.9) $\qquad x_4 > x_2$.

От (5.8) и (5.9) следва верността на (2.13) и (2.14).

От $a+b+c=1$, $\quad abc = p$ последователно получаваме

$a(1-a)^2 = a(b+c)^2 \geq a.4bc = 4p \quad \Rightarrow \quad a - 2a^2 + a^3 - 4p \geq 0$ т.е.

$f_2(a) \geq 0$ и от по-горе следва, че

(5.10) $\qquad a \in [x_3; x_4]$.

От $a+b+c=1$, $\quad abc = p$ също следва

$$t = ab + bc + ca = a(b+c) + bc = a(1-a) + \frac{p}{a} = \frac{a^2 - a^3 + p}{a} = H(a),$$

$H(x) = \dfrac{x^2 - x^3 + p}{x}$.

Тогава съгласно (5.10) разглеждаме $H(x)$ за $x \in [x_3; x_4]$.

$H'(x) = \dfrac{x^2 - 2x^3 - p}{x^2} = -\dfrac{f_1(x)}{x^2}$. От (5.5) и (5.6) следва, че

(5.11) $\qquad H'(x) > 0$ за $x \in (x_1; x_2)$ и $H'(x) < 0$ за $x \in (x_3; x_1) \cup (x_2; x_4)$.

От (5.11) следва, че $t \in [m; M]$, където $m = \min\{H(x_1), H(x_4)\}$, но

$H(x_1) = \dfrac{x_1^2 - x_1^3 + p}{x_1} = \dfrac{x_1^2 - x_1^3 + x_1^2 - 2x_1^3}{x_1} = 2x_1 - 3x_1^2 = g(x_1)$ (използвахме $f_1(x_1) = 0$),

където $g(x)$ е определена в (ii),

$$H(x_4) = \frac{x_4^2 - x_4^3 + p}{x_4} = \frac{x_4^2 - x_4^3 + \dfrac{x_4^3 - 2x_4^2 + x_4}{4}}{x_4} = \frac{1}{4}(1 + 2x_4 - 3x_4^2) = h(x_4)$$

(използвахме $f_2(x_4) = 0$), където $h(x)$ е определена в (ii). Аналогично получаваме, че $M = \max\{H(x_2), H(x_3)\}$, $H(x_2) = g(x_2)$ и $H(x_3) = h(x_3)$. С това приключва доказателството на (2.15) и (2.16). (2.19) и (2.20) следват от дефинирането на x_1, x_2, x_3, x_4, m и M. Ще докажем (2.21) сам в един от възможните четири случая. Нека $t = ab + bc + ca = m = 2x_1 - 3x_1^2$ и $p = abc = x_1^2 - 2x_1^3$ (съгласно (2.19)). Тогава a, b, c са корените на уравнението (припомняме, че $a + b + c = 1$) $Z^3 - Z^2 + (2x_1 - 3x_1^2)Z + 2x_1^3 - x_1^2 = 0$.

Лесносепроверява,чекоренитенатовауравнениеса $Z_1 = Z_2 = x_1$, $Z_3 = 1 - 2x_1$. Последното доказва верността на (2.21).

Останалите три случая се разглеждат аналогично. Остава да докажем (2.17) и (2.18). За да докажем (2.17), съгласно (2.19) е достатъчно да проверим верността на неравенствата $g(x_1) > \sqrt{3p}$ и $h(x_4) > \sqrt{3p}$. Лесно се проверява, че те са еквивалентни на следните две верни неравенства: $x_1^2(3x_1 - 1) > 0$ и $(x_4 - 1)^2(3x_4 - 1)^2 > 0$ ($x_1 \in (0; \frac{1}{3})$, $x_4 \in (\frac{1}{3}; 1)$ съгласно (2.13)). Аналогично (2.18) следва от проверката на неравенствата $g(x_2) < \frac{1 + 9p}{4}$ и $h(x_3) < \frac{1 + 9p}{4}$. Лесно се проверява, че те са еквивалентни на следните две верни неравенства:

$(3x_2 - 1)^2(1 - 2x_2) > 0$ и $x_3(3x_3 - 1)^2 > 0$ ($x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, $x_3 \in (0; \frac{1}{3})$ съгласно (2.13) и (2.14)).

С това приключва доказателството на теоремата.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Hardy, G., J. E. Littlewood & G. Polya (1952). *Inequalities*. Cambridge: Mathematical Library (2-nd ed.).

Niculesco, C. P. (2000). A new look at Newton`s inequalities, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 1 (2), Article 17.

Sato, N. (2001). Symmetric polynomial inequalities, *Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem*, 27, 529 – 533.

Mitev, T. (2003). New inequalities between elementary symmetric polynomials, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 4 (2), Article 48.

Stolarsky K. B. (1971). *Cubic triangle inequalities*, Amer. Math. Monthly, 78, 879 – 881.

Aliyev, Y. N. (2007). The best constant for an algebraic inequality, *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 8 (3), Article 79.

Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem (2004). 30 (8).
Blundon, W. J. (1965). Inequalities associated with the triangle, Canad. Math. Bull, 8, 615 – 626.
Barbara, R. (2008). A Useful Inequality, *Crux Mathematicorum With Mathematical Mayhem*, 34 (1), 38 – 43.

SOME NEW INEQUALITIES AMONG THE ARITHMETIC, GEOMETRIC, HARMONIC AND QUADRATIC MEANS

Abstract. Let A_n, H_n, S_n be the arithmetic, harmonic and quadratic means respectivity for the positive real numbers $a_1, a_2, ..., a_n$. In this article we prove the following theorems:

Theorem 1. For $n = 3$ we have

$$A_n \geq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ and}$$

$$A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Theotrem 2. For $n = 4$ we have

$$A_n \geq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \leq \frac{1}{2} \text{ and}$$

$$A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Theorem 3.For $n = 5$ we have $A_n \leq (1-\lambda).H_n + \lambda.S_n \Leftrightarrow \lambda \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Some open problems are proposed too.

✉ **Dr. Todor Mitev**
Mathematics Department
Faculty of Natural Sciences
University of Ruse
8, Studentska St.
Ruse, Bulgaria
E-mail: tpmitev@abv.bg