Educational Matters
Научно-методически статии

ЗАНИМАТЕЛНИТЕ ЗАДАЧИ НА ПОАСОН И МЕТОДЪТ НА ПЕРЕЛМАН ЗА ТЯХНОТО РЕШАВАНЕ И ИЗСЛЕДВАНЕ

[1)]Здравко Лалчев, [2)]Маргарита Върбанова, [2)]Мирослав Стоимиров
[1)]Софийски университет „Св. Климент Охридски“
[2)]Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

Резюме. Предмет на статията е геометричният метод на Перелман за решаване и емпирично изследване на популярен клас занимателни задачи, наречени задачи на Поасон. Основният инструмент на изследването е ромбоидна мрежа, построена върху клиногонална координатна система. Проблемната ситуация се моделира геометрично и решението на задачата се търси чрез построяване траекторията на „лъча на преливане“ върху мрежата. Методът е описан подробно с помощта на елементарни средства от аналитичната геометрия и представен чрез 8 задачи от преливане. Направени са коментари и предложения в посока оптимизиране на решенията. По емпиричен път, на базата на решенията на конкретни задачи, е достигната вероятна хипотеза за случаи на нерешимост на общата задача в зависимост от нейните параметри. Разработката е построена върху една от темите на курса по занимателна математика, предназначен за студенти – бъдещи учители. Тя може успешно да бъде приложена в обучението по математика и в „училищни“ условия, в часовете по избираема (или факултативна) подготовка.

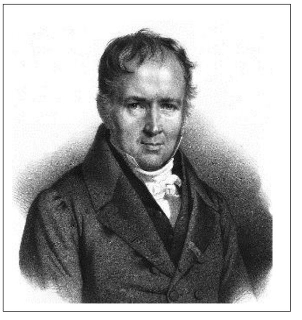
Keywords: amusing mathematics, Poisson’s problems, solution, Perelman’s method, empiric study, rhomboid network, overflow ray, falling and reflected ray, hypothesis

1. Въведение

Конкретният повод за настоящата статия е свързан с един клас задачи от лекционния курс по дисциплината „Занимателна математика“ за студенти педагози от университетите „Св. Климент Охридски“ в София и „Св. св. Кирил и Методий“ във Велико Търново. Става дума за задачите за разделяне на дадено количество течност, с което е запълнен съд с известна вместимост, на две равни части, като при разделянето участват още два съда, които са празни и са с известни обеми. Любопитно е, че тези занимателни задачи се свързват с името на френския учен математик Симеон Поасон, а методът за тяхното решаване – с името на големия руски популяризатор на математиката Яков

Перелман. Преди около сто години Перелман изобретява геометричен метод за моделиране и решаване на задачите на Поасон, в основата на който се намира принципът за „отражение на билярдната топка от стените на ромбоидна маса“. Простотата и ефективността на метода на Перелман позволяват той да бъде използван на практика както за решаване, така и за изследване на неограничен брой задачи от посочения клас.

Намираме, че ще бъде интересно за читателите да узнаят някои биографични данни от живота на двамата учени.



Симеон Дени Поасон

Симеон Дени Поасон (1781 – 1840) е роден в Потивие (Франция). Още от малък Поасон проявява математически талант. Биографите на учения отбелязват, че в края на урока по математика учителят Бильо решава да „разтовари“ своите ученици с една главоблъскница“ от XVI век за преливане на течности с помощта само на три съда. (По-късно занимателните задачи от този тип са наречени „задачи на Поасон“.) Заинтригуван от задачата, Поасон за кратко време намира две решения. Доволен от своя ученик, учителят предрича, че малкият Поасон ще стане голям поасон (на френски поасон значи риба). И действително, така и става. След като завършва училище, Поасон следва в „Екол Политекник“ в Париж, където слуша лекциите на големия френски математик Лагранж. Разказват още, че веднъж Лагранж по време на лекции отбелязва, че доказателството на една от теоремите е много сложно, но той не знае по-просто. На следващата лекция студентът Поасон подава на професора малко листче с намереното от него съвсем просто доказателство на теоремата. След завършване на „Екол Политекник“ през 1802 г. Поасон е назначен за професор в него, където чете лекции по математика и физика. Интересното е, че неговият учител от училище се гордее много с постиженията на своя бивш ученик и присъства на всеки доклад на професора (Arnaudov & al., 1966).

Поасон е виден френски учен. Член е на Бюрото за мерките и на Френската академия на науките. През 1837 г. става пер на Франция. Има изследвания в много области на математиката и физиката, например по обща механика, разпространение на топлината, теория на потенциала, диференциални уравнения и теория на вероятностите (Geler & al., 1983).

Яков Исидорович Перелман (1882 – 1942) е роден в град Белесток, Беларус. Баща му е счетоводител във фабрика за сукно, а майка му – начална учителка. Трудолюбив и обучаван от добър екип педагози, още от ученическа възраст у Яков са формирани знания и умения за самостоятелно мислене и научно търсене. Дейността на Перелман като популяризатор на науката започва

Яков Исидорович Перелман

още от ученическите му години. През 1899 г., подбуден от зловещите слухове за огнен дъжд, който щял да сложи край на света, той написва първата си научнопопулярна статия. В нея Перелман дава обяснение на предстоящото явление и разобличава „предсказанията“ на „пророците“. Във формата на непринудена беседа, съчетаваща проверими изчисления, лесни и удачни за разбиране сравнения, той разказва на читателите за метеорния поток Леониди. Изяснява, че явлението „огнен дъжд“ е ежегодно и не крие сериозна опастност за жителите на Земята.

Макар че завършва с отличие горския институт в Санкт-Петербург и получава звание „учен лесовъд първи разряд“, Я. Перелман никога не се занимава с лесовъдна дейност. Той се отдава на журналистиката и още в 1904 г. става отговорен секретар на списание „Природа и люди“. Там публикува свои очерци и отпечатва разработки и открития на известни учени. На първо време, материалите му са свързани с астрономията. Но постепенно се разширява кръгът на неговите интереси и се появяват публикации по проблеми от областта на математиката, физиката и техниката.

През 1913 г. е публикувана първата част на книгата на Перелман – „Занимателна физика“. Книгата има зашеметяващ успех сред читателите, а също така предизвиква интерес и сред физиците. Професорът по физика към Петербургския университет Орест Д. Хволсон насърчава младия автор да продължи да работи за популяризиране на науката и техниката. Популяризаторските му способности впечатляват дори и създателя на руския ракетен двигател В. П. Глушко. Той го определя като „певец на математиката, бард на физиката, поет на астрономията, херолд на космонавтиката“. Перелман разработва собствена методология, която позволява на читателя да се запознае с научни факти от различни области по най-лесния и достъпен начин.

Библиографията на Я. И. Перелман наброява повече от 1000 статии и очерци, публикувани в различни издания. Освен това 47 научнопопулярни, 40 научно-познавателни книги, 18 книги за ученика и учебни пособия. След „Занимателна физика“ са „Занимателна аритметика“, „Занимателна алгебра“, „Занимателна астрономия“, „Занимателна геометрия“, „Занимателна механика“. Само на руски език „Занимателна физика“ е издавана почти 30 пъти.

Значително важен етап в изграждането на Перелман като популяризатор на науката заема откриването през 1935 г. на ленинградския Дом на занимателните науки. Този храм на занимателността става любимо място не само за Перелман, но и за много ленинградски ученици. Там те се запознават с много постижения на науката и техниката, и то в достъпна и занимателна форма.

Певецът на математиката, бардът на физиката, поетът на астрономията и херолдът на космонавтиката, популяризатор и журналист Яков Исидорович Перелман в продължение на 43 години носи радост и удовлетворение на всички жадни за наука и знание хора. Остават книгите му, които и днес се четат с голям интерес. Освен на руски неговите книги са преведени и отпечатани на немски, френски, английски, испански, португалски, италиански, чешки, български, фински и други езици.

Ученият Яков Перелман и неговата съпруга имат трагичната участ на голямата част от жителите на Ленинград, причинена от немската блокада през Втората световна война.

2. Задачата (и решението) на Поасон

В тази точка ще представим конкретната задача и едно от двете решения, намерени от Поасон още в ученическа възраст. Задачата има практическо съдържание и както беше казано, е свързана с преливане на течности с помощта на три съда, най-големият от които е пълен, а другите два са празни. Решението е съставено от отделни стъпки (преливания) и е изложено синтетично.

Задача. *Разделете наполовина съдържанието на вино в съд с вместимост* 12 л, *като си служите с два празни съда с вместимост* 9 л *и* 5 л.

Решение:

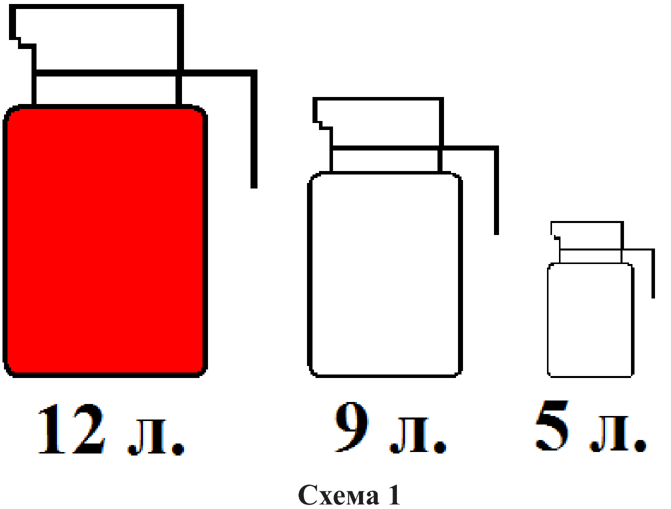


Схема 1

За по-голяма яснота при представяне на решението ще описваме подробно както последователните действия (преливания), така и последователните състояния (резултати), през които преминава проблемната ситуация. (Оригиналното решение не е описано толкова подробно.)

