Конкурсни задачи
Contest Problems
Рубриката се води от доц. д-р Веселин Ненков

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ НА БРОЯ

Задача 1. Нека x_1, x_2, x_3, $\dots$, x_n са различни прости числа, по-малки от 2017, за които числото $s_n = x_1^{2017} + x_2^{2017} + \dots + x_n^{2017}$ се дели на 2017. Да се намери най-малкото естествено число n, при което $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ приема най-малка стойност.

Христо Лесов, Казанлък

Задача 2. Целите числа a, b и c удовлетворяват равенството $a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 0$. Да се докаже, че $(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$ е точна трета степен на цяло число.

Тодор Митев, Русе

Задача 3. За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ са изпълнени условията $AC = BD$, $CD^2 = AD.AB$ $(CD \neq AD)$ и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD$. Ако E и F са средите съответно на диагоналите AC и BD, да се докаже, че $CD = 2.EF$.

Хаим Хаимов, Варна

Краен срок за изпращане на решения 31 юли 2017 г.

С годишни абонаменти за 2016 г. се награждават: учителят ***Христо Лесов*** (Природо-математическа гимназия „Акад. Н. Обрешков“, 6100 Казанлък), както и преподавателите от Варна ***Хаим Хаимов*** (ул. „Братя Шкорпил“ № 16, 9000 Варна) и ***Милен Найденов*** (ул. „Сан Стефано“ № 2, вход В, 9000 Варна) за активното им участие в предлагането на нови авторски задачи за рубриката. Наградата за оригинална статия (също абонамент) получава ***д-р Тодор Митев*** от Русенския университет „А. Кънчев“ (МГ „Баба Тонка“, ул. „Иван Вазов“ № 15, 7000 Русе) за статията „Някои нови неравенства между средните аритметично, геометрично, хармонично и квадратично“ от бр. 6, 2016 г. Значението на тази статия е за разгледаните в нея възможности за решаване на задачи с повишена трудност от задължителната и свободноизбираемата подготовка по математика.

Конкурсът продължава и през настоящата година. В края на 2017 г. ще бъдат определени читателите с най-интересни решения на конкурсните задачи, а така също най-активните композитори на нови задачи, както и авторите на най-интересните статии. Първенците ще получат безплатни годишни абонаменти за 2018 г.

Решенията трябва да бъдат представени ясно, като е задължително всяка задача да е на отделен лист. Моля, изпращайте решенията на адреса на редакцията или в електронен вид на mathinfo@azbuki.bg и vnenkov@mail.bg

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ БРОЙ 2, 2016

Задача 1. За всяко естествено число n да се намери растяща редица от естествени числа x_1, x_2, x_3, …, x_n, за които е изпълнено равенството $x_1^2+2.x_2^2+3.x_3^2+\cdots+n.x_n^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Христо Лесов, Казанлък

Решение: от условието имаме $1\le x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$. Затова $x_1\ge 1$, $x_2\ge x_1+1\ge 2$, $x_3\ge x_2+1\ge 3$, …, $x_n\ge n$ и $x_1^2\ge 1$, $2.x_2^2\ge 2^3$, $3.x_3^2\ge 3^3$, $n.x_n^2\ge n^3$. Оттук получаваме $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=x_1^2+2.x_2^2+3.x_3^2+\cdots n.x_n^2\ge 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. В последното неравенство е изпълнено равенство при всяко n. Следователно единственото решение на задачата е редицата: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, …, $x_n=n$, ….

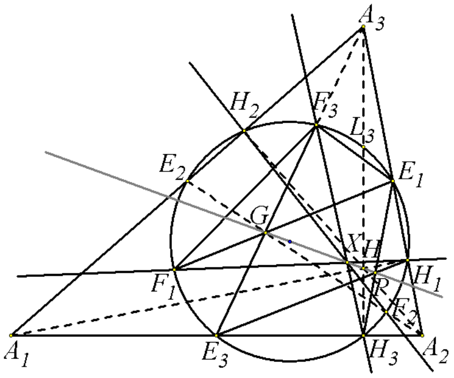
Задача 2. Нека в неравностранния триъгълник $A_1A_2A_3$ петите на височините към страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2 са съответно H_1, H_2 и H_3, а вторите пресечни точки на медианите към тези страни с Фойербаховата окръжност са съответно F_1, F_2 и F_3. Да се докаже, че правите F_1H_1, F_2H_2 и F_3H_3 се пресичат в една точка от Ойлеровата права на $\Delta A_1A_2A_3$ или са успоредни на нея.

