Educational Matters
Научно-методически статии

ВЕКТОРНО ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ЛИЦА НА СТЕНИ И СЕЧЕНИЯ В НЯКОИ МНОГОСТЕНИ

[1)]Сава Гроздев, [2)]Веселин Ненков
[1)]Висше училище по застраховане и финанси – София
[2)]Технически колеж – Ловеч

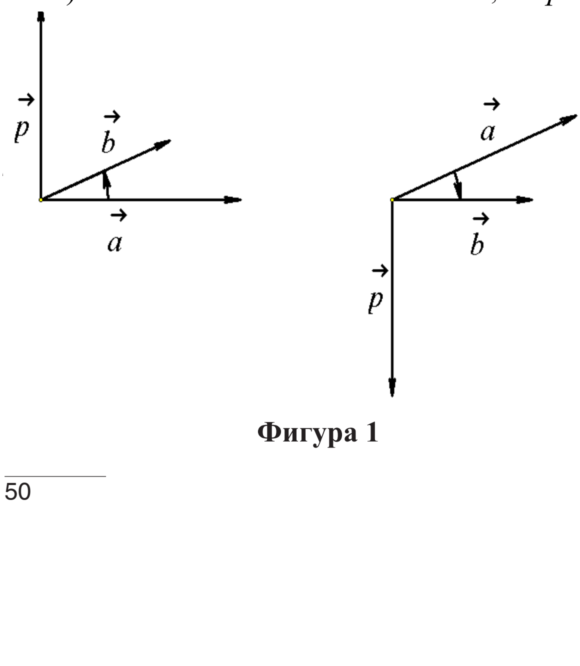
Резюме. В статията са описани общи зависимости между лица на стени и сечения в някои призми и пирамиди. Резултатите са получени с използване на векторно произведение.

Keywords: vector product, pyramid, prism, parallelepiped, tetrahedron, section

В следващите редове ще покажем едно елементарно приложение на векторното произведение за доказване на зависимости между лица на стени и сечения в някои специални многостени. В началото ще припомним определението и някои основни свойства на векторното произведение.

1. Векторно произведение. Основни свойства. На векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се съпоставя вектор $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$, който се нарича векторно произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, по следния начин:

A) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими, то $\vec{p} = \vec{o}$;



Фигура 1

B) ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, векторът $\vec{p}$ притежава свойствата:

a) $|\vec{p}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, където φ е ъгълът между $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

b) $\vec{p} \perp \vec{a}$ и $\vec{p} \perp \vec{b}$;

c) векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$, взети в този ред, образуват дясна тройка вектори.

Забележка: казваме, че векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ образуват дясна тройка, взети в този ред, ако при наблюдение на тази система от три вектора срещу посоката на $\vec{p}$ се вижда, че векторът $\vec{a}$ се завърта на възможно най-малкия ъгъл в обратна посока на часовниковата стрелка, докато посоката му съвпадне с посоката на $\vec{b}$ (фиг. 1).

От определението на векторно произведение се получават следните свойства:

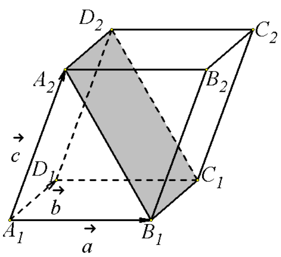
1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$; 2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$; 3) $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

4) $\vec{a}\times\left(\mu\vec{b}\right)=\mu\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ 5) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$; 6) $\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}$.

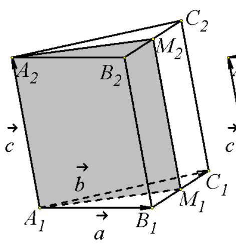
Големината на векторното произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ е равна на лицето на успоредника, построен върху векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Последното свойство на векторното произведение дава възможност да доказваме зависимости между лица в пространството само с обикновени алгебрични преобразувания.

