

ОЙЛЕРОВА ПРАВА И ОЙЛЕРОВА КРИВА НА ВПИСАН МНОГОЪГЪЛНИК В КОНИЧНО СЕЧЕНИЕ

Веселин Ненков, Даниел Ангелов
Технически колеж – Ловеч

Резюме. В статията се проследява последователното развитие на идеята за определяне на понятията Ойлерова права и Ойлерова окръжност на вписан в окръжност многоъгълник, която по естествен начин води до конструкция на Ойлерова права и Ойлерова крива за вписан в конично сечение многоъгълник. Изследванията на различните конфигурации са подпомогнати с програмния продукт THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP).

Keywords: conic, center of gravity, orthocenter, polygon, Euler line, Euler curve, GSP

1. Увод

Познатите Ойлерова права и Ойлерова окръжност на триъгълника притежават много свойства, свързани с триъгълника, на който принадлежат, както и с други фигури вследствие фрагментирането им на триъгълници. Някои такива свойства се изразяват с теоремата на Шифлер за конкурентност на Ойлерови прави, теоремата на Фойербах за допиране на Ойлеровата окръжност с вписаните в триъгълника окръжности и теоремата за конкурентност на Ойлеровите окръжности на четирите триъгълника, които се получават от страните и диагоналите на четириъгълник. Тези свойства, от своя страна, обогатяват геометрията на триъгълника и другите геометрични фигури, в които са включени съответните Ойлерови прави и Ойлерови окръжности.

Ойлерова права и Ойлерова окръжност притежава и вписаният в окръжност n -ъгълник ($n \geq 4$). Може би, тъй като не са известни много свойства на тези забележителни права и окръжност, те не са достатъчно популярни. Освен това конструирането на правата и окръжността на Ойлер при увеличаване на n става все по-трудно за извършване с класическите инструменти линийка и пергел. С помощта на някои от съвременните компютърни софтуерни средства конструирането и изследването на по-сложни геометрични обекти може значително да се опрости и улесни. Такъв софтуерен продукт е например THE GEOMETER'S SKETCHPAD (GSP). С помощта на GSP могат не само да се построят споменатите права и окръжност при различни стойности на $n \geq 4$,

но те могат да се обобщят и в по-сложни конфигурации, получаващи се при замяна на описаната около n -ъгълника окръжност с описано конично сечение. С помощта на динамичните възможности на GSP могат да се изследват получените конструкции и да се открият зависимости, които да подсказват идеи за доказване на наблюдаваните свойства.

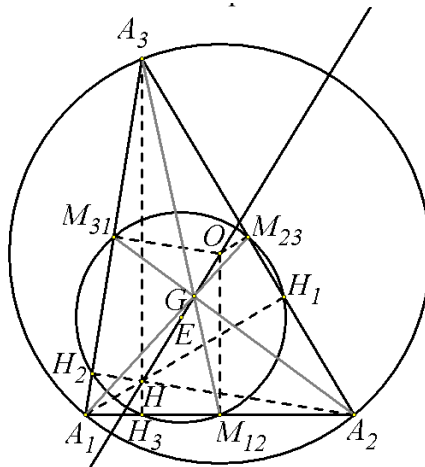
Като използваме възможностите на GSP, в следващите редове ще покажем как понятията Ойлерова права и Ойлерова окръжност могат да се обобщят за вписан в конично сечение n -ъгълник ($n \geq 3$). Преди това обаче накратко ще припомним понятията Ойлерова права и Ойлерова окръжност за триъгълник. След това по аналогия ще определим основните понятия, необходими за конструирането на Ойлерова права и Ойлерова окръжност на вписан в окръжност n -ъгълник ($n \geq 4$).

2. Ойлерова права и Ойлерова окръжност на триъгълник. Нека $A_1A_2A_3$ е произволен неравнобедрен триъгълник, а O , H и G са центърът на описаната окръжност, ортоцентърът и центърът на тежестта на $\Delta A_1A_2A_3$. Точките O , G и H лежат на една права, която се нарича права на Ойлер за $A_1A_2A_3$ (фиг. 1). Освен това са изпълнени равенствата

$$(1) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}),$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

(Равенството (1) е изпълнено и когато O е произволна точка в пространството.)



Фигура 1

Ако M_{12} , M_{23} и M_{31} са средите съответно на страните A_1A_2 , A_2A_3 и A_3A_1 , а H_1 , H_2 и H_3 са петите на височините съответно през върховете A_1 ,

A_2 и A_3 , то точките M_{12} , M_{23} , M_{31} , A_1 , A_2 и A_3 лежат на окръжност с център E , която се нарича *окръжност на Ойлер* за $\Delta A_1 A_2 A_3$ (фиг. 1). Освен това са изпълнени равенствата

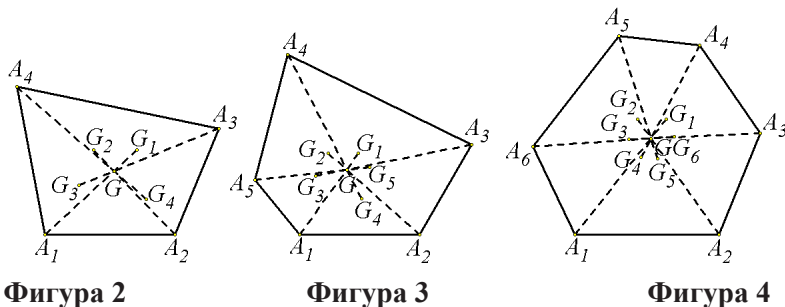
$$(3) \quad \overrightarrow{GE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO},$$

$$(4) \quad \overrightarrow{HE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}.$$

От (3) и (4) следва, че центърът E на Ойлеровата окръжност лежи върху правата на Ойлер. Освен това от (3) и (4) следва, че G и H са центрове на хомотетия за описаната и за Ойлеровата окръжност.

3. Ойлерова права и Ойлерова окръжност на вписан в окръжност многоъгълник. Преди да покажем по какъв начин се получават Ойлеровата права и Ойлеровата окръжност, е необходимо да определим понятията център на тежестта и ортоцентър на вписан многоъгълник като аналози на съответните понятия от геометрията на триъгълника.

