Educational Matters
Научно-методически статии

ПОКАЗАТЕЛНИИТРИГОНОМЕТРИЧНИФУНКЦИИ В ТРАНСЦЕНДЕНТНИ УРАВНЕНИЯ (I ЧАСТ)

Диана Стефанова

Резюме. В статията се предлагат комбинации от показателни и тригонометрични функции, които участват в трансцендентни уравнения. Разглеждат се подходи за решаването им.
Keywords: transcendental equation, exponential equation, trigonometric equation, problem solving

В училищния курс по математика се изучават показателна, логаритмична и тригонометрична функция, а след това и решаване на показателни, логаритмични и тригонометрични уравнения и неравенства. В настоящата статия разглеждаме комбинация от показателна функция и тригонометрична функция в основата на показателно уравнение. Предложените задачи са подходящи за ученици, проявяващи интерес към математиката, и спомагат за повишаване нивото на подготовка за различни математически конкурси, олимпиади и други. За да се решат тези задачи, необходимо е много добро владеене на решаването на различните групи показателни и тригонометрични уравнения. Освен това ученикът трябва да знае свойствата на показателната и тригонометричната функция. На вниманието на читателя предлагаме част от задачите, които сме използвали в час. Разгледаните задачи допринасят за усъвършенстване уменията на учениците; усвояване от тях на различни математически дейности в различни ситуации; повишаване на математическата култура и интелектуалното им развитие. Целта е обвързване на знанията за показателната и тригонометричната функция със съответните групи уравнения. Формират се умения за пренос на знания и обратно, т.е. показателно уравнение – тригонометрично уравнение – показателно уравнение. Освен това, за да открият различните връзки, учениците упражняват методи на научно познание, убеждават се в тяхното значение и у тях се поражда стремеж за овладяването им. Всичко това е необходимо на творческата личност в условията на съвременния живот, когато трябва умело да се използват знанията от една област на науката в друга.

Задача 1. Да се реши уравнението $9^{\sin^2 x}+4.9^{\cos^2 x}=15.$

Решение: използваме, че $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и преобразуваме уравнението до вида $9^{\sin^2 x}+4.9^{1-\sin^2 x}=15 \Leftrightarrow 9^{\sin^2 x}+\dfrac{36}{9^{\sin^2 x}}-15=0.$ Полагаме $9^{\sin^2 x}=y,$ като $x\in R$ и $y\in[1;9].$ Получаваме квадратното уравнение $y^2-15y+36=0$ с корени $y_1=3\in[1;9]$ и $y_2=12\notin[1;9].$ Тогава $9^{\sin^2 x}=3\Leftrightarrow 3^{2\sin^2 x}=3\Leftrightarrow$ $2\sin^2 x=1\Leftrightarrow 1-\cos 2x=1\Leftrightarrow \cos 2x=0,$ откъдето $x=\dfrac{(2k+1)\pi}{4}, k\in Z.$

Задача 2. Да се реши уравнението $4.16^{\cos^2 x}-17.4^{\cos^2 x}+4=0.$

Решение: полагаме $4^{\cos^2 x}=y,$ като $x\in R$ и $y\in[1;4].$ Получаваме квадратното уравнение $4y^2-17y+4=0$ с корени $y_1=4\in[1;4]$ и $y_2=\dfrac{1}{4}\notin[1;4].$ Тогава $4^{\cos^2 x}=4\Leftrightarrow \cos^2 x=1 \ \cos x=\pm 1,$ т.е. $x=k\pi, k\in Z.$

Задача 3. Да се реши уравнението $2^{\sin^2 x}+5.2^{\cos^2 x}=7.$

Решение: като използваме, че $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, последователно получаваме $2^{\sin^2 x}+5.2^{1-\sin^2 x}=7$, $2^{\sin^2 x}+5.2.\dfrac{1}{2^{\sin^2 x}}=7$, $\left(2^{\sin^2 x}\right)^2-7.2^{\sin^2 x}+10=0$. Полагаме $2^{\sin^2 x}=y$, $y>0$ и решаваме уравнението $y\ \ -7y+10=0$, чиито корени са числата 2 и 5. Тъй като $0\le\sin^2 x\le 1$, то $2^0<2^{\sin^2 x}\le 2^1$, т.е. $1<y\le 2$. Числото 5 не отговаря на това условие. Тогава $2^{\sin^2 x}=2\Leftrightarrow \sin^2 x=1,$ $(\sin x-1)(\sin x+1)=0$. Оттук $\sin x=1$ и $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $\sin x=-1$ и $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ са решения на даденото уравнение.

Задача 4. Да се реши уравнението $49^{\cos x}=49^{\sin x}.7^{\frac{2}{\cos x}}$.

Решение: уравнението може да се запише във вида $7^{2\cos x}=7^{2\sin x}.7^{\frac{2}{\cos x}}$. Преобразуваме го последователно, както следва $2\cos x=2\sin x+\dfrac{2}{\cos x}$, $2\cos^2 x=2\sin x\cos x+2$, $1+\cos 2x=\sin 2x+2$, $\cos 2x-\sin 2x=1$. Полученото уравнение се удовлетворява:

а) от ъглите, за които $\cos 2x=1$, а $\sin 2x=0$, т.е. от ъглите $x=k\pi$, където $k\in Z$.

б) от ъглите, за които $\cos 2x=0$, а $\sin 2x=-1$, т.е. от ъглите $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$, където $k\in Z$. Непосредствено се проверява, че и двете намерени групи ъгли $x=k\pi$ и $x=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi$ удовлетворяват даденото уравнение.

Задача 5. Да се реши уравнението $10\left(25^{\cos\pi x}-4^{\cos\pi x}\right)=7\left(5^{\cos\pi x}-2^{\cos\pi x}\right).$

Решение: преобразуваме даденото уравнение във вида $\left(5^{\cos\pi x}-2^{\cos\pi x}\right)\left[10\left(5^{\cos\pi x}+2^{\cos\pi x}\right)-7\right]=0.$ От $5^{\cos\pi x}-2^{\cos\pi x}=0$ намираме, че $\cos\pi x=0,$ откъдето $x=\dfrac{2k+1}{2},k\in Z.$ От $10\left(5^{\cos\pi x}+2^{\cos\pi x}\right)-7=0$, като използваме, че $\cos\pi x\geq -1,$ получаваме $5^{\cos\pi x}+2^{\cos\pi x}\geq\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2}$. Равенство се достига само за $\cos\pi x=-1$. Тогава $x=2l+1,l\in Z.$

Задача 6. Да се реши уравнението $2^{\sin^2 x}.2^{\sin^2 2x}.2^{\sin^2 3x}=\sqrt{8}.$

Решение: даденото уравнение записваме във вида $2^{\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x}=2^{\frac{3}{2}}.$ Оттук получаваме тригонометричното уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 1-\cos 2x+1-\cos 4x+1-\cos 6x=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\cos 4x+2\cos 4x.\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 4x(1+2\cos 2x)=0.$$

Тогава $\cos 4x=0$ или $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}.$ Следователно $4x=\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{2}$ или $2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2s\pi,$ откъдето получаваме, че решенията на даденото уравнение са $x=\left(2k+1\right)\dfrac{\pi}{8},k\in Z$ и $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+s\pi,s\in\mathrm{Z}.$

Задача 7. Да се реши уравнението $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x}=4.$

Решение: допустимите стойности на x се определят от $\cos\dfrac{x}{2}\neq 0.$ Записваме уравнението във вида $2^{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x}=2^{2}\Leftrightarrow 2tg\dfrac{x}{2}-\cos x=2$ $\dfrac{2(1-\cos x)}{\sin x}-\cos x-2=0.$ Следователно $2-2\cos x-\sin x\cos x-2\sin x=0$ $\Leftrightarrow 2-2(\cos x+\sin x)-\sin x\cos x=0$ (1). Полагаме $\cos x+\sin x=y,$ тогава $\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x=y^2$ $2\sin x\cos x=y^2-1.$ Заместваме в (1) и уравнението спрямо y приема вида $y^2+4y-5=0,$ корените на което са $y_1=-5$ и $y_2=1.$ От $2\sin x\cos x=y^2-1$ и $y_1=-5$ получаваме $\sin 2x=24,$ което няма решение. От $2\sin x\cos x=y^2-1$ и $y_2=1$ получаваме $\sin 2x=0,$ тогава $x=\dfrac{k\pi}{2},k\in Z.$

Задача 8. Да се реши уравнението $2\cos^2\dfrac{x}{2}=3^x+3^{-x}.$

Решение: това уравнение е нестандартно, тъй като съдържа функции от различен тип. Могат да се използват оценки на областите от стойности на функциите. Областта на изменение на лявата страна е интервалът $\left[2;+\infty\right)$ (защото $3^x+3^{-x}\geq 2.3^{\frac{x}{2}}.3^{-\frac{x}{2}}=2$), а на дясната страна е интервалът $\left[0;2\right]$, т.е. най-малката стойност отляво е равна на най-голямата стойност отдясно. Следователно уравнението може да има решение само тогава, когато двете му страни едновременно достигнат стойността 2. Това води до следната система уравнения $\begin{cases}3^x+3^{-x}=2\\ 2\cos^2\dfrac{x}{2}=2.\end{cases}$

Първото равенство е възможно само ако $3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{x}{2}}$, т.е. $x=0.$ Чрез непосредствена проверка се установява, че $x=0$ удовлетворява и второто уравнение в системата. Следователно $x=0$ е единственото решение на трансцендентното уравнение.

Задача 9. Да се реши уравнението $2\cos^2\left(\dfrac{x^2+x}{6}\right)=2^x+2^{-x}.$

Решение: като използваме, че $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$, даденото уравнение записваме във вида $1+\cos\left(\dfrac{x^2+x}{3}\right)=2^x+2^{-x}$ (1). Тъй като $\cos\alpha\in\left[-1;1\right]$, то лявата страна на (1) е $0\leq 1+\cos\left(\dfrac{x^2+x}{3}\right)\leq 2.$ Тогава $2^x+2^{-x}\leq 2$ (2), но $2^x+2^{-x}>0$ и следователно можем да умножим двете страни на неравенството (2) с 2^x. Получаваме $2^{2x}-2.2^x+1\leq 0,$ т.е. $(2^x-1)^2\leq 0$ $\Rightarrow(2^x-1)^2=0$ $\Rightarrow 2^x=1$ $x=0.$

Задача 10. Да се реши уравнението $3^{\left|1-4x^2\right|}=\sin\pi x.$

Решение: от $\left|1-4x^2\right|\geq 0$ следва $3^{\left|1-4x^2\right|}\geq 1,$ но $\left|\sin x\right|\leq 1.$ Тогава записваме системата $\begin{cases}\left|1-4x^2\right|=0\\ \sin\pi x=1\end{cases}$ и намираме, че $x=\dfrac{1}{2}.$

Задача 11. Да се реши уравнението $\left(4-x^2\right)^{-\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}}=\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$

Решение: допустимите стойности на уравнението са $4-x^2>0$ и $1+\cos x\neq 0,$ т.е при $\left|x\right|<2.$ Нека $4-x^2\neq 1,$ т.е. $x\neq\pm\sqrt{3}.$ Тогава $-\dfrac{\cos^2 x}{1+\cos x}=-\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0,$ откъдето намираме, че $\cos x=1$

или $\cos x = -\frac{1}{2}$. Единственото решение на уравнението $\cos x = 1$ в интервала $(-2;2)$ е $x = 0$ а уравнението $\cos x = -\frac{1}{2}$ няма решение в този интервал. Равенството $4 - x^2 = 1$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $x \neq \pm\sqrt{3}$. Числата $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ удовлетворяват даденото уравнение, защото са от интервала $(-2;2)$. Следователно решенията на даденото уравнения са числата $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$ и $x_3 = -\sqrt{3}$.

Задача 12. Дадено е уравнението $2^{2\cos x} - 3a.2^{\cos x} + 2a^2 = 0$, където a е параметър.

а) Да се реши уравнението при $a = 1$.

б) За кои стойности на a уравнението има решение?

Решение. а) Заместваме $a = 1$ и полагаме $2^{\cos x} = y$, като $y \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. Получаваме квадратното уравнение y^2 —ùy с корени $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$. От $2^{\cos x} = 1$ следва $\cos x = 0$, откъдето $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. От $2^{\cos x} = 2$ следва, че е изпълнено $\cos x = 1$, тогава $x = 2k\pi, k \in Z$.

б) Полагаме $2^{\cos x} = y$, като $y \in \left[\frac{1}{2};2\right]$. Заместваме и получаваме $y^2 - 3ay + 2a^2 = 0$. За всяко a корените са $y_1 = a$ и $y_2 = 2a$. Сега от неравенствата $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ и $\frac{1}{2} \leq 2a \leq 2$ следва, че уравнението има решение, когато $a \in \left[\frac{1}{4};2\right]$.

Задача 13. Дадено е уравнението $3^{2\cos x} - (a+9).3^{\cos x} + 9a = 0$, където a е параметър.

а) Да се реши уравнението при $a = 3$.

б) За кои стойности на a уравнението има корен $x = \frac{\pi}{2}$?

Решение: полагаме $3^{\cos x} = t$. Тъй като показателната функция при основа 3 е растяща и $|\cos x| \leq 1$, то $t \in \left[\frac{1}{3}ù\right]$ Така получаваме уравнението $t^2 - (a+9)\mathrm{t} + 9a = 0$.

а) При $a = 3$ уравнението приема вида t^2 —12t 27 0, чиито решения са $t_1 = 9 \notin \left[\frac{1}{3};3\right]$ и $t_2 = 3 \in \left[\frac{1}{3};3\right]$. Следователно $3^{\cos x} = 3 \Rightarrow \cos x = 1$, т.е $x = 2k\pi, k \in Z$.

б) Ако $x=\frac{\pi}{2}$ е корен на уравнението, то $3^{2\cos\frac{\pi}{2}}-(a+9).3^{\cos\frac{\pi}{2}}+9a=0.$ Тъй като $\cos\frac{\pi}{2}=0,$ получаваме $1-(a+9)+9a=0,$ откъдето намираме, че $a=1.$

В заключение можем да отбележим, че с помощта на предложените задачи учениците се научават да свързват знания от една тема от училищния курс по математика с друга. По този начин се стимулира разширяването на интереса им, тъй като учебната дейност придобива изследователски характер. Освен това се допринася за: съзнателното и трайно усвояване на знанията; формиране у учениците на умения самостоятелно да получават правдоподобни твърдения от известните им вече знания. Решаването на предложените уравнения подобряват значително логическото мислене, съобразителността, досетливостта и комбинативността – полезни качества за решаване на задачи с повишена трудност. Системното използване на задачи от посочените видове създава условия за активизиране и развитие на познавателните възможности и способности на учениците; съдейства за развитие на творческото им мислене; повишава качеството на математическата им подготовка; позволява им по-уверено да се ориентират в различни закономерности от действителността и да използват активно математически знания.

ЛИТЕРАТУРА

Borodulja, I. (1968). *Exponential and logarithmic equations* (in Russian). Moscow: Prosveshtenie. [Бородуля, И. (1968). *Показателни и логаритмични уравнения и неравенства*. Москва: Просвещение.]

Vavilov, V. et al. (1987). *Mathematics problems* (in Russian). Moscow: Nauka. [Вавилов, В. и др. (1987). *Задачи по математика*. Москва: Наука.]

Zapryanov, Z., V. Vakarelova & B. Dimitrov (1996). *Mathematics for 10-th grade* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З., В. Вакарелова & Б. Димитров (1996). *Математика X клас*. София: Просвета.]

Zapryanov, Z. & N. Raikov (2012). *How to solve difficult problems easily* (in Bulgarian). Sofia: Prosveta. [Запрянов, З. & Н. Райков (2012). *Как да решаваме лесно трудни задачи*. София: Просвета.]

Mavrova, R. & D. Boikina (2011). Using extremal values of transcendental functions in solving algebra problems (in Bulgarian). *Mathematics Plus*, 19 (74), 2, 43 – 46. [Маврова, Р. & Д. Бойкина (2011). Използване на екстремалните стойности на трансцендентни функции при решаване на задачи по алгебра. *Математика плюс*, 19(74), 2, 43 – 46.]

Stefanova, D. & P. Penev (2016). One more idea for solving trigonometric equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 2, 170 – 182. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Още една идея за решаване на тригонометрични уравнения. *Математика и информатика,* 59, 2, 170 – 182.]

Stefanova, D. & P. Penev (2016). Excel helps in solving some exponential equations (in Bulgarian). *Mathematics and Informatics*, 59, 5, 368 – 380. [Стефанова, Д. & П. Пенев (2016). Excel в помощ при решаване на някои показателни уравнения. *Математика и информатика,* 59, 5, 368 – 380.]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.

EXPONENTIAL AND TRIGONOMETRIC FUNCTIONS IN TRANSCENDENTAL EQUATIONS (PART I)

Abstract. The paper proposes combinations of exponential and trigonometric functions, which are included in transcendental equations. Approaches for their solutions are considered.

✉ **Dr. Diana Stefanova**
Teacher in Mathematics
Asenovgrad
E-mail: dianastefan@abv.bg