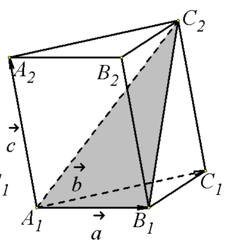
2. Зависимости в паралелепипед. Нека е даден паралелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$. Означаваме лицата на успоредниците $A_1B_1C_1D_1$, $A_1D_1D_2A_2$, $A_1B_1B_2A_2$, $A_1D_1D_2A_2$, $B_1D_1D_2B_2$, $A_1D_2C_2B_1$, $D_1A_2B_2C_1$, $A_1B_2C_2D_1$ и $B_1A_2D_2C_1$ съответно с S_1, S_2, S_3, σ_1, σ_2, σ_3, σ_4, σ_5 и σ_6 (фиг. 2).



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

Твърдение 1. $\sigma_1^2+\sigma_2^2=2\left(S_2^2+S_3^2\right)$, $\sigma_3^2+\sigma_4^2=2\left(S_3^2+S_1^2\right)$, $\sigma_5^2+\sigma_6^2=2\left(S_1^2+S_2^2\right)$.

Доказателство. Нека $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{c}$ (фиг. 2). Тогава

$$S_1^2=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2,\ S_2^2=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)^2,\ S_3^2=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)^2,$$

$$\sigma_1^2=\left(\overrightarrow{A_1C_1}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right)^2=\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}\right]^2=\left(\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}\right)^2=\left(\vec{b}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{a}\right)^2=$$

$$=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)^2-2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)^2=S_2^2+S_3^2-2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right),$$

$$\sigma_2^2=\left(\overrightarrow{D_1B_1}\times\overrightarrow{D_1D_2}\right)^2=\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{c}\right]^2=\left(\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}\right)^2=\left(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)^2=$$

$$=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)^2+2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)^2=S_2^2+S_3^2+2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right).$$

Чрез почленно събиране на последните две равенства получаваме $\sigma_1^2+\sigma_2^2=2\left(S_2^2+S_3^2\right)$, което е първото равенство на твърдение 1. Аналогично се доказват и другите две равенства на твърдението.

Почленното събиране на трите равенства в твърдение 1 води до

Следствие 1. $4\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2+\sigma_4^2+\sigma_5^2+\sigma_6^2$.

Последното равенство може да се разглежда като пространствен аналог на равенството, известно като теорема на Аполоний, изразяващо зависимостта между страните и диагоналите на успоредник.

3. Зависимости в призма с основа триъгълник. Нека е дадена триъгълна призма $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$. Означаваме лицето на основите $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ с S, а лицата на околните стени $B_1C_1C_2B_2$, $C_1A_1A_2C_2$ и $A_1B_1B_2A_2$ съответно с S_1, S_2 и S_3 (фиг. 3). Нека още A_1M_1, B_1N_1 и C_1P_1 са медианите на $\Delta A_1B_1C_1$, а A_2M_2, B_2N_2 и C_2P_2 са медианите на $\Delta A_2B_2C_2$. Лицата на успоредниците $A_1M_1M_2A_2$, $B_1N_1N_2B_2$ и $C_1P_1P_2C_2$ означаваме съответно с σ_1, σ_2 и σ_3 (фиг. 3).

Твърдение 2. $\sigma_1^2=\frac{1}{4}\left(2S_2^2+2S_3^2-S_1^2\right)$, $\sigma_2^2=\frac{1}{4}\left(2S_3^2+2S_1^2-S_2^2\right)$, $\sigma_3^2=\frac{1}{4}\left(2S_1^2+2S_2^2-S_3^2\right)$.

Доказателство. Нека $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1C_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{c}$ (фиг. 3). Тогава

$$4S^2=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2,\ S_2^2=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)^2,\ S_3^2=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)^2,$$

$$S_1^2=\left(\overrightarrow{B_1C_1}\times\overrightarrow{B_1B_2}\right)^2=\left[\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\times\vec{c}\right]^2=S_2^2+S_3^2+2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right),$$

$$\sigma_1^2=\left(\overrightarrow{A_1M_1}\times\overrightarrow{A_1A_2}\right)^2=\left[\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}\right]^2=\frac{1}{4}\left[S_2^2+S_3^2-2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right].$$

Следователно $\sigma_1^2=\frac{1}{4}\left(2S_2^2+2S_3^2-S_1^2\right)$, което е първото равенство на твърдение 2. Аналогично се доказват и другите две равенства на твърдението.