3.1. Център на тежестта. Центърът на тежестта G на $\Delta A_1 A_2 A_3$ е пресечната точка на правите, свързващи върховете A_1 , A_2 и A_3 с центровете на тежестта на съответните им срещуположни страни $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ и $A_1 A_2$. За G е изпълнено равенството (1). Аналогично с помощта на GSP можем да свържем върховете A_1 , A_2 , A_3 и A_4 на четириъгълника $A_1 A_2 A_3 A_4$ с центровете на тежестта G_1 , G_2 , G_3 и G_4 съответно на триъгълниците $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_2 A_1$ и $A_1 A_2 A_3$ (фиг. 2). Установяваме, че правите $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, $A_3 G_3$ и $A_4 G_4$ минават през една точка G . С помощта на (1) получаваме и векторното равенство $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4})$ при произволна точка O в пространството. Получената по този начин точка G наричаме *център на тежестта (медицентър)* на четириъгълника $A_1 A_2 A_3 A_4$ (фиг. 2).



След това с помощта на GSP свързваме върховете A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и A_5 на петъгълника $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ с центровете на тежестта G_1 , G_2 , G_3 , G_4 и G_5

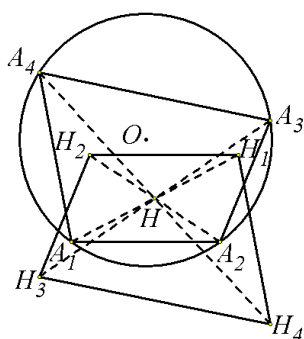
съответно на четириъгълниците $A_2 A_3 A_4 A_5$, $A_3 A_4 A_5 A_1$, $A_4 A_5 A_2 A_1$, $A_5 A_1 A_2 A_3$, и $A_1 A_2 A_3 A_4$ (фиг. 3). Установяваме, че правите $A_1 G_1$, $A_2 G_2$, $A_3 G_3$, $A_4 G_4$ и $A_5 G_5$ минават през една точка G , за която е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5})$ при произволна точка O в пространството. Точката G наричаме *център на тежестта (медицентър)* на *петоъгълника* $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ (фиг. 3). До подобни изводи стигаме и при разглеждането на шестоъгълник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ (фиг. 4). Така по индукция стигаме до извода, че ако $A_1 A_2 \dots A_n$ е произволен n -ъгълник, правата, свързваща върха A_i с центъра на тежестта G_i ($i = 1, \dots, n$) за $n-1$ -ъгълника, образуван от останалите върхове, минава през една точка G , за която е изпълнено векторното равенство

$$(5) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$$

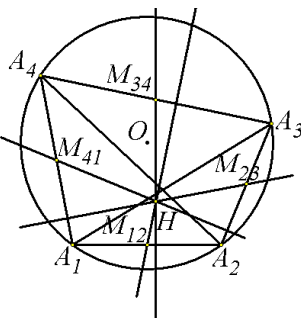
при произволна точка O в пространството.

Равенството (5) по естествен начин обобщава (1) и еднозначно определя точка G , която се нарича *център на тежестта (медицентър)* за n -ъгълника $A_1 A_2 \dots A_n$. Така за центъра на тежестта на n -ъгълника $A_1 A_2 \dots A_n$ имаме индуктивна конструкция за построяване и аналитично представяне с (5).

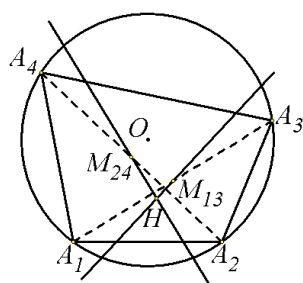
3.2. Ортоцентър. За определяне на ортоцентър на вписан в окръжност многоъгълник можем да приложим два подхода, основани на аналогии с построяването на центъра на тежестта. Първо разглеждаме вписан в окръжност четириъгълник $A_1 A_2 A_3 A_4$. Аналогично на конструирането на центъра на тежестта G на $A_1 A_2 A_3 A_4$ построяваме ортоцентровете H_1 , H_2 , H_3 и H_4 съответно на триъгълниците $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_2 A_1$ и $A_1 A_2 A_3$. След това построяваме правите $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$ и $A_4 H_4$. Забелязваме, че тези прави се пресичат в една точка H (фиг. 5). Нещо повече, четириъгълниците $A_1 A_2 A_3 A_4$ и $H_1 H_2 H_3 H_4$ са симетрични спрямо точката H (фиг. 5). Това наблюдение можем да изразим с векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\overrightarrow{HA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). По-нататък да обърнем внимание, че ортоцентърът на $\Delta A_1 A_2 A_3$ лежи върху правата, която минава през центъра на тежестта на върха A_i (който съвпада с A_i) и е перпендикулярна на правата, определена от останалите два върха на $\Delta A_1 A_2 A_3$. Това ни дава основание при $A_1 A_2 A_3 A_4$ да построим през центъра на тежестта на всяка от шестте двойки върхове (средите на свързващите ги отсечки) перпендикуляр към правата, определена от другата двойка върхове (фиг. 6). Оказва се, че получените шест прави се пресичат в същата точка H , получена при предишната конструкция (четириъгълниците $A_1 A_2 A_3 A_4$ на фиг. 5 и 6 са еднакви). Получената по този начин точка H наричаме *ортоцентър* на четириъгълника $A_1 A_2 A_3 A_4$ (фиг. 5, 6).



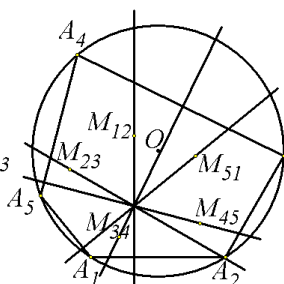
Фигура 5



Фигура 6



Фигура 7



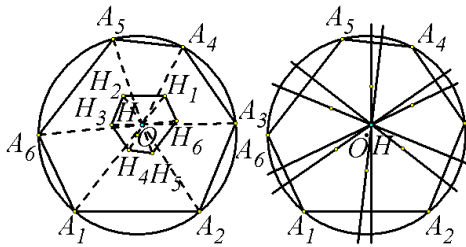
Фигура 8

По-нататък, следвайки опита от изследванията върху четириъгълника, разглеждаме вписан в окръжност петоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Построяваме ортоцентровете H_1, H_2, H_3, H_4 и H_5 съответно на четириъгълниците $A_2A_3A_4A_5, A_3A_4A_5A_1, A_4A_5A_2A_1, A_5A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$. Забелязваме, че правите $A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4$ и A_5H_5 минават през една точка H (фиг. 7). Освен това H е център на хомотетия за петоъгълниците $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $H_1H_2H_3H_4H_5$, като са изпълнени векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

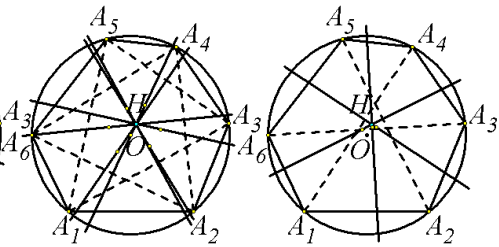
Подходът с центровете на тежестта се състои в следното: построяваме през центъра на тежестта на всеки от десетте триъгълника, образувани от върховете на $A_1A_2A_3A_4A_5$, права, перпендикулярна на страната, съдържаща останалите два върха на $A_1A_2A_3A_4A_5$. Тези десет прави се пресичат в същата точка H (фиг. 8). Точката H наричаме *ортоцентър* на $A_1A_2A_3A_4A_5$ (фиг. 7, 8).

По подобен начин разглеждаме и вписан в окръжност шестоъгълник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ако H_i е ортоцентърът на петоъгълника, образуван от върхо-

вете на $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ без A_i , правите A_iH_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) се пресичат в точка H (фиг. 9), която е център на хомотетия за шестоъгълниците $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$. Изпълнени са векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{HA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Освен това всяка от петнадесетте прави, минаваща през центъра на тежестта на четириъгълник, върховете на който са измежду точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 и A_6 , и перпендикулярна на страната, определена от останалите два върха, минава през същата точка H (фиг. 10). Точката H наричаме *ортоцентър* на $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (фиг. 9, 10).



Фигура 9



Фигура 10

Така по индукция получаваме, че за вписания в окръжност n -ъгълник $A_1A_2 \dots A_n$ съществува точка H , която притежава следните свойства:

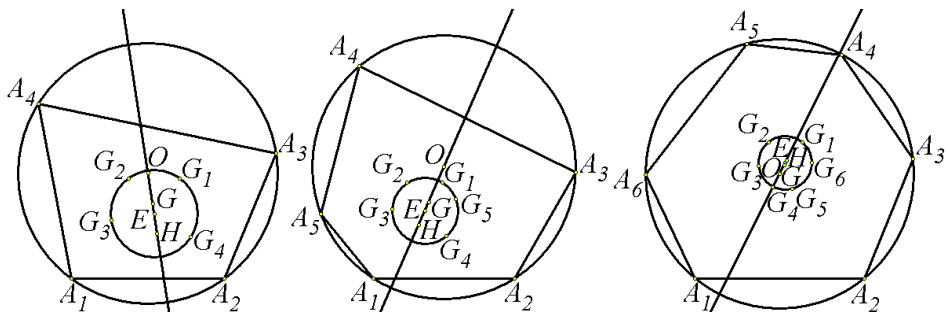
- 1) правите, минаващи през центровете на тежестта за $n-2$ -ъгълниците, образувани от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$, които са перпендикулярни на правите, свързващи останалите два върха, се пресичат в една точка H ;
- 2) ако H_i е ортоцентърът на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на A_i , то правите A_iH_i ($i = 1, 2, \dots, n$) се пресичат в H ;
- 3) изпълнени са векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{n-3}\overrightarrow{HA_i}$;
- 4) многоъгълникът $H_1H_2 \dots H_n$ е хомотетичен на $A_1A_2 \dots A_n$.

Ясно е, че 2) и 4) следват от 3).

3.3. Ойлерова права и Ойлерова окръжност. Ако $A_1A_2 \dots A_n$ е многоъгълник, вписан в окръжност с център O , наблюденията с GSP показват, че точките H , G и O лежат на една права, която се нарича *права на Ойлер* за $A_1A_2 \dots A_n$. На фиг. 11 са показани случаите при $n = 4, 5, 6$. По индукция се получава равенството $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{n-2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$. От това равенство и (5) следва, че

$$(6) \quad \overrightarrow{OH} = \frac{n}{n-2} \overrightarrow{OG},$$

Това доказва, че точките H , G , и O лежат на една права. От (6) при $n = 3$ се получава (2).



Фигура 11

Нека G_i е центърът на тежестта на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на A_i ($i=1, 2, \dots, n$). Наблюденията с GSP показват, че точките G_i ($i=1, 2, \dots, n$) лежат на окръжност, която се нарича *окръжност на Ойлер* за $A_1 A_2 \dots A_n$. На фиг. 11 са показани случаите при $n=4, 5, 6$. За центъра E на Ойлеровата окръжност е изпълнено векторното равенство $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{n-1}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$. Оттук, векторното равенство за H и (5) следват

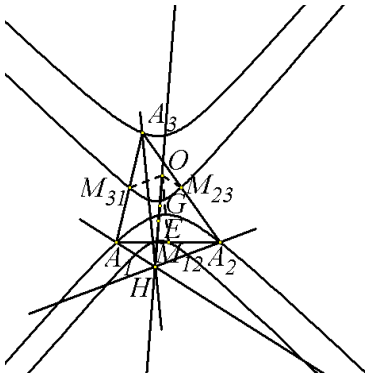
$$(7) \quad \overrightarrow{HE} = \frac{1}{n-1} \overrightarrow{HO},$$

$$(8) \quad \overrightarrow{GE} = -\frac{1}{n-1} \overrightarrow{GO}.$$

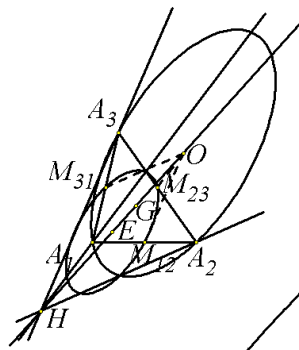
Равенствата (7) и (8) показват, че H и G са центрове на хомотетия за описаната и за Ойлеровата окръжност. От (7) и (8) при $n=3$ се получават съответно (3) и (4).