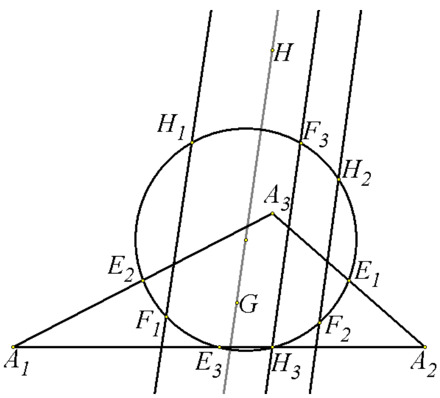
Хаим Хаимов, Варна

Решение: нека точките E_1, E_2 и E_3 са средите съответно на страните A_2A_3, A_3A_1 и A_1A_2. Достатъчно е да докажем, че двойките прави F_1H_1, F_3H_3 и F_1H_1, F_2H_2 се пресичат в точка от Ойлеровата права l на $\Delta A_1A_2A_3$. Тези точки ще бъдат общи за F_1H_1 и l и затова съвпадат. Оттук ще следва, че правите F_1H_1, F_2H_2 и F_3H_3 се пресичат в една точка от l (която може да е и безкрайна).

Нека $X=F_1H_1\cap F_3H_3$ и $P=H_3E_1\cap H_1E_3$. Точките E_i, F_i $(i=1,2,3)$ лежат на една окръжност (Фойербаховата окръжност на $\Delta A_1A_2A_3$). Затова от теоремата на Паскал за точките E_3, F_3, H_3, E_1, F_1, H_1 следва, че точките $G=E_3F_3\cap E_1F_1$, $X=F_3H_3\cap F_1H_1$ и $P=H_3E_1\cap H_1E_2$ лежат на една права l_1.

От друга страна, двете тройки точки A_1, E_3, H_3 и A_3, E_1, H_1 са разположени върху две прави. Затова от теоремата на Пап следва, че точките $G = A_1E_1 \cap A_3E_3$, $P = E_3H_1 \cap H_3E_1$ и $H = A_1H_1 \cap H_3A_3$ лежат на една права l_2. Правите l_1 и l_2 имат две общи точки G и P. Следователно $l_1 \equiv l_2$, т.е. точките G, X, P и H лежат на една права. Затова X лежи върху Ойлеровата права $l = GH$. По същия начин се доказва, че точката $Y = F_1H_1 \cap F_2H_2$ лежи върху l. С това задачата е решена.

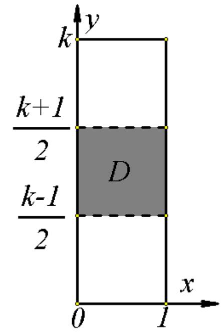




Задача 3. Пръчката l_1 е k пъти по-дълга от пръчката l_2. Двете пръчки са счупени по случаен начин по на две парчета. Ако p е вероятността от получените четирите парчета да може да се построи четириъгълник, да се намерят стойностите на k, при които $\frac{1}{p}$ е куб на естествено число.

Милен Найденов, Варна

Решение: нека дължините на пръчките l_2 и l_1 са съответно 1 и k. Тогава получените четири парчета имат дължини x, $1-x$, y и $k-y$. Елементарното събитие се характеризира с два параметъра x и y, които може да се разглеждат като координати на точка в равнината. Формулата за геометрична вероятност е $p = \frac{S_D}{S_\Omega}$, където Ω е правоъгълник, състоящ се от точките, за координатите на които са изпълнени неравенствата $0 < x < 1$ и $0 < y < k$, а S (множеството на благоприятните събития)



се състои от точките на Ω, координатите на които удовлетворяват условията: $x+1-x+y>k-y$ и $x+1-x+k-y>y$, т.е. $\frac{k+1}{2}<y<\frac{k-1}{2}$. Следователно $S_{\Omega}=k$ и $S_{D}=1$. Тогава $p=\frac{1}{k}$ и $k=\frac{1}{p}$. Оттук се вижда, че $\frac{1}{p}$ е куб на естествено число, когато $k=2^3,3^3,4^3,5^3\dots$.