Равенствата в твърдение 2 са подобни на формулите за изразяване на медианите на триъгълник чрез страните му.

Чрез почленно събиране на трите равенства в твърдение 2 получаваме

Следствие 2. $4\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)=3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)$.

Означаваме лицата на триъгълниците $B_1C_1A_2$, $C_1A_1B_2$, $A_1B_1C_2$, $B_2C_2A_1$, $C_2A_2B_1$ и $A_2B_2C_1$ съответно с σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{22} и σ_{23} (фиг. 4).

Твърдение 3. $4\left(\sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2\right)=4\left(\sigma_{21}^2+\sigma_{22}^2+\sigma_{23}^2\right)=12S^2+S_1^2+S_2^2+S_3^2$.

Доказателство.

$$4\sigma_{11}^2=\left(\overrightarrow{A_2B_1}\times\overrightarrow{A_2C_1}\right)^2=\left[\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\right]^2=\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)^2=$$

$$= 4S^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c}) + 2(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a}) + 2(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$4\sigma_{12}^2 = \left(\overrightarrow{A_1B_2}\times\overrightarrow{A_1C_1}\right)^2 = \left[(\vec{c}+\vec{a})\times\vec{b}\right]^2 = 4S^2 + S_2^2 - 2(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c}),$$

$$4\sigma_{13}^2 = \left(\overrightarrow{A_1C_2}\times\overrightarrow{A_1B_1}\right)^2 = \left[(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a}\right]^2 = 4S^2 + S_3^2 - 2(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b}).$$

След почленно събиране на тези три равенства получаваме

$$4\left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2\right) = 12S^2 + 2S_2^2 + 2S_3^2 + 2(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a}).$$

В последното равенство заместваме скаларното произведение $2(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})$ от израза за S_1^2, получен при доказателството на твърдение 2. Така получаваме равенството $4\left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2\right) = 12S^2 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Аналогично се доказва, че $4\left(\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2\right) = 12S^2 + S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. С това твърдението е доказано.

4. Една зависимост в пирамида с основа успоредник. Нека е дадена четириъгълна пирамида $VA_1A_2A_3A_4$, основата на която е успоредникът $A_1A_2A_3A_4$ (фиг. 5). Означаваме с S лицето на основата, а с S_{ij} – лицето на ΔVA_iA_j.

Твърдение 4. $4\left(S_{13}^2 + S_{24}^2\right) = 4\left(S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{34}^2 + S_{41}^2\right) - S^2$.

Доказателство. Нека $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{A_1V} = \vec{c}$ (фиг. 5). Тогава

$$S^2 = (\vec{a}\times\vec{b})^2,\ 4S_{41}^2 = (\vec{b}\times\vec{c})^2,\ 4S_{12}^2 = (\vec{c}\times\vec{a})^2,$$

$$4S_{23}^2 = \left(\overrightarrow{A_2A_3}\times\overrightarrow{A_2V}\right)^2 = \left[\vec{b}\times(\vec{c}-\vec{a})\right]^2 = 4S_{41}^2 + S^2 + 2(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c}),$$

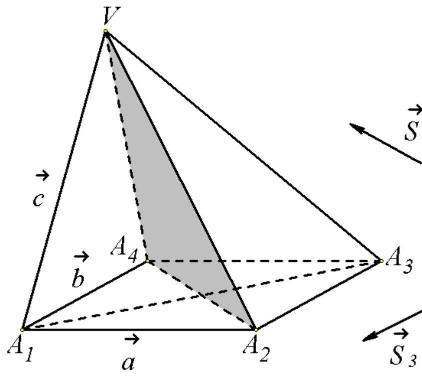
$$4S_{34}^2 = \left(\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4V}\right)^2 = \left[\vec{a}\times(\vec{c}-\vec{b})\right]^2 = 4S_{12}^2 + S^2 + 2(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$4S_{24}^2 = \left(\overrightarrow{A_2A_4}\times\overrightarrow{A_2V}\right)^2 = \left[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})\right]^2 = 4S_{41}^2 + 4S_{12}^2 + 2(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{b}\times\vec{c}) +$$
$$+2(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a}) + 2(\vec{c}\times\vec{a})(\vec{a}\times\vec{b}),$$