Начално (нулево) състояние на ситуацията: в най-големия съд има 12 л, в средния съд – 0 л, и в най-малкия – 0 л (сх. 1).

Първо преливане: от най-големия съд (9 л) *– в средния съд*.
Първо състояние: в най-големия има 3 л, в средния – 9 л, в най-малкия – 0 л.
Второ преливане: от средния съд (5 л) *– в най-малкия съд.*
Второ състояние: В най-големия има 3 л, в средния – 4 л, в най-малкия – 5 л.
Трето преливане: от най-малкия съд (5 л) *– в най-големия съд*.
Трето състояние: в най-големия има 8 л, в средния – 4 л, в най-малкия – 0 л.
Четвърто преливане: от средния съд (4 л) *– в най-малкия съд*.
Четвърто състояние: в най-големия има 8 л, в средния – 0 л, в най-малкия – 4 л.
Пето преливане: от най-големия съд (8 л) *– в средния съд*.
Пето състояние: в най-големия има 0 л, в средния – 8 л, в най-малкия – 4 л.
Шесто преливане: от средния съд (1 л) *– в най-малкия съд*.
Шесто състояние: в най-големия има 0 л, в средния – 7 л, в най-малкия съд – 5 л.
Седмо преливане: от най-малкия съд (5 л) *– в най-големия съд*.
Седмо състояние: в най-големия има 5 л, в средния – 7 л, в най-малкия – 0 л.
Осмо преливане: от средния съд (5 л) *– в най-малкия съд*.
Осмо състояние: В най-големия има 5 л, в средния – 2 л, и в най-малкия – 5 л.
Девето преливане: от най-малкия съд (5 л) *– в най-големия съд*.
Девето състояние: в най-големия има 10 л, в средния – 2 л, в най-малкия – 0 л.
Десето преливане: от средния съд (2 л) *– в най-малкия съд*.
Десето състояние: в най-големия има 10 л, в средния – 0 л, в най-малкия – 2 л.
Единадесето преливане: от най-големия съд (9 л) *– в средния съд*.
Единадесето състояние: в най-големия има 1 л, в средния – 9 л, в най-малкия – 2 л.
Дванадесето преливане: от средния съд (3 л) *– в най –малкия съд*.
Дванадесето състояние: в най-големия има 1 л, в средния – 6 л, в най-малкия – 5 л.
Тринадесето (последно) преливане: от най-малкия съд (5 л) *– в най-големия съд*.
Тринадесето (крайно) състояние: в най-големия съд има 6 л, в средния – 6 л, в най-малкия – 0 л (сх. 2).

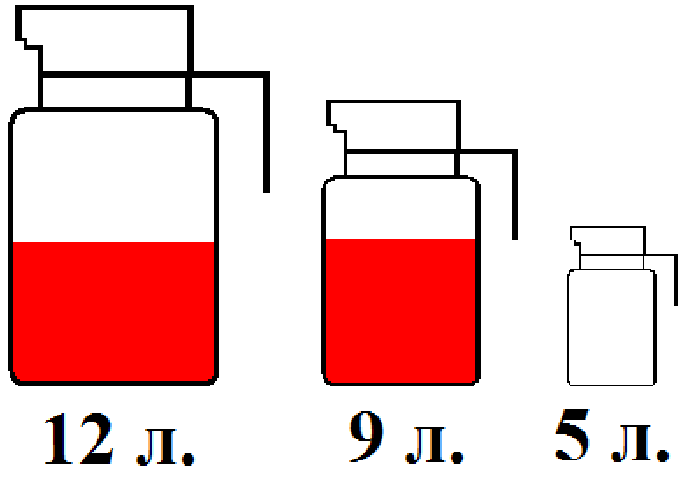


Схема 2

За по-голяма прегледност отделните състояния са записани по реда на тяхното възникване в следната таблица:

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
12 литра	12	3	3	8	8	0	0	5	5	10	10	1	1	6
9 литра	0	9	4	4	0	8	7	7	2	2	0	9	6	6
5 литра	0	0	5	0	4	4	5	0	5	0	2	2	5	0

Коментар. Така е намерено решение на задачата, което е съставено от 13 преливания.

3. Метод на Перелман. Приложения

3.1. Координатен модел върху ромбоидна мрежа

Преди повече от 20 години при подготовката на курса по занимателна математика авторите (първите двама) на статията попаднахме на забележителната книга „Занимателна геометрия“ от руския учен Яков Перелман (Перелман, 1954). Силно впечатление ни направи статията „Умната топка“, в която авторът описва един „неочакван“ и „сигурен“ геометричен начин за решаване на цял клас задачи от преливане на течности. След като проучихме решенията на задачите от преливане в книгата на Перелман и се убедихме в надеждността на използвания метод, решихме да потърсим допълнителна информация за метода и в достъпната ни литература по занимателна математика. При направената справка в книгите на видния американски популяризатор на математиката Мартин Гарднер намерихме следната бележка: „Колкото и странно да звучи, но главоблъсканицата за преливане на течости може много лесно да се реши, като се начертае траекторията на топка, отразяваща се от стените на *ромбоидална маса*“ (Gardner, 1972).

От първоизточника („Занимателна геометрия“) се вижда, че за да направи модел на задачата (на Поасон), Перелман използва „геометрични“ свойства на координатите, а за да построи решение, използва „физични“ свойства на движението на билярдна топка върху ромбоидна маса. За да осигурим „по-прецизен“ инструментариум за изследване, в статията ще представим метода на Перелман изцяло на езика на геометрията. За тази цел ще използваме елементарни аналитико-геометрични средства, с помощта на които ще моделираме задачата и ситуацията, свързана с нея.

За по-голяма яснота още в началото ще направим едно уточнение. В следващото изложение ще използваме термините **Поасонова задача** и **Поасонова ситуация**, с които за краткост ще наричаме съответно задачата, формулирана по-горе, и свързаната с нея проблемна ситуация. Също така, за да изразим „насочеността“ на преливането (от един съд в друг), ще използваме и термина **лъч на преливане.**

Нека отбележим, че Поасоновата ситуация в даден момент (състояние) еднозначно се определя от две количества – количеството в средния и количеството в малкия съд. За удобство количеството в средния съд ще означим с x, а количеството в малкия съд ще означим с y. Тогава наредената двойката числа $(x;\ y)$ определя еднозначно състоянието на ситуацията в този момент. От друга страна, двойката числа $(x;\ y)$ определя еднозначно точка от равнината, в която предварително е зададена координатна система. Това ще рече, че състоянието на проблемната ситуацията (в даден момент) се моделира еднозначно с точката $(x;\ y)$ от координатната равнина.

Следвайки по същество идеята на Перелман за моделиране на Поасоновата задача, построяваме клиногонална координатна система Oxy с двойка базисни вектори $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$, за която $\left|\overrightarrow{OE}\right| = \left|\overrightarrow{OF}\right| = 1$ и $\measuredangle(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}) = 60^0$, (сх. 3).

През точките, които отговарят на целите положителни числа от оста Ox, построяваме прави, успоредни на оста Oy, и през точките, които отговарят на целите положителни числа на оста Oy, построяваме прави, успоредни на оста Ox. По този начин покриваме координатната система с ромбоидна мрежа, върху която ще построим геометричния модел на задачата. На схемата е показана клиногонална координатна система с ромбоидна мрежа върху нея. Изобразени са осите Оx и Оy, базата $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF})$ и мрежата.

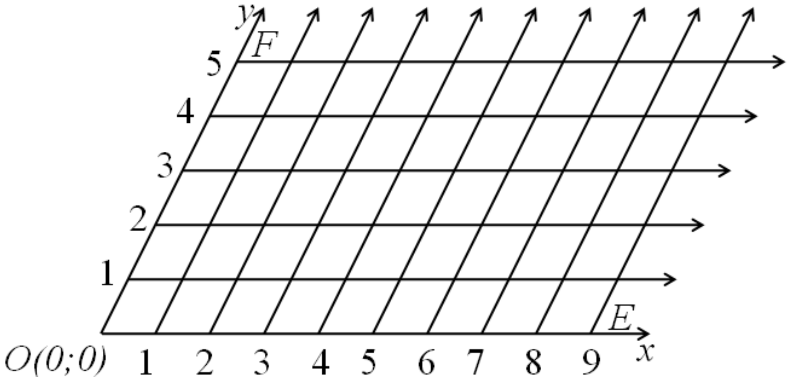


Схема 3

За да изградим геометричния модел на задачата, е необходимо да уточним общите ограничителни условия, т.е. дефиниционното множество на задачата. Тъй като двойката числа (x; y) определя еднозначно ситуацията, то за да определим дефиниционното множество, е необходимо да изясним условията, на които отговарят числата x и y. В тази връзка да приемем, че най-големият съд има вместимост c, средният съд има вместимост a и най-малкият съд има вместимост b, където числата a, b и c са естествени, и $b < a < c$.

Тъй като числото x показва количеството (в даден момет) в средния съд, числото y показва количеството течност в най-малкия съд, то за числата x, y, a, b, c са изпълнени неравенствата:

$0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, $x + y \leqq c$.

При построяване на геометричния модел на дефиниционното множество на Поасоновата задача трябва да се вземе предвид, че:

1. правата $x = 0$ съвпада с оста Oy, правата $x = a$ минава през точката (a; 0) и е успоредна на оста Oy. Неравенството $0 \leqq x \leqq a$ определя множеството (ивицата) от точки, заключени между правите $x = 0$ и $x = a$;

2. правата $y = 0$ съвпада с оста Ox, правата $y = b$ минава през точката (0; b) и е успоредна на оста Ox. Неравенството $0 \leqq y \leqq b$ определя ивицата от точки, заключени между правите $y = 0$ и $y = b$;

3. правата $x + y = c$ минава през точките (c; 0) и (0; c), пресича координатните оси Ox и Oy под (елементарно геометрични) ъгли от 60^0 и е успоредна на диагоналите на координатната мрежа. Неравенството $x + y \leqq c$ определя полуравнината относно правата $x + y = c$, в която се намира началото O на координатната система.

Сечението на двете ивици и полуравнината определя дефиниционното множество на задачата. Като вземем предвид горните три условия, достигаме до извода, че:

1) ако сборът на числата a и b е по-малък или равен на числото c, то дефиниционното множество на задачата е **успоредник** OACB, за който върховете имат координати съответно: O(0; 0), A(a; 0), B(0; b), C(a; b);

2) ако сборът на числата a и b е по-голям от числото c, то дефиниционното множество на задачата е част от успоредник (**петоъгълник**) OAMNB, за който върховете имат координати съответно: O(0;0), A(a; 0), M(a; $c - a$), N($c - b$; b), B(0; b).

След като е построено дефиниционното множество, е необходимо да се уточни как да бъдат моделирани геометрично действията (преливанията), които имаме право да извършваме. В случая става дума за преливане от един съд в друг, т.е. за преминаване на ситуацията от едно състояние (**точка**) към друго състояние (**точка**). Това преминаване от една точка към друга може да се представи чрез **насочена отсечка**, началото на която е първото състояние (точка), а краят – следващото състояние (точка). Насочената отсечка, която представя преливането, ще наречем **лъч на преливане**, а начупената линия, получена от насочените отсечки, ще наречем **траектория на преливането**.

Като вземем предвид, че началното състояние на Поасоновата ситуация е състоянието (точката), при което и двата по-малки съда са празни, т.е. началното състояние се представя с точката O(0; 0), която е върху контура, а всяко следващо състояние се постига чрез преливане, след което поне един от по-малките съдове е пълен или празен, то достигаме до извода, че различните състояния на ситуацията се моделират само с точки от **контура** на дефиниционното множество (успоредник или петоъгълник). Тъй като всяко преливане означава свързване (с **насочена отсечка**) на две състояния (точки), то всеки лъч на преливане ще има както начало, така и край само точки (с целочислени координати) от контура на дефиниционното множество.

Сега да вземем предвид и това, че действията (преливанията) могат да бъдат само три вида: преливане от най-големия съд в средния съд и обратно; преливане от най-големия съд в най-малкия съд и обратно; преливане от средния съд в най-малкия съд и обратно. На първия вид преливане отговаря движение на лъча по направлението на оста Ox; на втория вид преливане отговаря движение на лъча по направлението на оста Oy; на третия вид преливане отговаря движение на лъча по направлението на малкия диагонал на мрежата. (Движение на лъча на преливане по направлението на големия диагонал на мрежата не би могло да има, защото това би означавало едновременно увеличаване (или намаляване) на течността и в двата по-малки съда. А последното не е възможно.)

Остава още една (важна) подоробност, която е необходимо да уточним, а именно принципът за насочване на лъча. Както става видно от статията на Перелман, **принципът за насочване на лъча се определя от закона за „отражение на билярдната топка“, според който „ъгълът на отражението е**

равен на ъгъла на падането". Като вземем предвид, че при движение в ромбоидната мрежа „топката" пада върху стената винаги под ъгъл 60^0, то и ъгълът на отражение винаги е 60^0. (На практика, този принцип означава, че лъчът на преливане се движи само в три направления – в направлението *Ox*, в направлението *Oy* или в „диагонално" направление – само по малкия диагонал).

Тъй като формата на дефиниционното множество (както беше казано по-горе) на задачата в общия случай зависи от вместимостите на отделните съдове, то за по-голяма яснота ще разделим задачите на две групи в зависимост от това дали дефиниционното множество е успоредник, или петоъгълник.

3.2. Задачи, чието дефиниционно множество е успоредник

В тази точка ще представим моделите на задачи от първата група, т.е. задачи, при които сборът от вместимостите на по-малките съдове е равен или е по-малък от вместимостта на най-големия съд, т.е.

$a + b \leqq c$.

Още в началото можем да направим някои общи бележки за геометричната форма на дефиниционното множество на задачите от тази група.

Нека първоначално да построим успоредника OACB, чиито върхове имат координати съответно O(0; 0), A(a; 0), C(a; b), B(0; b).

В този случай за правата $x + y = c$ има две възможности. Първата възможност е правата $x + y = c$ да има само една обща точка с успоредника OACB (и това е точката C(a; b), когато е налице случаят $a + b = c$). Втората възможност е правата да няма обща точка с успоредника OACB (когато е налице $a + b < c$). Това означава, че и в двата случая дефиниционното множество на задачата е **успоредникът** OACB и съответно контурът на дефиниционното множество е контурът на успоредника OACB.

Сега преминаваме към конкретните задачи.

Задача 1. *Разполагаме с три съда: голям – от* 10 *литра, среден – от* 7 *литраq и малък – от* 3 *литра. Големият съд е пълен с течност, а другите два са празни. По какъв начин само с помощта на трите съда може да се раздели течността на две равни части* (*по 5 литра всяка*)? *С колко преливания може да стане разделянето?*

Решение

Подготвителен етап

Построяваме координатна система с начало точката O и координатни оси Ox и Oy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 1а). Тъй като вместимостта на пълния съд е равна на сбора fj вместимостите на празните съдове, то дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е успоредник OACB, за който страната OA има дължина 7 единици, а страната OB – 3 единици. Тогава върховете на успоредника имат координати съответно – O(0; 0), A(7; 0), B(0; 3), C(7; 3). С това е построена затворената начупена линия OACBO, изградена от страните OA, AC, CB и BO на успоредника OACB. (Правата с уравнение $x + y = 10$ е успоредна на малките диагонали на ромбоидната мрежа, минава през върха C(7; 3) и не пресича успоредника във вътрешна точка). И така, успоредникът OACB определя дефиниционното множество на задачата, страните на този успоредник определят контура на това множество.

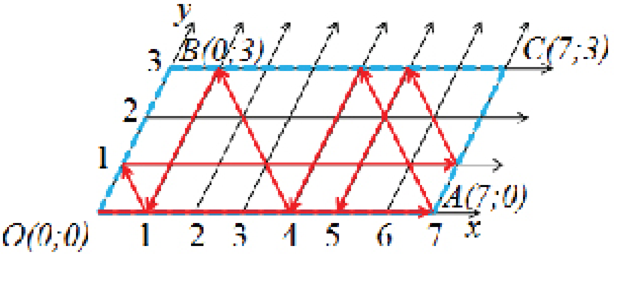
Същински етап

След като е подготвено дефиниционното множество и е очертан неговият контур, можем да преминем към следващия етап от решението, а именно построяване траекторията на преливане. В случая при очертаване на траекторията спазваме принципа на Перелман за движението на лъча на преливане, т.е. принципа за отражение (на светлинен лъч) – „ъгълът на отражение е равен на ъгъла на падане“.

Първи начин: решението започва с напълването на средния съд, т.е. насочваме лъча на преливане по дългата страна на успоредника, т.е. от точката O към точката A (фиг. 1а).

След като достигне точката A(7; 0), лъчът ще се отрази от контура AC и ще се насочи по диагонала (7; 0) – (4; 3). След като достигне точката (4; 3), лъчът ще се отрази от контура BC и ще се насочи по отсечката (4; 3) – (4; 0), която е успоредна на страната AC. След като достигне точката (4; 0), лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по диагонала (4; 0) – (1; 3). След като достигне точката (1; 3), лъчът ще се отрази от контура CB и ще се насочи по отсечката (1; 3) – (1; 0). След като достигне точката (1; 0), лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по диагонала (1; 0) – (0; 1). След като достигне точката (0; 1), лъчът ще се отрази от контура AC и ще се насочи по отсечката (0; 1) – (7; 1), която е успоредна на страната OA. След като достигне точката (7; 1), лъчът ще се отрази от контура AC и ще се насочи по диагонала (7; 1) – (5; 3). След като достигне точката (5; 3), лъчът ще се отрази от контура BC и ще се насочи по отсечката (5; 3) – (5; 0), която е успоредна на страната AC.

След достигане на лъча в точката (5; 0), преливането трябва да бъде прекратено, тъй като в средния съд има 5 литра и в големия съд има 5 литра, т.е. течността е разделена на две равни части, с което задачата е решена.



Фигура 1а

Накратко решението може да бъде представено в таблица (табл. 1а).

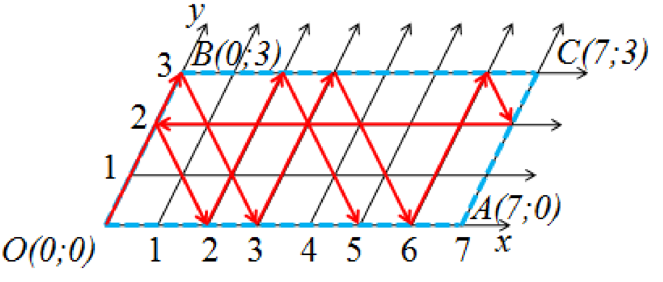
Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
10 литра	10	3	3	6	6	9	9	2	2	5
7 литра	0	7	4	4	1	1	0	7	5	5
3 литра	0	0	3	0	3	0	1	1	3	0

Таблица 1а

Отговор. За достигане на решение на задачата по този начин са необходими 9 преливания.

Втори начин: решението започва с напълването на малкия съд, т.е. насочваме лъча на преливане по късата страна на успоредника, т.е. от точката A към точката C.

Траекторията на лъча в този случай е представена на фиг. 1б, а съответните състояния – на табл 1б.



Фигура 1б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
10 литра	10	7	7	4	4	1	1	8	6	5	5
7 литра	0	0	3	3	6	6	7	0	2	2	5
3 литра	0	3	0	3	0	3	2	2	2	3	0

Таблица 1б

Отговор. По този начин за решението на задачата са необходими 10 преливания, т.е. с едно преливане повече, отколкото по първия начин.

Задача 2. *Разполагаме с 3 съда*: *голям – от* 12 *литра, среден – от* 7 *литра, и малък – от* 5 *литра. Големият съд е пълен с течност, а другите два са празни. По какъв начин само с помощта на трите съда може да се раздели течността на две равни части* (*по* 6 *литра всяка*)? *С колко преливания може да стане разделянето*?

Решение

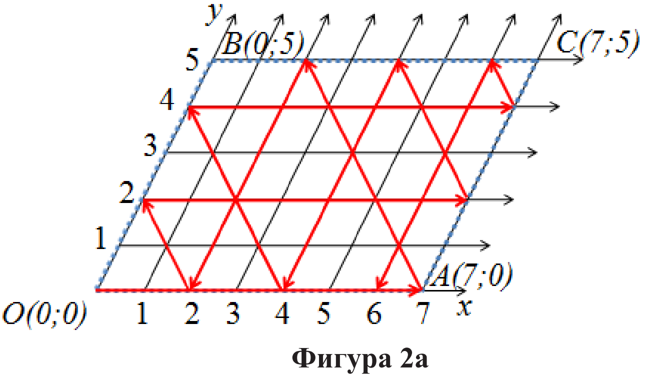
Подготвителен етап

Построяваме координатна система с начало точката O и координатни оси Ox и Oy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 2а). Тъй като вместимостта на пълния съд е равна на сбора на вместимостите на празните съдове, то дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е успоредник OACB, за който страната OA има дължина 7 единици, а страната OB – 5 единици. Тогава върховете на успоредника имат координати съответно – O(0; 0), A(7; 0), B(0; 5), C(7; 5). С това е построена затворената начупена линия OACBO, изградена от страните OA, AC, CB и BO на успоредника OACB. (Правата с уравнение $x + y = 12$ е успоредна на малките диагонали на ромбоидната мрежа, минава през върха C(7; 5) и не пресича успоредника във вътрешна точка). И така, успоредникът OACB определя дефиниционното множество на задачата, а страните на този успоредник определят контура на това множество.

Същински етап

Първи начин: решението започва с напълването на средния съд, т.е. насочваме лъча на преливане по дългата страна на успоредника, т.е. от точката O към точката A.

В този случай траекторията на лъча е представена на фиг. 2а, а съответните състояния – на табл. 2а.



Фигура 2а

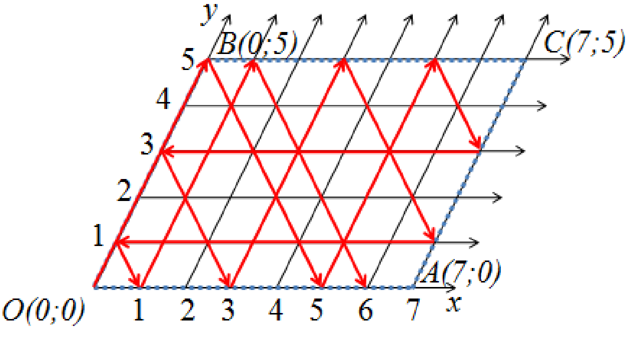
Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
12 литра	12	5	5	10	10	3	3	8	8	1	1	6
7 литра	0	7	2	2	0	7	4	4	0	7	6	6
5 литра	0	0	5	0	2	2	5	0	4	4	5	0

Таблица 2а

Отговор. За достигане до решение на задачата по този начин са необходими 11 стъпки (преливания).

Втори начин: решението започва с напълването на малкия съд, т.е. насочваме лъча на преливане по късата страна на успоредника, т.е. от точката О към точката В.

В този случай траекторията на лъча е представена на фиг. 2б, а съответните състояния – на табл 2б.



Фигура 2б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
12 литра	12	7	7	2	2	9	9	4	4	11	11	6	6
7 литра	0	0	5	5	7	0	3	3	7	0	1	1	6
5 литра	0	5	0	5	3	3	0	5	1	1	0	5	0

Таблица 2б

Отговор. За достигане на решението на задачата по този начин са необходими 12 преливания, т.е. с 1 преливане повече, отколкото по първия начин.

В следващите две задачи сборът от вместимостите на празните (по-малките) съдове е по-малък от вместимостта на пълния (най-големия) съд.

Задача 3. *Петър разполага с три кани с вместимост* 3, 8 *и* 14 *литра, при което каната от* 14 *литра е пълна със сок, а другите две са празни. Как, без да използва други съдове, а само като прелива от съд в съд, Петър може да раздели сока на две равни части* (*по* 7 *литра всяка*)?

Решение

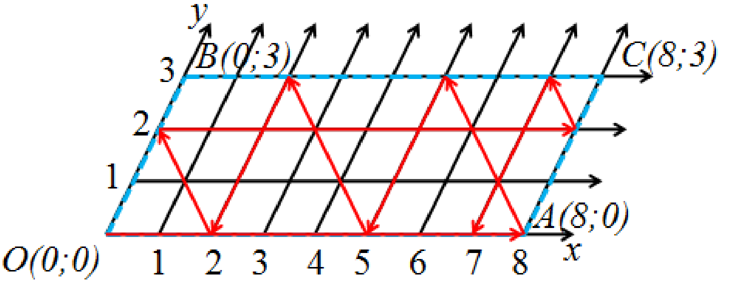
Подготвителен етап

Построяваме координатна система с начало точката О и координатни оси Оx и Оy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 3а). Тъй като вместимостта на пълния съд е по-голяма от сбора на вместимостите на празните съдове, то дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е успоредник OACB, за който страната OA има дължина 8 единици, а страната OB – 3 единици. Тогава върховете на успоредника имат координати съответно – O(0; 0), A(8; 0), B(0; 3), C(8; 3). С това е построена затворената начупена линия OACBO, изградена от страните OA, AC, CB и BO на успоредника OACB. (Правата с уравнение $x + y = 14$ е успоредна на малките диагонали на ромбоидната мрежа и няма обща точка с успоредника OACB, в това число и точка от контура. В този случай успоредникът е разположен изцяло в полуравнината относно правата $x + y = 14$, в която се намира началото на координатната система.) И така, успоредникът OACB определя дефиниционното множество на задачата, а страните на този успоредник определят контура на това множество.

Същински етап

Първи начин: решението започва с напълването на средния съд, т.е. насочваме лъча на преливане по дългата страна на успоредника, т.е. от точка O към точка A.

Прекратяваме преливането, когато лъчът достигне точката (7; 0), тъй като в този момент задачата е решена. Траекторията на лъча е показана на фиг. 3а, а съответните състояния са нанесени в табл. 3а.



Фигура 3а

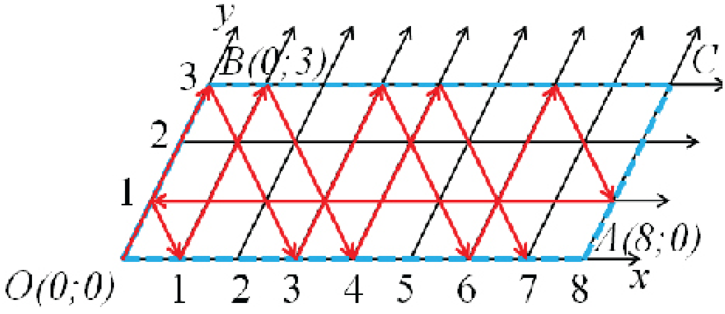
Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
14 литра	14	6	6	9	9	12	12	4	4	7
8 литра	0	8	5	5	2	2	0	8	7	7
3 литра	0	0	3	0	3	0	2	2	3	0

Таблица 3а

Отговор. За достигане до решение на задачата по този начин са необходими 9 преливания.

Втори начин: решението започва с напълването на малкия съд, т.е. насочваме лъча на преливане по оста OB.

Траекторията на лъча е показана на фиг. 3б, а съответните състояния са нанесени в таблица 3б.



Фигура 3б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
14 литра	14	11	11	8	8	5	5	13	13	10	10	7	7
8 литра	0	0	3	3	6	6	8	1	0	1	4	4	7
3 литра	0	3	0	3	0	3	1	0	1	3	0	3	0

Таблица 3б

Отговор. За достигане на решение на задачата по този начин са необходими 12 преливания, т.е. с 3 повече от преливанията по първия начин.

Задача 4. *Двама овчари трябвало да си разделят поравно 22 литра мляко, което било в съд от 22 литра. Разполагали с още два съда – единият от 12 литра, другият – от 7 литра. Как могат да си разделят млякото двамата овчари, като използват тези три съда*?

Решение

Подготвителен етап

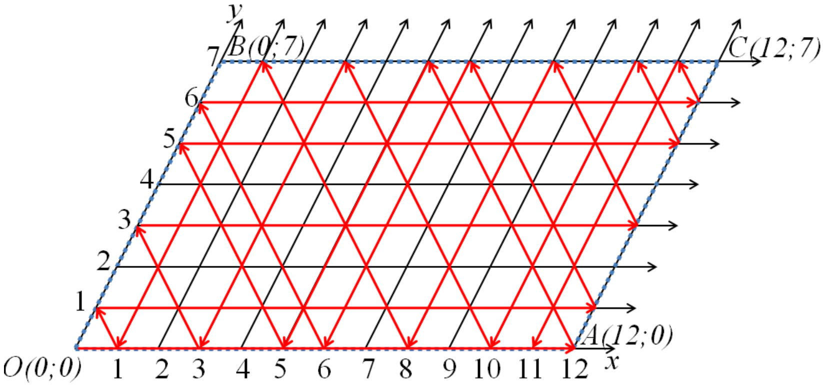
Построяваме координатна система с начало точката O и координатни оси Ox и Oy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 4а). Тъй като вместимостта на пълния съд е по-голяма от сбора на вместимостите на празните съдове, то дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е успоредник OACB, за който страната OA има дължина 12 единици, а страната OB – 7 единици. Тогава върховете на успоредника имат координати съответно – O(0; 0), A(12; 0), B(0; 7), C(12; 7). С това е построена затворената начупена линия OACBO, изградена от страните OA, AC, CB и BO на успоредника OACB. (Правата с уравнение $x + y = 22$ е успоредна на малките диагонали на ромбоидната мрежа и не пресича успоредника OACB нито във вътрешна точка, нито в точка от контура). И така, успоредникът OACB определя дефиниционното множество на задачата, а страните на този успоредник очертават контура на това множество.

Същински етап

Първи начин: решението започва с напълването на средния съд, т.е. насочваме лъча на преливане по дългата страна на успоредника, т.е. от точка O към точка A.

Прекратяваме преливането, когато лъчът достигне точката (11; 11), тъй като в този момент задачата е решена.

Траекторията на лъча на преливане е показана на фиг. 4а, а съответните състояния – в табл. 4а.



Фигура 4а

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
22 литра	22	10	10	17	17	5	5	12	12	19	19	7	7	14
12 литра	0	12	5	5	0	12	10	10	3	3	0	12	8	8
7 литра	0	0	7	0	5	5	7	0	7	0	3	3	7	0

Таблица 4а

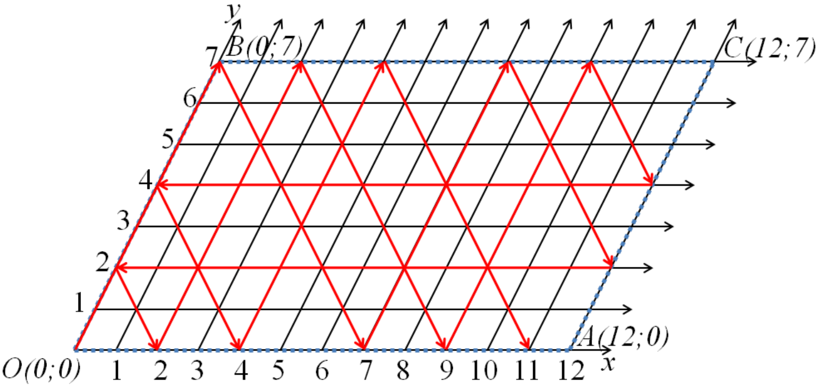
Състояние	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI	XXII	XXIII
22 литра	14	21	21	8	8	16	16	4	4	11
12 литра	1	1	0	12	6	6	0	12	11	11
7 литра	7	0	1	1	7	0	6	6	7	0

Таблица 4а (продължение)

Отговор. При този начин за достигане на решение на задачата са необходими 23 преливания.

Втори начин: започваме преливането с напълване на малкия съд, т.е. насочваме лъча на преливане по оста AC.

Траекторията на лъча в този случай е показана на фиг. 4б, а съответните състояния са нанесени в таблица 4б.



Фигура 4б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV
22 литра	22	15	15	8	8	20	20	13	13	6	6	18	18	11	11
12 литра	0	0	7	7	12	0	2	2	9	9	12	0	4	4	11
7 литра	0	7	0	7	2	2	0	7	0	7	4	4	0	7	0

Таблица 4б

Отговор. За достигане на решение на задачата по този начин са необходими 14 преливания, т.е. с 9 преливания по-малко, отколкото по първия начин.

3.3. Задачи, чието дефиниционно множество е петоъгълник

В тази точка ще разгледаме решенията на две задачи, при които сборът от вместимостите на празните (по-малките) съдове е по-голям от вместимостта на пълния (най-големия) съд, т.е.

$a + b > c$

Още в началото можем да направим някои общи бележки за геометричната форма на дефиниционното множество на задачите от тази група.

Нека първоначално да построим успоредника OACB, чиито върхове имат координати съответно O(0; 0), A(a; 0), C(a; b), B(0; b).

В този случай, правата $x + y = c$ пресича контура на успоредника OACB в точките M и N с координати, съответно M (a; $c - a$) и N($c - b$; b) и отсича ΔMNC. По този начин дефиниционното множество на задачата остава **пето-ъгълникът** OAMNB, а контурът на дефиниционното множество е контурът на петоъгълника OAMNB.

Сега да преминем към конкретни задачи.

Задача 5. *Разделете наполовина съдържанието на течност в съд с вместимост* 12 *литра, като си служите с два празни съда с вместимост* 9 *литра и* 5 *литра.*

Решение

Подготвителен етап

Построяваме координатна система с начало точката O и координатни оси Ox и Oy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 5а). Тъй като вместимостта на пълния съд е по-малка от сбора на вместимостите на празните съдове, дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е петоъгълник OAMNB, за който страната OA има дължина 9 единици, а страната OB – пет единици, страната AM – три единици (12 – 9 = 3), страната NB – седем единици (12 – 5 = 7). Тогава върховете на петоъгълника имат координати съответно: O(0; 0), A(9; 0), B(0; 5), M(9; 3), N(7; 5). С това е построена затворената начупена линия OAMNBO, изградена от страните OA, AM, MN, NB и BO на петоъгълника OAMNB. (Страната MN е отсечка от правата с уравнение $x + y = 12$ и е успоредна на диагоналите на мрежата.)

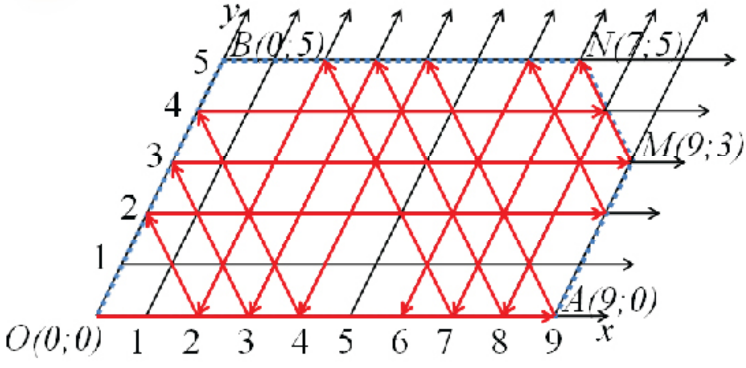
Същински етап

Първи начин: започваме решението, като насочваме лъча по оста *Ox* от точката O(0;0) към точката A(9; 0) – (фиг. 5а).

След като достигне точката A(9; 0), лъчът ще се отрази от контура AM и ще се насочи по диагонала (0; 9) – (4; 5). След достигане на точката (4; 5) лъчът ще се отрази от контура BN и ще се насочи по отсечката (4; 5) – (4; 0). След достигане на точката (4; 0) лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по диагонала (4; 0) – (0; 4). След достигане на точката (0; 4) лъчът ще се отрази от контура OB и ще се насочи по отсечката (0; 4) – (8; 4). След достигане на точката (8; 4) лъчът ще се отрази от контура MN и ще се насочи по страната (8; 4) – (8; 0). След достигане на точката (8; 0) лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по отсечката (8; 0) – (4; 3). След достигане на точката (4; 3) лъчът ще се отрази от контура NB и ще се насочи по отсечката (4; 3) – (3; 0). След достигане на точката (3; 0) лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по диагонала (3; 0) – (0; 3). След достигане на точката (0; 3) лъчът ще се отрази от контура OB и ще се насочи по отсечката (0; 3) – (9; 3). След достигане на точката (9; 3) лъчът ще се отрази от контура AM и ще се насочи по диагонала (9; 3) – (7; 5), т.е. по контура MN. След достигане на точката N(7; 5) лъчът ще се отрази от контура BN и ще се насочи по отсечката (7; 5) – (7; 0). След достигане на точката (7; 0) лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по диагонала (7; 0) – (2; 5). След достигане на точката (2; 5) лъчът ще се отрази от контура BN и ще се насочи по отсечката (2; 5) – (2; 0). След достигане на точката (2; 0) лъчът ще се отрази от контура OA и ще се насочи по диагонал (2; 0) – (0; 2).

След достигане на точката (0; 2) лъчът ще се отрази от контура OB и ще се насочи по отсечката (0; 2) – (9; 2). След достигане на точката (9; 2) лъчът ще се отрази от контура AM и ще се насочи по диагонал (9; 2) – (6; 5). След достигане на точката (6; 5) лъчът ще се отрази от контура BN и ще се насочи по отсечката (5; 6) – (6; 0).

След достигане на лъча в точката (6; 0) преливането трябва да спре, защото задачата е решена – в големия съд има 6 литра и в средния съд има 6 литра, т.е. течността е разделена на две равни части.



Фигура 5а

В този случай траекторията на лъча е представена на фиг. 5а, а съответните преливания – в табл 5а.

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
12 литра	12	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5
9 литра	0	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2
5 литра	0	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5

Таблица 5а

Състояние	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
12 литра	10	10	1	1	6
9 литра	2	0	9	6	6
5 литра	0	2	2	5	0

Таблица 5а (продължение)

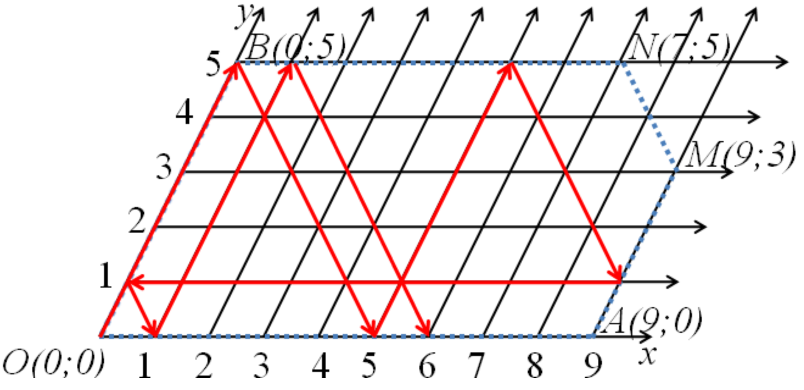
Отговор. За достигане до решение на задачата по този начин са необходими 18 стъпки (преливания).

Втори начин: друго решение на задачата може да бъде намерено, като „лъчът на преливане“ бъде пуснат в движение от точката O(0; 0) по посоката на оста OB (фиг. 5б).

Като достигне точката B(0; 5), лъчът ще се отрази от контура NB и ще се насочи по диагонала (0; 5) – (5; 0). След достигане на точката (5; 0) ще се отрази от контура OA и ще се насочи по отсечката (5; 0) – (5; 5), която е успоредна на страна AM. След като достигне точката (5; 5), лъчът ще се отрази от контура BN и ще се насочи по диагонала (5; 5) – (9; 0). След достигане на контура в точката A(9; 0) лъчът ще се отрази и ще се насочи по отсечката (9; 0) – (0; 1), която е успоредна на страна OA. След достигане на контура в точката (9; 0) лъчът ще се отрази и ще се насочи по диагонала (0; 1) – (1; 0). След достигане на контура OB в точката (1; 0) лъчът ще се отрази и ще се насочи по отсечка (1; 0) – (1; 5). След достигане на контура BN в точката (1; 5) лъчът ще се отрази и ще се насочи по диагонала (1; 5) – (6; 0).

След достигане на лъча в точката (6; 0) преливането трябва да бъде прекратено, тъй като в средния съд има 6 литра и в големия съд има 6 литра, т.е. течността е разделена на две равни части, с което задачата е решена.

Състоянията на ситуацията в този случай са нанесени в табл. 5б.



Фигура 5б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
12 литра	12	7	7	2	2	11	11	6	6
9 литра	0	0	5	5	9	0	1	1	6
5 литра	0	5	0	5	1	1	0	5	0

Таблица 5б

Коментар. При втория начин, когато лъчът на преливане започва своето движение по късата страна, преливанията, които са необходими за разделянето на виното, са 8, които са по-малко от преливанията по първия начин (когато бяха 18). С други думи, решението, намерено по втория начин, е по-кратко от решението по първия начин.

Задача 6. *Рибарят Стоян разполага с три аквариума с вместимости 14 литра, 11 литра и 5 литра. Най-големият от тях е пълен с вода. Как може да раздели водата на две равни части, като се използват само тези три аквариума?*

Решение

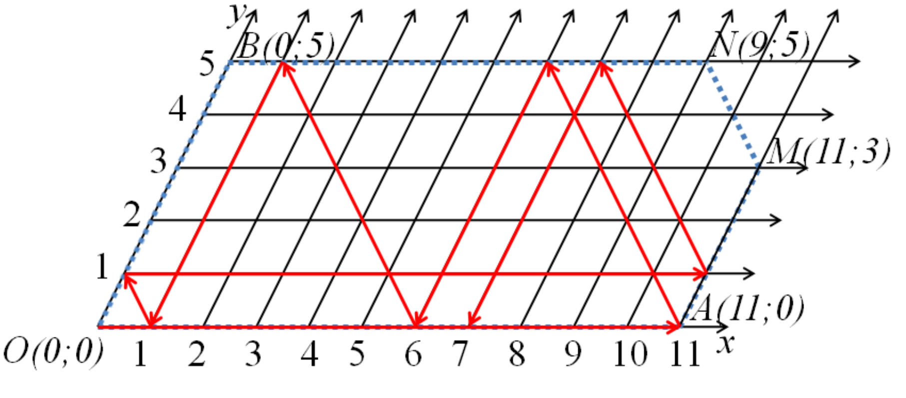
Подготвителен етап

Построяваме координатна система с начало точката O и координатни оси Ox и Oy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 6а). Тъй като вместимостта на пълния съд е по-малка от сбора на вместимостите на празните съдове, то дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е петоъгълник OAMNB, за който страната OA има дължина 11 единици, а страната OB – пет единици, страната AM – три единици (14 – 11 = 3), страната NB – девет единици (14 – 5 = 9). Тогава върховете на петоъгълника имат координати съответно: O(0; 0), A(11; 0), B(0; 5), M(11; 3), N(9; 5) С това е построена затворената начупена линия OAMNBO, изградена от страните OA, AM, MN, NB и BO на петоъгълника OAMNB. (Страната MN е отсечка от правата с уравнение $x + y = 14$ и е успоредна на диагоналите на мрежата.)

Същински етап

Първи начин: решението започва с преливане от най-големия в средния съд, т.е. насочваме лъча на преливане по дългата страна OA на контура.

На фиг. 6а е представена траекторията на преливане, а в табл. 6а са нанесени и съответните състояния, до които се достига след извършените преливания.



Фигура 6а

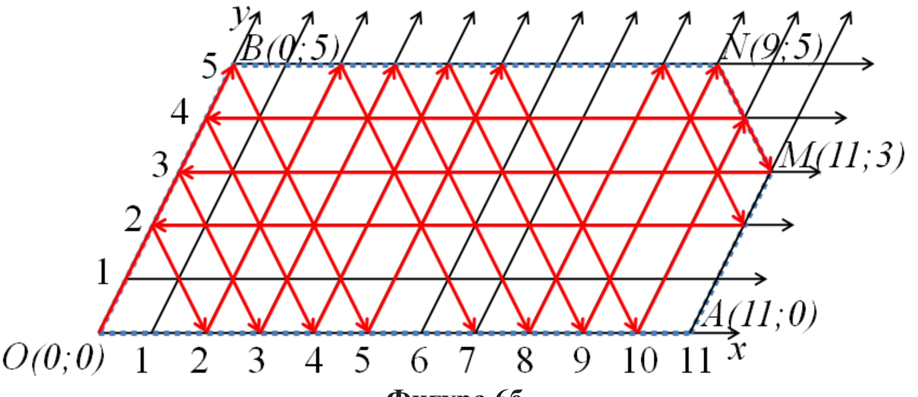
Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
14 литра	14	3	3	8	8	13	13	2	2	7
11 литра	0	11	6	6	1	1	0	11	7	7
5 литра	0	0	5	0	5	0	1	1	5	0

Таблица 6а

Отговор. За достигане на решение на задачата по този начин са необходими 9 преливания.

Втори начин: решението започва с преливане от най-големия в най-малкия съд, т.е. насочаваме лъча на преливане по оста ОВ.

На фиг. 6б е представена траекторията на преливане, а в табл. 6б са нанесени съответните данни (състояния) след съответните преливания.



Фигура 6б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
14 литра	14	9	9	4	4	0	10	10	5	5	0	0	11	11
11 литра	0	0	5	5	10	10	0	4	4	9	9	11	0	3
5 литра	0	5	0	5	0	4	4	0	5	0	5	3	3	0

Таблица 6б

Състояние	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
14 литра	6	6	1	1	12	12	7	7
11 литра	3	8	8	11	0	2	2	7
5 литра	5	0	5	2	2	0	5	0

Таблица 6б (продължение)

Отговор. За достигане до решение на задачата по този начин са необходими 21 преливания.

4. Коментар върху принципа на Перелман при задачите, чието дефиниционно множество е петоъгълник

Да се върнем отново към задачите, чието дефиниционно множество е петоъгълник.

Отначало да коментираме задача 5 (за съдове с вместимости съответно 12, 9 и 5).

1. Ако сравним решението на Перелман (първи начин) и решението на Поасон, веднага ще забележим, че решението на Поасон е по-кратко – решението на Поасон се реализира чрез 13 преливания, докато решението на Перелман – чрез 18 преливания.

Ако съпоставим по-внимателно таблиците на решенията на Перелман и на Поасон (табл. 7а и табл. 7б), ще открием, че и при двете решения първите 5 хода (преливания) са идентични. Също така и при двете решения последните 8 хода (преливания) също са идентични. Двете решения се различават по това, че шестото, седмото, осмото, деветото и десетото преливане от решението на Перелман липсват в решението на Поасон. С други думи, задачата допуска „пълна“ и „съкратена“ траектория на решение (табл. 7а и табл. 7б).

„Пълна“ траектория на решение

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII
12 литра	12	3	3	8	8	0	4	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6
9 литра	0	9	4	4	0	8	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 литра	0	0	5	0	4	4	0	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0

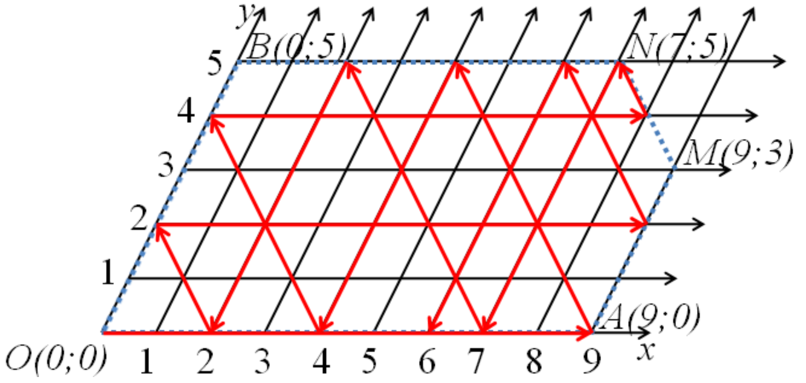
Таблица 7а

„Съкратена“ траектория на решение

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V						VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
12 литра	12	3	3	8	8	0						0	5	5	10	10	1	1	6
9 литра	0	9	4	4	0	8						7	7	2	2	0	9	6	6
5 литра	0	0	5	0	4	4						5	0	5	0	2	2	5	0

Таблица 7б

Ако решението на Поасон бъде моделирано върху ромбоидната мрежа (фиг. 7), ще се види, че след като лъчът на преливане е попаднал в точката (8; 4) (която се намира на контура MN, определен от секущата права с уравнение $x + y = 12$), вместо да се насочи към точката (8; 0) по правилото на Перелман (ъгълът на отражение е равен на ъгъла на падане), лъчът се „приплъзва“ по контура MN (в посока от M към N) и достига контура BN в точката N(7; 5). В следващите 8 хода до края на решението лъчът на преливане следва траекторията на Перелман. На фигурата ясно се виждат „пълната“ и „съкратената“ траектория на решение на задачата.

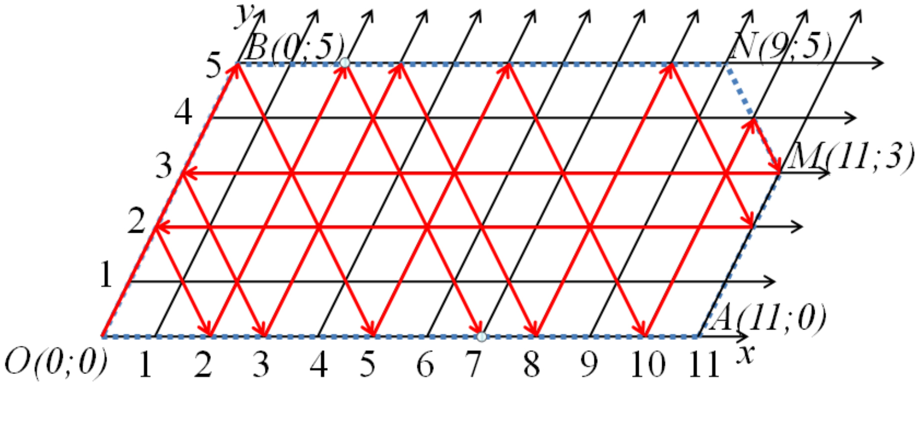


Фигура 7

Сега да коментираме задача 6 (за съдове с вместимости съответно 14, 11, 5).

2. Да разгледаме решението по метода на Перелман (втори начин).

Отначало да проследим траекторията на Перелман до точката (10; 4), която се намира върху контура MN, определен от секущата права с уравнение $x + y = 14$ (фиг. 8). Сега, вместо да насочим лъча на преливане към точката (0; 4) (по правилото на Перелман), да „приплъзнем“ лъча по контура NM от точката (11; 3) към точката M(11; 3), в която ще достигнем контура AM. След това да продължим по траекторията на Перелман, т.е. да преминем последователно през точките: (0; 3), (3; 0), (3; 5), (8; 0), (8; 5), (11; 2), (0; 2), (2;5), (7; 0). По този начин достигаме до решение на задачата, което е по-кратко от решението на Перелман, тъй като последното „прескача“ 5 от стъпките по траекторията на Перелман. С други думи, задачата допуска две траектории на решение – „пълна“ и „съкратена“ (фиг. 8).



Фигура 8

Двете траектории на решение са показани съответно и на табл. 8а, и табл. 8б.

„Пълна“ траектория на решение

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
14 литра	14	9	9	4	4	0	10	10	5	5	0	0	11	11	6	6	1	1	12	12	7	7
11 литра	0	0	5	5	10	10	0	4	4	9	9	11	0	3	3	8	8	11	0	2	2	7
5 литра	0	5	0	5	0	4	4	0	5	0	5	3	3	0	5	0	5	2	2	0	5	0

Таблица 8а

„Съкратена“ траектория на решение

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V						VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI
14 литра	14	9	9	4	4	0						0	11	11	6	6	1	1	12	12	7	7
11 литра	0	0	5	5	10	10						11	0	3	3	8	8	11	0	2	2	7
5 литра	0	5	0	5	0	4						3	3	0	5	0	5	2	2	0	5	0

Таблица 8б

Направените в тази точка коментари ни дават основание да направим някои **изводи**, свързани с оптимизиране на решението на Поасоновата задача.

Нека Поасоновата задача има за дефиниционно множество петоъгълник и нека траекторията на решение, построено по правилото на Перелман, минава през вътрешна точка от контура на секущата права. Тогава траекторията на решението може да бъде „съкратена“, като лъчът на преливане във въпросната точка от контура бъде насочен не по правилото на Перелман, а по правилото на **„приплъзване“** по контура. По този начин траекторията на решението се „съкращава“ с няколко хода. Последните изводи могат да се имат предвид, когато се търси оптимално решение на задачата на Перелман.

5. Коментари по отношение на случаи на нерешимост на задачата на Поасон

Както се вижда от изложеното по-горе, примерните задачи от преливане на течности, с които до този момент е представен методът на Перелман, имат решение. Изниква въпрос дали има задачи на Поасон, които не са решими, и дали по метода на Перелман това може да се установи. В тази точка ще отговорим утвърдително и на двата въпроса.

5.1. Две задачи на Поасон, които нямат решение

Задача 7. *Да се раздели на две равни количества млякото в пълен* 8 *литров съд, ако се разполага с още два празни съда* – 6-*литров и* 3-*литров.*

Решение

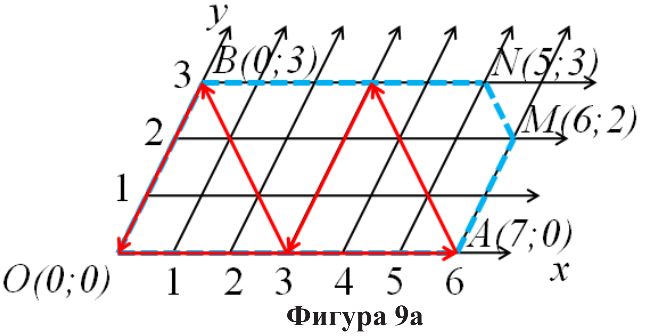
При тази задача сборът от вместимостите на двата празни съда е по-голям от вместимостта на пълния съд, т.е. дефиниционното множество е петоъгълник.

Построяваме координатна система с начало точката O и координатни оси Ox и Oy, които сключват ъгъл 60^0. Върху координатната система построяваме ромбоидна мрежа (фиг. 9а). Тъй като вместимостта на пълния съд е по-малка от сбора на вместимостите на празните съдове, то дефиниционната област на задачата (фигурата на преливане) в случая е петоъгълник OAMNB, за който страната OA има дължина 6 единици, а страната OB – 3 единици, страната AM – 2 единици (8 – 6 = 2), страната NB – 5 единици (8 – 3 = 5). Тогава върховете на петоъгълника имат координати съответно: O(0; 0), A(6; 0), B(0; 3), M(6; 2), N(5; 3). С това е построена затворената начупена линия OAMNBO, изградена от страните OA, AM, MN, NB и BO на петоъгълника OAMNB. (Страната MN е отсечка от правата с уравнение $x + y = 8$ и е успоредна на диагоналите на мрежата.)

I случай: започваме преливането по оста *Ox* от точката O към точката A, (фиг. 9а).

Като построим траекторията на лъча на преливане по метода на Перелман, ще видим, че след петото преливане лъчът отново се връща в началото O(0; 0), без да премине през точката (4; 0). (Съответните състояния са нанесени в табл. 9а.)

Връщането на лъча в начално положение, без да премине през точката (4; 0), означава, че по този начин не може да бъде намерено решение.



Фигура 9а

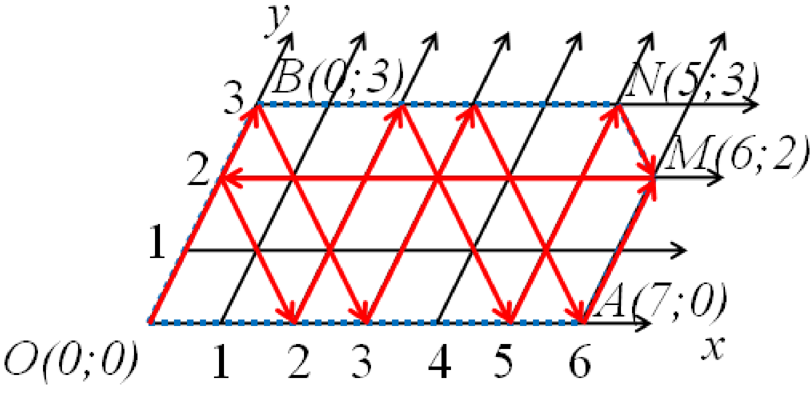
Състояние	Н.	I	II	III	IV	V
8 литра	8	2	2	5	5	8
6 литра	0	6	3	3	0	0
3 литра	0	0	3	0	3	0

Таблица 9а

II случай: започваме преливането по оста *Oy* от точката O към точката B.

Като построим траекторията на лъча на преливане по метода на Перелман (фиг. 9б), ще видим, че след единадесетото преливане лъчът отново попада в точката M(6; 2), в която вече е бил, без да мине през точката (4; 0). (Съответните преливания са нанесени в табл. 9б.)

Връщането на лъча в точката M(6; 2) означава, че лъчът се „завърта в цикъл“ и никога няма да мине през точката (4; 0), т.е. по този начин не може да се намери решение.



Фигура 9б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
8 литра	8	5	5	2	2	0	6	6	3	3	0	0
6 литра	0	0	3	3	6	6	0	2	2	5	5	6
3 литра	0	3	0	3	0	2	2	0	3	0	3	2

Таблица 9б

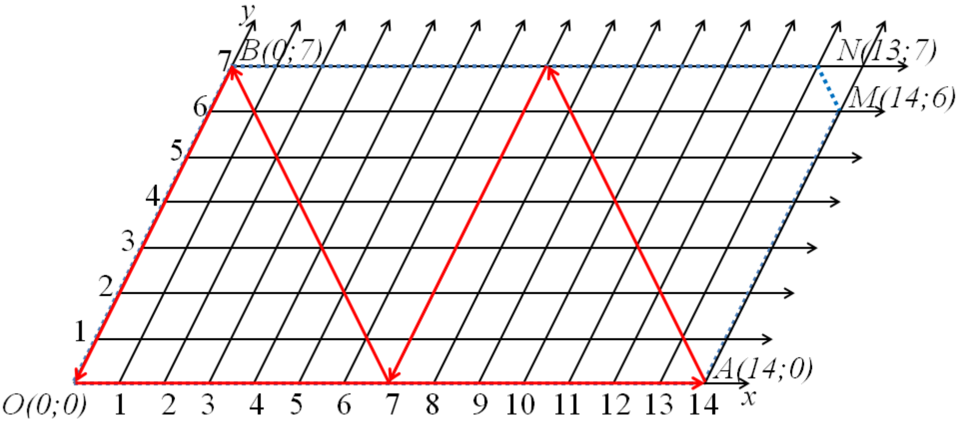
Тъй като както в първия, така и във втория случай не съществува траектория на преливане, минаваща през точката (4; 0), то задачата няма решение.

Задача 8. *Пълният съд съдържа* 20 *л, а другите два съда имат вместимост съответно* 14 *л и* 7 *л. Да се отлее количество от* 10 *л.*

Решение

На фиг. 10а е показана траекторията на лъча, в случай че преливането започне от оста *Ox*. Вижда се, че лъчът се връща в началото O(0; 0) след 5 хода (преливания), без да мине през точката (10; 0). (Съответните преливания са нанесени в табл. 10а).

Това означава, че в този случай задачата няма решение.



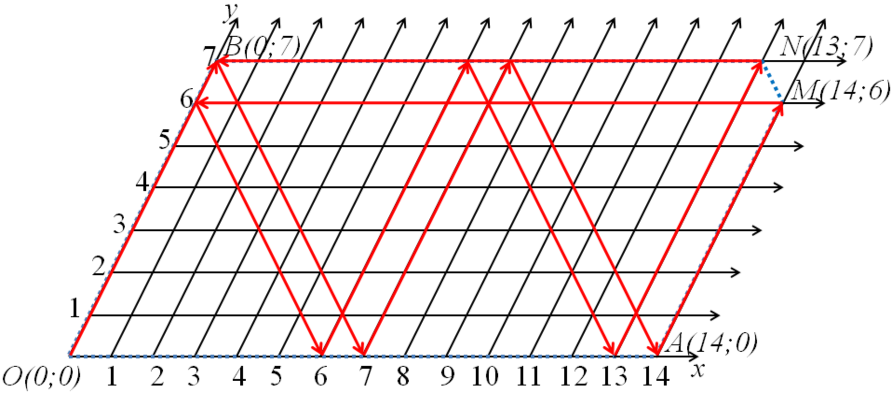
Фигура 10а

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V
20 литра	20	6	6	13	13	20
14 литра	0	14	7	7	0	0
7 литра	0	0	7	0	7	0

Таблица 10а

На фиг. 10б е показана траекторията на лъча, в случай че преливането започне от оста *Оу*. Вижда се, че лъчът се връща в началото O(0; 0) след 11 хода (преливания), без да мине през точката (10; 0). (Съответните състояния са нанесени в табл. 10б).

Това означава, че в този случай задачата няма решение.



Фигура 10б

Състояние	Н.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
20 литра	20	13	13	6	6	0	14	14	7	7	0	13
14 литра	0	0	7	7	14	14	0	6	6	13	13	0
7 литра	0	7	0	7	0	6	6	0	7	0	7	7

Таблица 10б

Случай I и случай II показват, че задачата няма решение.

5.2. Една хипотеза за условия, при които задачата на Поасон няма решение.

По пътя на емпиричната индукция достигнахме до следната хипотеза за някои от случаите, при които задачата на Поасон няма решение.

Да формулираме още веднъж **задачата.** Нека най-големият съд има вместимост c, средният съд има вместимост a и най-малкият съд има вместимост b, където числата a, b и c са естествени числа, $b < a < c$ и c е четно число. Най-големият съд е пълен с течност, а другите два са празни. Да се раздели течността на две равни количества, като се използва преливане само с помощта на трите съда.

Хипотеза 1: ако числата *a* и *b* не са взаимно прости и числото *c* е взаимно просто с едно от тях и не е взаимно просто с другото, то задачата няма решение.

Както се вижда, задачите 7 и 8 се включват в условията на направената хипотеза.

Освен това хипотезата е потвърдена в още 20 случая на Поасонови задачи, които са поместени в таблицата по-долу. В таблицата са поместени и бройките преливания, след което започва „зациклянето“, когато решението се търси с начало по оста *Ox* и по оста *Oy* съответно.

Вместимост			**Брой преливания, след който започва зацикляне, като се започне от средния съд**	**Брой преливания, след който започва зацикляне, като се започне от малкия съд**
пълен съд	**среден съд**	**малък съд**		
8 л	6 л	3 л	5	11
10 л	6 л	3 л	5	6
12 л	10 л	5 л	5	11
14 л	9 л	6 л	19	19
14 л	10 л	5 л	5	11

14 л	12 л	3 л	9	19
16 л	9 л	6 л	10	10
16 л	10 л	5 л	5	6
16 л	12 л	3 л	9	10
16 л	14 л	7 л	5	11
16 л	12 л	9 л	25	7
18 л	10 л	5 л	5	6
18 л	14 л	7 л	5	11
20 л	12 л	3 л	9	10
20 л	12 л	9 л	13	27
20 л	14 л	7 л	5	11
20 л	15 л	3 л	11	12
20 л	18 л	3 л	13	27
20 л	18 л	9 л	5	11
10 л	9 л	6 л	17	7

6. Заключителни бележки

Методът на Перелман е интересен пример за неочаквано и ефикасно приложение на математически знания в практическа ситуация, която на пръв поглед няма нищо общо с математическия модел. От методологическа гледна точка, методът на Перелман е важен с това, че показва широката приложимост на математиката, а от дидактическа гледна точка, допринася за потвърждаване на разбирането, че математиката се изучава не толкова чрез показване, колкото чрез конструиране (правене). Преподаването на метода предпоwлага наличие на елементарни аналитико-геометрични знания (от учителя) и „прилични“ чертожни умения (от ученика). Той е достъпен за всички възрасти, в това число и прогимназиалната (а защо не и началната), като събужда „здраво“ математическо любопитство у учениците.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

Arnaudov, P., L. Arnaudova & A. Hovanskii (1966). *Useful and amusing mathematics*. Sofia: Narodna prosveta. [Арнаудов, П., Л Арнаудова & А. Хованский (1966). *Полезна и забавна математика.* София: Народна просвета.]

Varbanova, M. (2013). *Structure-functional modelling in primary school mathematics*. Plovdiv: Astarta. [Върбанова, М. (2013) *Структурно-функционално моделиране в началната училищна математика*. Пловдив: Астарта.

Ganchev, I., K. Chimev & J. Stoyanov (1987). *Mathematical folklore*. Sofia: Narodma prosveta. [Ганчев, И., К. Чимев & Й. Стоянов (1987). *Математически фолклор*. София: Народна просвета.]

Gardner, M. (1972). *Mathematical leisure time*. Moscow: Mir. [Гарднер, М. (1972). *Математические досуги*. Москва: Мир.]

Geler, V., H. Kestner & Z. Noiber (1983). *Mathematical encyclopedea dictionary*. Sofia: Nauka I izkustvo. [Гелерт, В., Х. Кестнер & З. Нойбер (1983). *Математически енциклопедичен речник*. София: Наука и изкуство.]

Grozdev, S. (2013). Synergetic strategies in problem solving. The synergetic approach in Higher eucation on examples from the Didactics of mathematics. Veliko Tarnovo: Slovo. [Гроздев, С. (2013). Синергетични стратегии за решаване на задачи. *Синергетичният подход във висшето образование върху примери от дидактика на математиката*. Велико Търново: Слово.]

Lalchev, Z. (2009). *Mathematics in problems and methods. Book I for the primary school teacher.* Sofia: University Printing House "St. Climent Ohridski". [Лалчев, З. (2009). *Математика в задачи и методи. Книга* 1 *за учителя в началните класове*. София: Университетско издателство „Св. Климент Охридски".]

Lalchev, Z., M. Varbanova & I. Voutova (2009). Perelman's Geometric Method of Solving Liquid Pouring Problems. *Proceeding of the 6th Mediterranean Conference in Mathematics Education*, 22 – 26 *April* 2009, *Plovdiv*, *Bulgaria*, 182 – 190.

POISSON′SAMUSINGPROBLEMSANDPERELMAN′SMETHOD FOR THEIR SOLUTION AND STUDY

Abstract. The subject of the paper is the Perelman's geometric method for solving and empiric study of a popular class of amusing problems called Poisson's problems. The main tool of investigation is a rhomboid net of a skew co-ordinate system. The problem situation is modeled geometrically and the solution of the problem is sought by the construction of "Pouring ray" trajectory in the net. The method is described in details by simple means of analytic geometry and is presented through 8 problems for pouring. Some comments and suggestions are made in order to optimize the solutions. Empirically, it is reached a probable hypothesis on the base of the solutions of specific problems in cases of non-solvability of the general problem accounting for its parameters. The work is constructed on one of the topics of the course on Amusing Mathematics targeted on students – futur teachers. It could be applied successfully in teaching Mathematics in "school" conditions during extra-curricular classes.

✉ **Prof. Dr. Zdravko Lalchev**
Faculty of Preschool and Primary Education
University of Sofia
69A, Shipchenski prohod Blvd.
1754 Sofia, Bulgaria
E-mail: zdravkol@abv.bg

✉ **Prof. Dr. Margarita Varbanova**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Veliko Tarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mvarbanova11@abv.bg

✉ **Mr. Miroslav Stoimirov, PhD student**
Faculty of Mathematics and Informatics
University of Veliko Tarnovo
3A, Arh. G. Kozarev Blvd.
5000 Veliko Tarnovo, Bulgaria
E-mail: mstoimirov@mail.bg