4. Ойлерова права и Ойлерова крива на триъгълник, зависещи от точка. Описаната за $\Delta A_1 A_2 A_3$ окръжност е само един елемент на безкрайното множество криви от конични сечения, описани около $\Delta A_1 A_2 A_3$. Нещо повече, ако O е произволна точка, нележаща на никоя от правите $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $M_{23} M_{31}$, $M_{31} M_{12}$ и $M_{12} M_{23}$ в равнината на $\Delta A_1 A_2 A_3$, то A_1 , A_2 и A_3 и съответните им симетрични спрямо O точки A'_1 , A'_2 и A'_3 лежат на крива от втора степен $\bar{k}(O)$ с център O (фиг. 12). По този начин точката O е аналог на центъра на описаната окръжност. По-нататък ще определим точка, която е аналог на ортоцентъра на $\Delta A_1 A_2 A_3$. Височините на $\Delta A_1 A_2 A_3$ са успоредни на правите, минаващи през центъра на описаната окръжност и точките M_{12} ,

M_{23}, M_{31} (фиг. 1). Това ни дава основание да построим в програмата GSP прави-
те, минаващи през върховете A_1, A_2 и A_3 и успоредни съответно на правите
 OM_{23}, OM_{31} и OM_{12} . Вижда се, че тези прави се пресичат в една точка H
(фиг. 12). Освен това, както и да променяме положението на O , разглеждани-
те прави винаги се пресичат в една точка. По този начин получаваме една спе-
циална точка H , свързана с точката O , която наричаме ортоид на $\Delta A_1 A_2 A_3$,
определен от центъра O на $\bar{k}(O)$. Оказва се, че ортоидът H притежава ред-
дица свойства, които са подобни на тези на ортоцентъра. Тези свойства са
описани подробно в (Grozdev & Nenkov, 2014). Едно от тези свойства се из-
разява с равенството (2). Следователно точките O, H и G лежат на една
права, която наричаме Ойлерова права на $\Delta A_1 A_2 A_3$, определена от описаната
крива $\bar{k}(O)$.



Фигура 12



Фигура 13

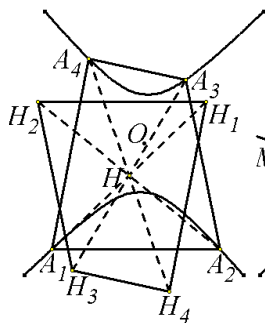
Както е показано в (Grozdev & Nenkov, 2014), точките M_{12}, M_{23}, M_{31} и
пресечните точки на правите A_1H, A_2H, A_3H с A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 лежат на
конично сечение Ω (фиг. 12), което наричаме Ойлерова крива на точката H
спрямо описаната крива $\bar{k}(O)$. Ако E е центърът на Ω , то са изпълнени
равенствата (3) и (4), като G и H са центрове на хомотетия за $\bar{k}(O)$ и
 Ω . Тези и други свойства на кривата Ω са описани подробно в (Grozdev &
Nenkov, 2014).

Параболите, описани около $\Delta A_1 A_2 A_3$, можем да разглеждаме като конични
сечения с безкрайни центрове (Mateev, 1977). Безкрайния център O на па-
раболата можем да определим с направлението на даден вектор $\vec{O}$ (фиг. 13).
Нека $\vec{O}$ е вектор, който не е колинеарен с никоя от правите A_1A_2, A_2A_3 и
 A_3A_1 . Съществува единствена парабола $\bar{k}(\vec{O})$, която минава през точките
 A_1, A_2, A_3 и има за ос права, колинеарна с $\vec{O}$ (допира се до безкрайната права
на равнината в безкрайната точка O) (Mateev, 1977). В този случай точката H

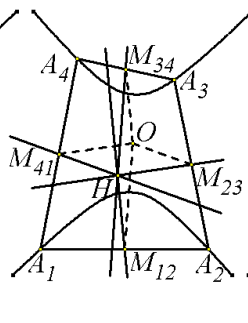
можем да разглеждаме като съвпадаща с безкрайния център на $k(\vec{O})$. Правата през G и колинеарна с $\vec{O}$, разглеждаме като *Ойлерова права* на $\Delta A_1 A_2 A_3$, зависеща от направлението $\vec{O}$ (или все едно зависеща от безкрайната точка O) (фиг. 13).

Съществува единствена парабола Ω , която минава през точките M_{12} , M_{23} , M_{31} и има за ос права, колинеарна с $\vec{O}$. Тази парабола наричаме *Ойлерова крива* на $\Delta A_1 A_2 A_3$, зависеща от направлението $\vec{O}$ (фиг. 13). Оказва се, че параболата Ω е хомотетична на $k(\vec{O})$ при хомотетия с център G и коефициент $-\frac{1}{2}$. Това и други свойства на кривата Ω са описани подробно в (Grozdev & Nenkov, 2014).

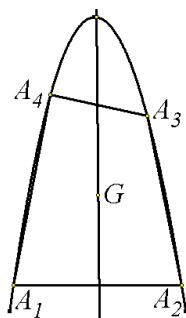
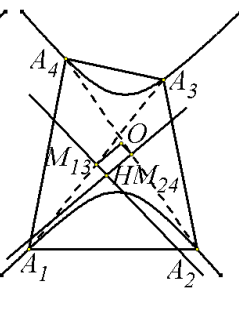
5. Ортоид и Ойлерова права на вписан в конично сечение многоъгълник. Нека първо разгледаме четириъгълник $A_1 A_2 A_3 A_4$, вписан в конично сечение $\bar{k}(O)$ с център O . Построяваме ортоидите H_1 , H_2 , H_3 и H_4 съответно на триъгълниците $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_2 A_1$ и $A_1 A_2 A_3$, определени от O . Забелязваме, че правите $A_1 H_1$, $A_2 H_2$, $A_3 H_3$ и $A_4 H_4$ се пресичат в една точка H (фиг. 14). Освен това четириъгълниците $A_1 A_2 A_3 A_4$ и $H_1 H_2 H_3 H_4$ са симетрични спрямо точката H (фиг. 14) и са изпълнени векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\overrightarrow{HA_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Затова точката H наричаме *ортоид* на $A_1 A_2 A_3 A_4$ спрямо O .



Фигура 14



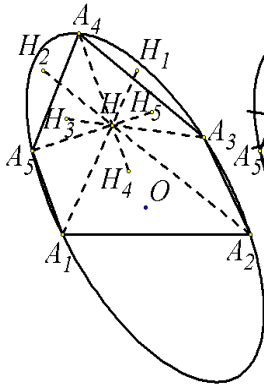
Фигура 15



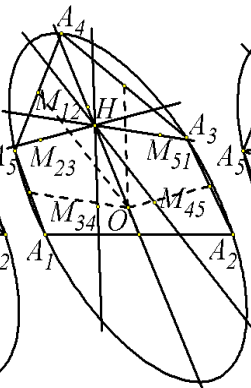
Фигура 16

По-нататък, аналогично на конструкцията на ортоид на триъгълника, извършваме следните построения: през центъра на тежестта на всяка двойка върхове на $A_1 A_2 A_3 A_4$ (средата на свързващата ги страна) построяваме права, успоредна на правата, минаваща през O и центъра на тежестта на останалата двойка върхове. Така се получават шест прави, които минават през вече получената точка H (фиг. 15).

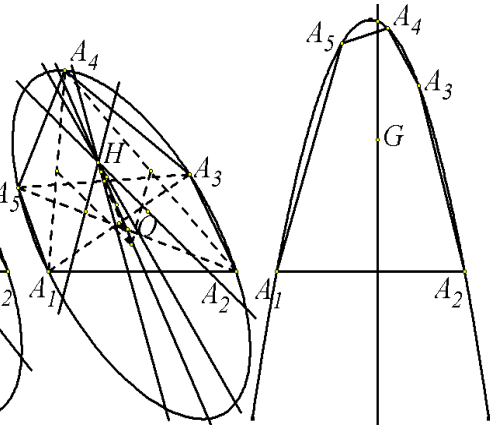
Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в парабола, под ортоид ще разбираме безкрайната точка на описаната парабола (фиг. 16). На фиг. 14, 15 и 16 четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ са еднакви.



Фигура 17



Фигура 18



Фигура 19

Аналогично, ако $A_1A_2A_3A_4A_5$ е петъгълник, вписан в конично сечение $\bar{k}(O)$ с център O , а H_1, H_2, H_3, H_4 и H_5 са ортоидите съответно на четириъгълниците $A_2A_3A_4A_5, A_3A_4A_5A_1, A_4A_5A_1A_2, A_5A_1A_2A_3$ и $A_1A_2A_3A_4$, то правите $A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4$ и A_5H_5 минават през една точка H (фиг. 17), която наричаме ортоид на $A_1A_2A_3A_4A_5$. Освен това H е център на хомотетия за петъгълниците $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $H_1H_2H_3H_4H_5$, като са изпълнени векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA_i} \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$. От друга страна, всяка права, минаваща през центъра на тежестта на триъгълник, образуван от върховете A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , и успоредна на правата, минаваща през O и средата на отсечката, определена от останалите два върха, минава през ортоида H (фиг. 18). Ако петъгълникът $A_1A_2A_3A_4A_5$ е вписан в парабола, под ортоид ще разбираме безкрайната точка на описаната парабола (фиг. 19).

Така по индукция получаваме, че за n -ъгълника $A_1A_2 \dots A_n$, вписан в конично сечение $\bar{k}(O)$ с център O , съществува точка H , която притежава следните свойства:

(*) правите, минаващи през центровете на тежестта за $n-2$ -ъгълниците, образувани от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$, които са успоредни на правите през O и средите на отсечките, определени от останалите два върха, се пресичат в една точка H ;

(**) ако H_i е ортоидът на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на A_i , то правите $A_i H_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) се пресичат в H ;

(***) изпълнени са векторните равенства $\overrightarrow{HH_i} = -\frac{1}{n-3}\overrightarrow{HA_i}$;

(****) многоъгълникът $H_1 H_2 \dots H_n$ е хомотетичен на $A_1 A_2 \dots A_n$.

Точката H , притежаваща изброените свойства, наричаме *ортоид* на $A_1 A_2 \dots A_n$.

Преди да докажем формулираните твърдения, трябва да отбележим, че (**) и (****) са непосредствени следствия от (***). Затова е достатъчно да докажем (***). Освен това при $n = 4$ в (****) хомотетията преминава в централна симетрия.

Проведените наблюдения показват, че за ортоида H е изпълнено векторното равенство (6). Затова формулираните твърдения ще бъдат доказани, ако ги проверим за точката H , удовлетворяваща (6). Нека G_{12} е центърът на тежестта за $A_3 \dots A_n$, а M_{12} е средата на $A_1 A_2$. Тогава $\overrightarrow{OG_{12}} = \frac{1}{n-2}(\overrightarrow{OA_3} + \dots + \overrightarrow{OA_n})$ и $\overrightarrow{OM_{12}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2})$. Затова от (6) следва $\overrightarrow{G_{12}H} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG_{12}} = \frac{1}{n-2}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}) = \frac{2}{n-2}\overrightarrow{OM_{12}}$. Следователно правата $G_{12}H$ е успоредна на OM_{12} . Аналогично се получава твърдение (*) и за останалите двойки успоредни прави. По-нататък ще докажем, че от (6) следва (***). Имаме

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HH_i} &= \overrightarrow{OH_i} - \overrightarrow{OH} = \frac{n-1}{n-3}\overrightarrow{OG_i} - \overrightarrow{OH} = \frac{n}{n-3}\overrightarrow{OG} - \frac{1}{n-3}\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OH} = \\ &= \frac{n-2}{n-3}\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OH} - \frac{1}{n-3}\overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{n-3}\overrightarrow{OH} - \frac{1}{n-3}\overrightarrow{OA_i} = -\frac{1}{n-3}\overrightarrow{HA_i}.\end{aligned}$$

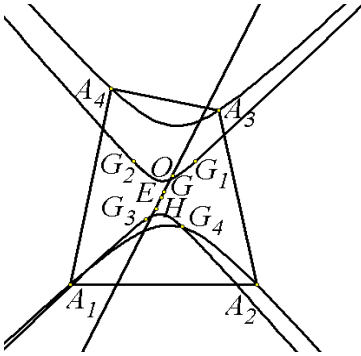
С това (***). е доказано.

От проведените разсъждения следва, че за ортоида е изпълнено равенството (6). Оттук получаваме, че точките H , G и O лежат на една права. Тази права наричаме *Ойлерова права на вписания в коничното сечение $k(O)$ многоъгълник $A_1 A_2 \dots A_n$* .

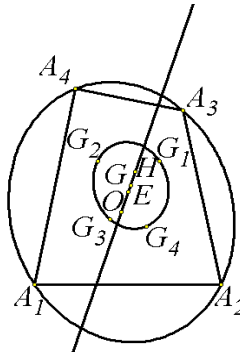
Ако многоъгълникът $A_1 A_2 \dots A_n$ е вписан в парабола, под ортоид ще разбирате безкрайната точка на описаната му парабола, а правата през медицентъра G , която е успоредна на оста на параболата, наричаме Ойлерова права на $A_1 A_2 \dots A_n$ (фиг. 16, 19, 21, 23).

Ойлерова крива на вписан в конично сечение многоъгълник. Нека четириъгълникът $A_1 A_2 A_3 A_4$ е вписан в конично сечение $k(O)$ с център O . Построяваме центровете на тежестта G_1 , G_2 , G_3 и G_4 съответно на триъгълниците $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_2 A_1$ и $A_1 A_2 A_3$. През точките G_1 , G_2 , G_3

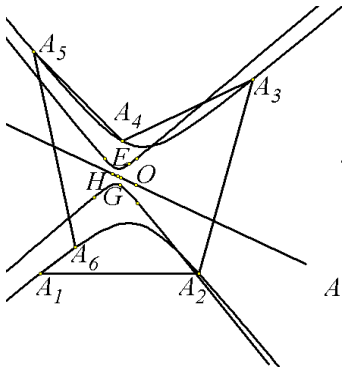
и G_4 минават безброй много конични сечения. От тях трябва да определим едно, което обобщава случая с вписан в окръжност четириъгълник. Тъй като $\overrightarrow{GG_i} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GA_i}$ ($i=1,2,3,4$), то четириъгълникът $G_1G_2G_3G_4$ е хомотетичен образ на $A_1A_2A_3A_4$ при хомотетия с център G и коефициент $-\frac{1}{3}$. Затова разглеждаме кривата Ω , която минава през точките G_1, G_2, G_3 и има за център точката E , определена с равенството $\overrightarrow{GE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$. От това определение следва, че Ω е хомотетична на $\bar{k}(O)$ при споменатата хомотетия и минава през G_4 . Кривата Ω наричаме Ойлерова крива на $A_1A_2A_3A_4$, определена от O . Трябва да се отбележи, че точката H също е център на хомотетия за $\bar{k}(O)$ и Ω .



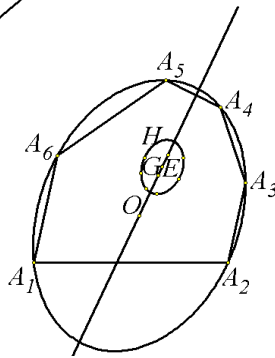
Фигура 20



Фигура 21



Фигура 22



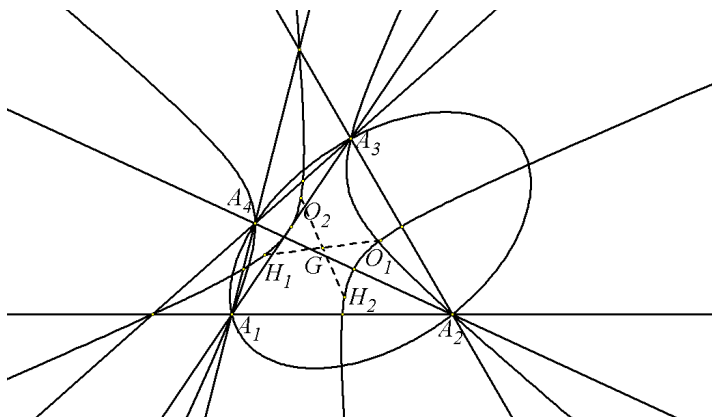
Фигура 23

Ако четириъгълникът $A_1A_2A_3A_4$ е вписан в парабола, точките G_1, G_2, G_3 и G_4 лежат на единствена парабола с ос, успоредна на оста на описаната парабола (фиг. 21). Тази парабола наричаме Ойлерова крива на $A_1A_2A_3A_4$. На фиг. 20 и 21 четириъгълниците $A_1A_2A_3A_4$ са еднакви.

Нека сега $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 5$) е многоъгълник, вписан в конично сечение $\bar{k}(O)$ с център O . Ако G_i е центърът на тежестта на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на A_i ($i=1, 2, \dots, n$), то са изпълнени равенствата $\overrightarrow{GG_i} = -\frac{1}{n-1} \overrightarrow{GA_i}$. Следователно $G_1G_2 \dots G_n$ е хомотетичен на $A_1A_2 \dots A_n$ при хомотетия с център G и коефициент $-\frac{1}{n-1}$. Аналогично се вижда, че ортоидът H на $A_1A_2 \dots A_n$ е център на хомотетия с коефициент $\frac{1}{n-1}$. Тъй като $A_1A_2 \dots A_n$ е вписан в $\bar{k}(O)$, то от хомотетичността следва, че $G_1G_2 \dots G_n$ също е вписан в крива Ω , центърът E на която удовлетворява равенствата (7) и (8). Кривата Ω наричаме Ойлерова крива на $A_1A_2 \dots A_n$ (фиг. 22).

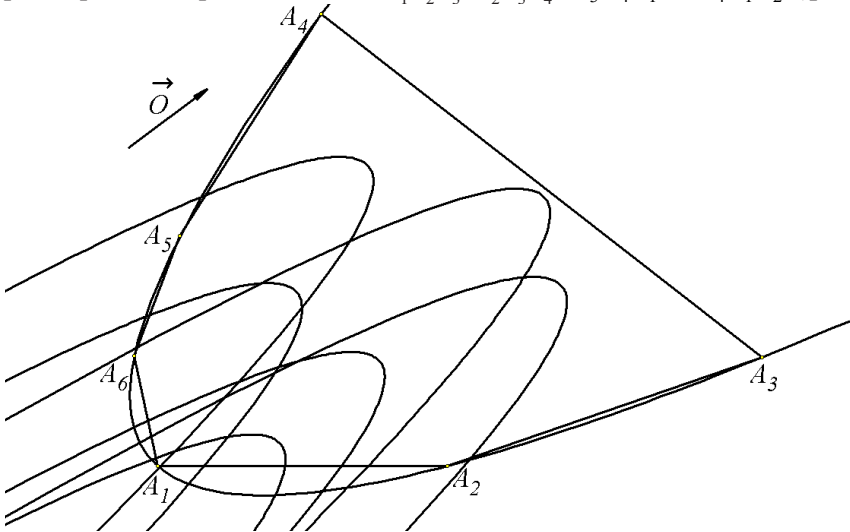
Ако многоъгълникът $A_1A_2 \dots A_n$ е вписан в парабола, точките $G_1, G_2, \dots, G_n$ лежат на единствена парабола с ос, успоредна на оста на описаната парабола (фиг. 23). Тази парабола наричаме Ойлерова крива на $A_1A_2 \dots A_n$.

5. Връзки на Ойлеровите криви с ортоида. Ортоидът лежи върху забележителната за $A_1A_2 \dots A_n$ права на Ойлер и има свойството да е център на хомотетия за описаната крива $\bar{k}(O)$ и кривата на Ойлер. Оказва се, че при $n \geq 4$ Ойлеровите криви на $n-1$ -ъгълниците, вписани в $\bar{k}(O)$, също притежават интересни свойства, свързани с ортоида на $A_1A_2 \dots A_n$.



Фигура 24

Случая с четириъгълник $A_1A_2A_3A_4$ ще отбележим отделно. Средите на шестте отсечки, свързващи точките A_1 , A_2 , A_3 и A_4 , лежат на една крива от втора степен Ω , която е Ойлерова крива на всеки от върховете на $A_1A_2A_3A_4$ спрямо триъгълника, образуван от останалите три върха. Както е показано в (Nenkov, 2011), центровете на всички описани около $A_1A_2A_3A_4$ конични сечения лежат върху Ω . Върху Ω се намират и безкрайните центрове на двете описани за $A_1A_2A_3A_4$ параболи, когато $A_1A_2A_3A_4$ е изпъкнал четириъгълник. В (Nenkov, 2011) е показано още, че центърът на тежестта G на $A_1A_2A_3A_4$ е център на Ω . Тъй като ортоидът H е точка, която е симетрична на центъра на пораждащата го описана крива, то H лежи върху Ω . Като вземем предвид и това, че ортоидът спрямо описана парабола е безкрайната точка на параболата, заключаваме: *всеки ортоид на четириъгълника $A_1A_2A_3A_4$ лежи върху общата Ойлерова крива на триъгълниците $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$ и $A_4A_1A_2$* (фиг. 24).



Фигура 25

Сега да разгледаме по-подробно случаите за многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$, когато $n \geq 5$. Първо да отбележим, че, ако $A_1A_2 \dots A_n$ е вписан в парабола, Ойлеровите криви на всички $n-1$ -ъгълници, образувани от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$, са параболи с оси, успоредни на оста на описаната парабола. Следователно: *всеки Ойлерови криви минават през ортоида на $A_1A_2 \dots A_n$* (фиг. 25).

Опитът от разглежданите случаи ни подсказва, че можем да очакваме подобно свойство на Ойлеровите криви за многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$, вписан в крива $\bar{k}(O)$ с център O при $n \geq 5$. Експериментите с GSP показват следните два резултата.

Твърдение 1. Ойлеровите криви на всички $n-1$ -ъгълници, образувани от върховете $A_1, A_2, \dots, A_n$ на вписания в конично сечение с център O многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$, са еднакви и минават през ортоида H на $A_1A_2 \dots A_n$ (фиг. 26).

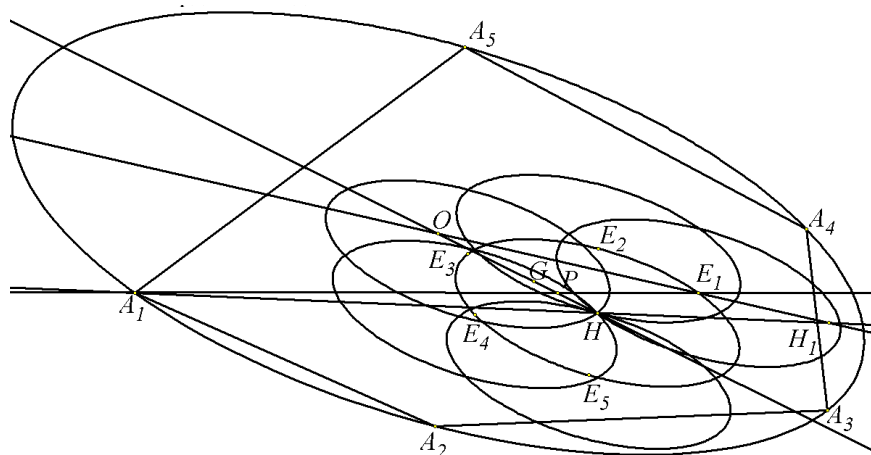
Твърдение 2. Центровете на Ойлеровите криви на всички $n-1$ -ъгълници, образувани от върховете $A_1, A_2, \dots, A_n$ на вписания в конично сечение с център O многоъгълник $A_1A_2 \dots A_n$, лежат на крива, която е еднаква с Ойлеровите криви и има за център ортоида H на $A_1A_2 \dots A_n$ (фиг. 26).

Първо да отбележим, че еднаквостта на Ойлеровите криви на $n-1$ -ъгълниците следва от хомотетичността им с описаната крива. Нека E_i е центърът на Ойлеровата крива Ω_i на $n-1$ -ъгълника, образуван от точките $A_1, A_2, \dots, A_n$ с изключение на върха A_i ($i=1, 2, \dots, n$). Ортоидът H_1 на $A_2 \dots A_n$ е център на хомотетия за Ω_1 и описаната крива $\bar{k}(O)$. Тъй като $A_2 \dots A_n$ е $n-1$ -ъгълник,

тази хомотетия има коефициент $\frac{1}{n-2}$. Затова $\overrightarrow{H_1E_1} = \frac{1}{n-2} \overrightarrow{H_1O}$. Оттук $\frac{n}{n-3} \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH_1} + \frac{1}{n-3} \overrightarrow{OA_1}$. Сега от (***) и (6) следва

$$\begin{aligned} \overrightarrow{H_1H} &= -\frac{1}{n-3} \overrightarrow{A_1H} = \frac{1}{n-3} (\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OH}) = \frac{1}{n-3} \overrightarrow{OA_1} - \frac{n}{(n-2)(n-3)} \overrightarrow{OG} = \\ &= \frac{1}{n-2} \overrightarrow{OA_1} - \frac{1}{n-2} \overrightarrow{OH_1} = \frac{1}{n-2} \overrightarrow{H_1A_1}. \end{aligned}$$

Следователно при разглежданата хомотетия точката A_1 от $\bar{k}(O)$ се изобразява в точката H от Ω_1 . По аналогичен начин се показва, че другите Ойлерови криви минават през H . С това твърдение 1 е доказано.



Фигура 26

Сега разглеждаме хомотетия с център точката P от Ойлеровата права, за която е изпълнено равенството $\overrightarrow{OP} = \frac{n}{n-2} \overrightarrow{OG}$. Тогава

$$\overrightarrow{PE_i} + \frac{1}{n-2} \overrightarrow{PA_i} = \overrightarrow{OE_i} - \overrightarrow{OP} + \frac{1}{n-2} \overrightarrow{OA_i} - \frac{1}{n-2} \overrightarrow{OP} = \frac{n}{n-2} \overrightarrow{OG} - \frac{n-1}{n-2} \overrightarrow{OP} = \vec{o}.$$

Оттук имаме $\overrightarrow{PE_i} = -\frac{1}{n-2} \overrightarrow{PA_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Следователно при разглежданата хомотетия точките A_i от $\bar{k}(O)$ се изобразяват в точките E_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Следователно точките E_i ($i = 1, 2, \dots, n$) лежат на една крива ω , хомотетична на $\bar{k}(O)$ с коефициент на хомотетия $\frac{1}{n-2}$. Но кривите Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) са хомотетични на $\bar{k}(O)$ със същия коефициент. Затова ω е еднаква с Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$). С това твърдение 2 е доказано.

6. Заключение. При проведените изследвания с помощта на аналогия и програмата GSP на всеки многоъгълник, вписан в конично сечение, съпоставихме Ойлерова права и Ойлерова крива, като естествени обобщения на известните ни от геометрията на триъгълника. Освен това триъгълниците и четириъгълниците притежават безкрайни множества от Ойлерови прави и съответните им Ойлерови криви. Според приложения подход на обобщение петогълникът притежава единствени Ойлерова права и Ойлерова крива, защото притежава единствено описано конично сечение.

REFERENCES / ЛИТЕРАТУРА

- Grozdev, S. & V. Nenkov (2014). Generalization of some classical theorems in the Geometry of the triangle. *Theoretical and applied aspects of Mathematics, Informatics and Education. Collections of the materials of the International Scientific Conference*, 35 – 54. Archangelsk: SAFU.
- [Гроздев, С. & В. Ненков (2014). Обобщения некоторых классических теорем геометрии треугольника. *Теоретические и прикладные аспекты математики, информатики и образования. Сборник материалов международной научной конференции*, 35 – 54. Архангельск: САФУ.]
- Nenkov, V. (2011). Set of the centers of the circumscribed conics of a quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, 4, 15 – 20. [Ненков, В. (2011). Множество на центровете на описаните за четириъгълник конични сечения. *Математика и информатика*, 4, 5 – 20.]
- Mateev, A. (1977). *Projective Geometry*. Sofia: Nauka i izkustvo. [Матеев, А. (1977). *Проективна геометрия*. София: Наука и изкуство.]

- Grozdev, S. & D. Dekov (2016). Computer Discovered Mathematics: Orthology Centers of the Euler Triangles. *Mathematics and Informatics*, 59 (5), 393 – 403. [Гроздев, С. & Д. Деков (2016). Математика, открита от компютър: центрове на ортология на Ойлеровите триъгълници. *Математика и информатика*, 59 (5), 393 – 403.]
- Sergeeva, T., M. Shabanova & S. Grozdev (2014). *Bases of the Dynamic geometry*. Moscow: ASOU, 160 pages (ISBN 978-5-91543-140-8). [Сергеева, Т., М. Шабанова & С. Гроздев. (2014). *Основы динамической геометрии*. Москва: АСОУ, Москва, 160 страницы (ISBN 978-5-91543-140-8).]
- Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevskа (2015). *Geometry of Complex Numbers*. Sofia: Arhimedes, 240 pages (ISBN 978-954-779-1886).

EULER LINE AND EULER CURVE OF AN INSCRIBED POLYGON IN A CONIC

Abstract. The paper follows the successive development of the idea to define the notions of Euler line and Euler curve of an inscribed polygon in a circle, which leads in a natural way to the construction of Euler line and Euler curve of an inscribed polygon in a conic. Various configurations are examined by the help of the computer program “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” (GSP).

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College, Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Mr. Daniel Angelov, Assist. Prof.**
Technical College, Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: dangelovbg@mail.bg