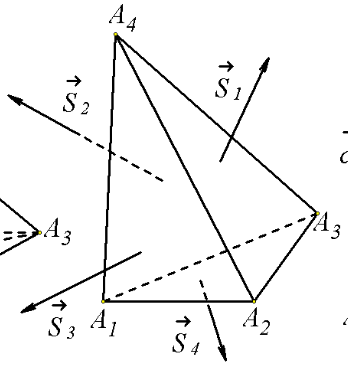
$$4S_{13}^2 = \left(\overrightarrow{A_1A_3}\times\overrightarrow{A_1V}\right)^2 = \left[(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}\right]^2 = 4S_{12}^2 + 4S_{41}^2 - 2(\vec{b}\times\vec{c})(\vec{c}\times\vec{a})$$

От тези равенства лесно се получава равенството в твърдението.

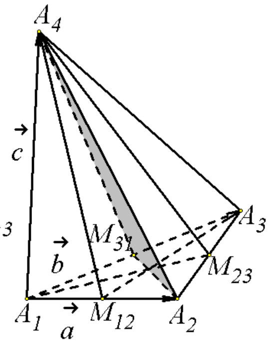
5. Зависимости в тетраедър. Нека е даден тетраедър $A_1A_2A_3A_4$. Означаваме лицата на триъгълниците $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ съответно с S_1, S_2, S_3 и S_4. Освен това с φ_{ij} означаваме двустенния ъгъл на тетраедъра при ръба A_iA_j (фиг. 6).



Фигура 5



Фигура 6



Фигура 7

Твърдение 5.
$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\varphi_{43} - 2S_2S_3\cos\varphi_{41} - 2S_3S_1\cos\varphi_{42}$.

Доказателство. Нека $\overrightarrow{S_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right)$, $\overrightarrow{S_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_4A_3} \times \overrightarrow{A_4A_1}\right)$, $\overrightarrow{S_3} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_4A_1} \times \overrightarrow{A_4A_2}\right)$ и $\overrightarrow{S_4} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_3A_2} \times \overrightarrow{A_3A_1}\right)$ (фиг. 6). Тогава $\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} + \overrightarrow{S_4} =$ $= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{A_2A_3} \times \overrightarrow{A_4A_1} + \overrightarrow{A_3A_2} \times \overrightarrow{A_3A_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_4A_2} \times \overrightarrow{A_4A_3} + \overrightarrow{A_2A_3} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) =$ $= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_4A_3} \times \overrightarrow{A_4A_3}\right) = \frac{1}{2}.\vec{o} = \vec{o}$. Следователно $\overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3} + \overrightarrow{S_4} = \vec{o}$. Това равенство се нарича още теорема за таралежа. Като запишем последното равенство във вида $-\overrightarrow{S_4} = \overrightarrow{S_1} + \overrightarrow{S_2} + \overrightarrow{S_3}$ и повдигнем двете му страни в квадрат, получаваме $S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2\overrightarrow{S_1}.\overrightarrow{S_2} + 2\overrightarrow{S_2}.\overrightarrow{S_3} + 2\overrightarrow{S_3}.\overrightarrow{S_1}$. Тъй като $\sphericalangle\left(\overrightarrow{S_1}, \overrightarrow{S_2}\right) = \pi - \varphi_{43}$, $\sphericalangle\left(\overrightarrow{S_2}, \overrightarrow{S_3}\right) = \pi - \varphi_{41}$ и $\sphericalangle\left(\overrightarrow{S_3}, \overrightarrow{S_1}\right) = \pi - \varphi_{42}$, от определението за скаларно произведение на вектори получаваме равенството в твърдение 5.

Твърдение 5 се нарича косинусова теорема за тетраедъра.

Нека M_{ij} е средата на ръба A_iA_j. С σ_{14}, σ_{24}, σ_{34}, σ_{12}, σ_{13} и σ_{23} означаваме лицата съответно на триъгълниците $A_1A_4M_{23}$, $A_2A_4M_{31}$, $A_3A_4M_{12}$, $A_1A_2M_{34}$, $A_1A_3M_{24}$ и $A_2A_3M_{41}$ (фиг. 7).

Твърдение 6. $4\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{14}^2\right) = 3\left(S_2^2 + S_3^2 + S_4^2\right) - S_1^2$,

$4\left(\sigma_{21}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{24}^2\right) = 3\left(S_3^2 + S_4^2 + S_1^2\right) - S_2^2$,

$$4\left(\sigma_{31}^2+\sigma_{32}^2+\sigma_{34}^2\right)=3\left(S_4^2+S_1^2+S_2^2\right)-S_3^2,$$
$$4\left(\sigma_{41}^2+\sigma_{42}^2+\sigma_{43}^2\right)=3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)-S_4^2.$$

Доказателство. Нека $\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_3}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}=\vec{c}$ (фиг. 7). Тогава $4S_2^2=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)^2$, $4S_3^2=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)^2$, $4S_4^2=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$,

$$4S_1^2=\left[\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\right]^2=4S_2^2+4S_3^2+4S_4^2+2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$

$$4\sigma_{41}^2=\left(\overrightarrow{M_{23}A_1}\times\overrightarrow{M_{23}A_4}\right)^2=\frac{1}{16}\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)\right]^2=\frac{1}{4}\left[4S_2^2+4S_3^2-2\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\right],$$

$$4\sigma_{42}^2=\left(\overrightarrow{M_{13}A_2}\times\overrightarrow{M_{13}A_4}\right)^2=\frac{1}{16}\left[\left(\vec{b}-2\vec{a}\right)\times\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left[4S_2^2+16S_3^2+4S_4^2+2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+4\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+4\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right],$$

$$4\sigma_{43}^2=\left(\overrightarrow{M_{12}A_4}\times\overrightarrow{M_{12}A_3}\right)^2=\frac{1}{16}\left[\left(\vec{a}-2\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\right]^2=$$
$$=\frac{1}{4}\left[16S_2^2+4S_3^2+4S_4^2+4\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+4\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right].$$

От тези равенства лесно се получава $4\left(\sigma_{41}^2+\sigma_{42}^2+\sigma_{43}^2\right)=3\left(S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)-S_4^2$, което е четвъртото равенство в твърдение 6. Другите три равенства се доказват аналогично.

Чрез почленно събиране на четирите равенства в твърдение 6 получаваме следното

Следствие 3. $\sigma_{12}^2+\sigma_{13}^2+\sigma_{14}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{24}^2+\sigma_{34}^2=S_1^2+S_2^2+S_3^2+S_4^2$.

REFERENCES

Martinov N. (1989). *Analytical geometry.* Sofia: Nauka I izkustvo. [Мартинов, Н. (1989). *Аналитична геометрия.* София: Наука и изкуство.]

Modenov P. (1969). *Analytical geometry.* Moscow: Moscow University Press. [Моденов, П. (1969). *Аналитическая геометрия.* Москва: Московского университета.]

Stanilov G. (1979). *Analytical geometry*. Sofia: Nauka I izkustvo. [Станилов, Г.(1979). *Аналитична геометрия.* София: Наука и изкуство.]

VECTOR PRODUCT AND RELATIONS BETWEEN SIDE AND SECTION AREAS OF SOME POLYHEDRA

Abstract. The paper describes general relations between areas of sides and sections in some prisms and pyramids. The results are obtained by the use of vector product.

✉ **Prof. Sava Grozdev, DSc.**
University of Finance, Business and Entrepreneurship
1, Gusla St.
1618 Sofia, Bulgaria
E-mail: sava.grozdev@gmail.com

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College, Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg