Educational Technologies
Образователни технологии

ГЕОМЕТРИЯ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА, ТОЧКА НА МИКЕЛ, ИНВЕРСНА ИЗОГОНАЛНОСТ

[1)]Веселин Ненков, [2)]Станислав Стефанов, Хаим Хаимов
[1)]Технически колеж – Ловеч
[2)]Технически университет – София

Резюме. В статията са описани някои свойства на точката на Микел за пълния четириъгълник и връзките ѝ с други забележителни точки на четириъгълника.

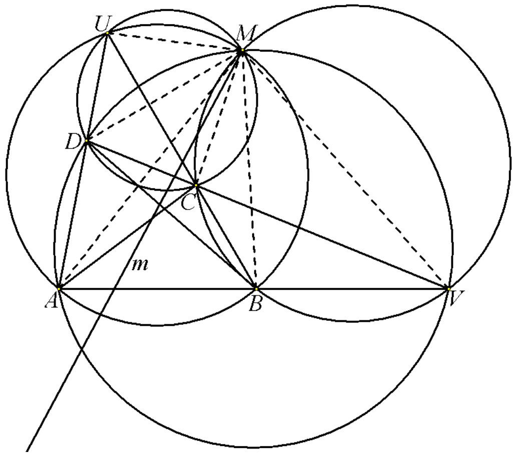
Keywords: quadrilateral, circumcircle, Miquel point, inversion, isogonality

Точката на Микел на четириъгълника е открита през XIX век. Откриването ѝ е свързано с една теорема, публикувана от Микел през 1838 г., откъдето идва и името ѝ. Характеризира се с различни забележителни свойства, някои от които са отбелязани в (Шарыгин, 1986, стр. 68, зад. 263). Точката на Микел, както е показано в (Haimov, 2001), е тясно свързана с брокарианите на четириъгълника. Нещо повече, при разглеждането на ред въпроси е удобно тя да се третира като трета брокариана. В настоящата статия точката на Микел е разгледана в един по-различен аспект и така са открити нейни нови свойства. Особено значение има откриването на едно преобразуване в равнината на четириъгълник, свързано с тази точка. То може да се разглежда като разширение на преобразуванието изогонална спрегнатост (Alexandrov & Haimov, 2003) в цялата равнина на четириъгълника, защото съвпада с него в дефиниционното му множество. Изобразява върховете на четириъгълника в срещуположните им върхове, а някои забележителни точки – в други. Композиция е от осева симетрия и инверсия, които имат съответно ос на симетрия и полюс и степен на инверсия, пряко свързани с четириъгълника. Благодарение на него от свойства на едни забележителни точки в четириъгълника се извеждат свойства на други – образи на първите при преобразуванието. С помощта му се получават важни връзки между някои забележителни точки в четириъгълника, като принадлежността им на една права или пък на една окръжност. Интересно е, че преобразуванието позволява да се обобщи известната теорема на Микел за пълния четириъгълник.

1. Теорема на Микел и точка на Микел. Преди да дефинираме точката на Микел, ще докажем две леми. Без ограничение на общността навсякъде по-нататък ще считаме, че продълженията на страните AD и BC на разглеждания четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка U, а страните AB и CD – в точка V (фиг. 1). Ще считаме още, че върхът C лежи между точките B и U, както и между точките D и V.

Лема 1. *Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Втората обща точка M на описаните окръжности ΔABU и ΔCDU е единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$, за която е изпълнено условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$.*

Доказателство. Първо ще докажем, че ако M е от вътрешността на ъгъл $\sphericalangle UCV$, за която е изпълнено условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$, то M съвпада с втората обща точка на описаните окръжности ΔABU и ΔCDU (фиг. 1). От условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ имаме $\sphericalangle DAM = \sphericalangle CBM$, т.е. $\sphericalangle UAM = \sphericalangle UBM$. Следователно четириъгълник $ABMU$ е вписан в окръжност. Можем да заключим, че точката M лежи на описаната окръжност на ΔABU. От условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ имаме още $\sphericalangle ADM = \sphericalangle BCM$, откъдето следва, че $\sphericalangle UDM = \sphericalangle UCM$. Следователно четириъгълникът $DCMU$ е вписан в окръжност, т.е. точката M лежи и на описаната окръжност на ΔDCU. Убедихме се, че M е обща точка на описаните окръжности на триъгълниците ABU и DCU. С помощта на същите разсъждения, проведени в обратен ред, се доказва, че обратно, за втората обща точка M на тези окръжности е изпълнено $\Delta ADM \sim \Delta BCM$.



Фигура 1

Забележка 1. Аналогично се доказва, че втората обща точка M на описаните окръжности на триъгълниците ADV и BCV (фиг. 1) е единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$, за която триъгълниците ABM и DCM са подобни.

Лема 2. *Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Ако за точката M от вътрешността на $\sphericalangle UCV$ е изпълнено условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$, то за нея е изпълнено и $\Delta ABM \sim \Delta DCM$.*

Доказателство. Тъйкато $\Delta ADM \sim \Delta BCM$,то $\frac{DM}{CM} = \frac{AM}{BM}$ и $\sphericalangle DMA = \sphericalangle CMB$ (фиг. 1). Затова имаме $\sphericalangle DMC = \sphericalangle DMA + \sphericalangle AMC = \sphericalangle CMB + \sphericalangle AMC = \sphericalangle AMB$, т.е. $\sphericalangle DMC = \sphericalangle AMB$. Като вземем предвид и получената пропорция, се убеждаваме, че $\Delta ABM \sim \Delta DCM$.

Теорема 1 (Микел). *Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, то описаните окръжности на четирите триъгълника ABU, DCU, ADV и BCV имат обща точка M.*

Доказателство. Нека M е втората обща точка на описаните окръжности ΔABU и ΔDCU (фиг. 1). По лема 1 за нея е изпълнено условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ и тя лежи в $\sphericalangle UCV$. Тогава за нея е изпълнено и условието $\Delta ABM \sim \Delta DCM$ (по лема 2). Но единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$, отговаряща на последното условие, както следва от забележка 1, е втората обща точка на описаните окръжности на триъгълниците ADV и BCV. Следователно M е обща точка на описаните окръжности и на четирите триъгълника ABU, DCU, ADV и BCV, с което теоремата е доказана.

Определение 1. Ако $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, общата точка M на описаните окръжности на триъгълниците ABU, DCU, ADV и BCV се нарича *точка на Микел на четириъгълника* $ABCD$ (фиг. 1).

Ще разгледаме някои свойства на точката на Микел.

Свойство 1М. Точката на Микел M за четириъгълника $ABCD$ е единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$*, за която триъгълниците* $\Delta ADM \sim \Delta BCM$. *Точката* M е единствената точка от вътрешността на $\sphericalangle UCV$ *, за която* $\Delta ABM \sim \Delta DCM$.

Доказателство. Точката на Микел M е обща на описаните окръжности на триъгълниците ABU, DCU, ADV и BCV (по определение 1) (фиг. 1). В частност, тя съвпада с втората обща точка на описаните окръжности на ΔABU и ΔDCU. По лема 1 можем да заключим, че точката на Микел е единствената точка в $\sphericalangle UCV$, за която $\Delta ADM \sim \Delta BCM$. Това, че тя е единствената точка в $\sphericalangle UCV$, за която $\Delta ABM \sim \Delta DCM$, следва от забележка 1.

Свойство 2М. *Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, то $\Delta DUM \sim \Delta VBM$.*

Доказателство. Точката на Микел M на четириъгълника $ABCD$ лежи върху описаните окръжности на триъгълниците DCU и BCV (по определение 1). Следователно четириъгълниците $DCMU$ и $BVMC$ са вписани (фиг. 1). Тогава имаме $\sphericalangle DUM = \sphericalangle MCV$ (от четириъгълника $DCMU$) и $\sphericalangle MCV = \sphericalangle MBV$ (вписани ъгли). Следователно $\sphericalangle DUM = \sphericalangle MBV$. От друга страна, имаме $\sphericalangle DMU = \sphericalangle DCU = \sphericalangle BCV = \sphericalangle BMV$, т.е. $\sphericalangle DMU = \sphericalangle BMV$. В триъгълниците DUM и VMB получихме две двойки съответно равни ъгли, следователно те са подобни.

Свойство 3М. *Ако М е точката на Микел за четириъгълника ABCD, то са изпълнени равенствата:*

$$(1) \qquad MA.MC = MB.MD = MU.MV = r^2,$$

където r е положителна константа, свързана с четириъгълника.

Доказателство. За точката на Микел M е изпълнено условието $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ (от свойство 1М) (фиг. 1). Тогава $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MB}{MC}$, откъдето имаме $MA.MC = MB.MD$. В същото време за точката на Микел е изпълнено и условието $\Delta DUM \sim \Delta VBM$ (от свойство 2М) (фиг. 1). Тогава $\dfrac{MD}{MU} = \dfrac{MV}{MB}$, откъдето получаваме $MB.MD = MU.MV$. Така се убедихме, че $MA.MC = MB.MD = MU.MV$.

Определение 2. Числото r от равенство (1) ще наричаме *константа на Микел за четириъгълника $ABCD$.*

Свойство 4М. *Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, то ъглите AMC, DMB и UMV имат обща ъглополовяща m.*

Доказателство. Тъй като за точката на Микел имаме $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ (от свойство 1М), то $\sphericalangle DMA = \sphericalangle BMC$ (фиг. 1). Следователно ъглите DMB и AMC имат обща ъглополовяща m. Понеже $\Delta DUM \sim \Delta VBM$ (от свойство 2М), то $\sphericalangle DMU = \sphericalangle BMV$. Следователно ъглополовящата m на $\sphericalangle DMB$ е ъглополовяща и на $\sphericalangle UMV$. Така се убедихме, че и трите ъгъла имат обща ъглополовяща m.

Определение 3. Ако M е точката на Микел за четириъгълника $ABCD$, *общата ъглополовяща m на ъглите AMC, DMB и UMV ще наричаме ос на Микел.*

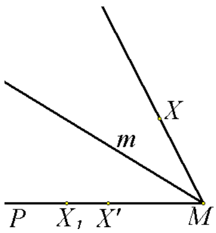
2. Инверсна симетрия. Сега ще припомним едно известно преобразуване в равнината, аналитичният вид на което в комплексната равнина се дава с функцията $\dfrac{1}{z}$. Както ще видим, то е тясно свързано с точката на Микел.

Определение 4. Нека M е точка в равнината, m – права през M, и r – дадено положително число. Композицията от симетрията g спрямо правата m и инверсията Y с полюс M и степен r^2 се нарича *инверсна симетрия с полюс* M*, ос* m *и степен* r^2*, която ще бележим с* $Y \circ g$.

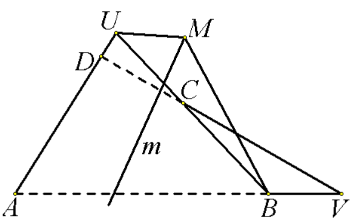
Ще докажем няколко свойства на инверсната симетрия, които ще са ни необходими по-нататък.

Свойство 1I. Нека $Y \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2 . Ако X_1 е образът на точката $X \neq M$ при преобразуванието $Y \circ g$, то лъчът $MX_1^{\rightarrow}$ е симетричен на лъча $MX^{\rightarrow}$ спрямо оста m и $MX_1 = \dfrac{r^2}{MX}$.

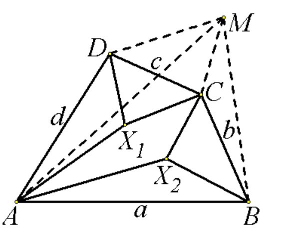
Доказателство. Образът на точката X при инверсната симетрия $Y \circ g$ се получава, като към X приложим първо симетрията g с ос m (фиг. 2). Получаваме точката X' от лъча $MP^{\rightarrow}$, симетричен на лъча $MX^{\rightarrow}$ спрямо оста m , такава, че $MX' = MX$. Образът на X при инверсната симетрия $Y \circ g$ получаваме окончателно, след като към точката X' приложим инверсията Y с полюс M и степен r^2 . Получената точка X_1 лежи на лъча $MP^{\rightarrow}$ и $MX_1.MX' = r^2$, т.е. $MX_1 = \dfrac{r^2}{MX'}$. От последното равенство и равенството $MX_1 = MX'$ следва, че $MX_1 = \dfrac{r^2}{MX}$. Така се убедихме, че лъчът $MX_1^{\rightarrow}$ е симетричен на лъча $MX^{\rightarrow}$ спрямо оста m и $MX_1 = \dfrac{r^2}{MX}$.



Фигура 2



Фигура 3



Фигура 4

Свойство 2I. Нека $Y \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M , ос m и степен r^2 . Ако A и са точки, нележащи на една права с точката M , и техните образи при преобразованието $Y \circ g$ са съответно C и D , то $\Delta DCM \sim \Delta ABM$.

Доказателство. Имаме $Y \circ g(A) = C$ и $Y \circ g(B) = D$ (по условие) (фиг. 3). Тогава лъчите $MC^{\rightarrow}$ и $MD^{\rightarrow}$ са симетрични съответно на лъчите $MA^{\rightarrow}$ и

$MB^{\rightarrow}$ спрямо оста m и $MC = \dfrac{r^2}{MA}$, $MD = \dfrac{r^2}{MB}$ (от току-що доказаното свойство 1I). От симетрията на споменатите лъчи следва, че $\sphericalangle CMD = \sphericalangle AMB$, а от получените равенства след почленно деление намираме пропорцията $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{MB}{MA}$. Затова можем да заключим, че $\Delta DCM \sim \Delta ABM$.

Следващото свойство на инверсната симетрия изяснява връзката на преобразуванието с точката на Микел.

Свойство 3I. Нека $Y \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M, ос m и степен r^2, а A и B са точки, нележащи на една права с точката M. Ако C и D са образите съответно на точките A и B при преобразованието $Y \circ g$, а полюсът му M лежи в $\sphericalangle UCV$ ($U = AD \cap BC$, $V = AB \cap CD$), то M е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$.

Доказателство. Понеже $Y \circ g(A) = C$, $Y \circ g(B) = D$ и точките A и B не лежат на една права с полюса M (по условие), имаме $\Delta DCM \sim \Delta ABM$ (от току-що доказаното свойство 2I) (фиг. 3). Но единствената точка M в $\sphericalangle UCV$ с това свойство е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$ (от свойство 1M). С това се убедихме, че полюсът M на инверсната симетрия $Y \circ g$ е точка на Микел на четириъгълника $ABCD$.

3. Инверсна изогоналност. Сега ще дефинираме една специална инверсна симетрия в равнината на изпъкнал четириъгълник.

Определение 5. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а M, m и r са съответно точката, оста и константата на Микел за $ABCD$. Инверсната симетрия $Y \circ g$ с полюс M, ос m и степен r^2 ще наричаме *инверсна изогоналност относно* $ABCD$.

Както ще видим, инверсната изогоналност изобразява свързания с нея четириъгълник в себе си.

Свойство 4I (Пл. Александров). Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник. Ако $Y \circ g$ е инверсната изогоналност спрямо него, то $Y \circ g(B) = D$, $Y \circ g(A) = C$ и $Y \circ g(U) = V$.

Доказателство. Ще докажем, че $Y \circ g(B) = D$ (фиг. 3). Другите две релации се доказват аналогично. Инверсната изогоналност $Y \circ g$ спрямо четириъгълника $ABCD$ е инверсна симетрия с ос – оста m на Микел на четириъгълника (по определение 5). Последната е ъглополовяща на $\sphericalangle DMB$ (определение 3). Следователно лъчът $MD^{\rightarrow}$ е симетричен на лъча $MB^{\rightarrow}$ относно оста m. Тогава, ако $Y \circ g(B) = B_1$, точката B_1 лежи на лъча $MD^{\rightarrow}$ (от свойство 1M). От същото свойство имаме $MB_1 = \dfrac{r^2}{MB}$, където r^2 е степента на инверсната симетрия $Y \circ g$,или с други думи – константата на Микел на $ABCD$. Последната дефинирахме в определение 2 с равенствата

$MA.MC = MB.MD = MU.MV = r^2$. Оттук в частност имаме $MB.MD = r^2$ и $MD = \frac{r^2}{MB}$. От получените равенства следва, че $MB_1 = MD$. Като вземем предвид, че при това точката B_1 лежи на лъча $\overrightarrow{MD}$ (по доказаното по-горе), заключаваме, че $B_1 \equiv D$. Следователно $Y \circ g(B) = D$.

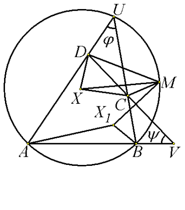
Ако две точки се изобразяват една в друга при инверсната изогоналност, ще ги наричаме *инверсно изогонални*. Както ще видим, разстоянията от инверсно изогоналните точки до върховете на четириъгълника са свързани с прости зависимости.

Теорема 2. Нека дължините на страните AB, BC, CD и DA на четириъгълника $ABCD$ са съответно a, b, c и d. Ако точките X_1 и X_2 са инверсно изогонални, то са изпълнени равенствата:

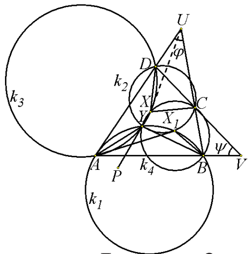
$$(2)\quad \frac{AX_2}{BX_2} = \frac{CX_1}{DX_1}.\frac{d}{b},\ \frac{BX_2}{CX_2} = \frac{DX_1}{AX_1}.\frac{a}{c},\ \frac{CX_2}{DX_2} = \frac{AX_1}{BX_1}.\frac{b}{d},\ \frac{DX_2}{AX_2} = \frac{BX_1}{CX_1}.\frac{c}{a}.$$

Доказателство. Нека $Y \circ g$ е инверсната изогоналност относно $ABCD$. Следователно $Y \circ g(X_1) = X_2$, $Y \circ g(C) = A$ и $Y \circ g(D) = B$ (от свойство 4I) (фиг. 4). Тогава $Y \circ g(CX_1) = AX_2$ и $Y \circ g(DX_1) = BX_2$. По формулата за преобразуване на разстоянията при инверсия получаваме $AX_2 = \frac{CX_1.r^2}{CM.X_1M}$, $BX_2 = \frac{DX_1.r^2}{DM.X_1M}$. Разделяме почленно тези равенства и получаваме $\frac{AX_2}{BX_2} = \frac{CX_1}{DX_1}.\frac{DM}{CM}$. Понеже $\Delta ADM \sim \Delta BCM$ (от свойство 1M), същевременно имаме $\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{BC}$, т.е. $\frac{DM}{CM} = \frac{d}{b}$. Заместваме в последното равенство и получаваме $\frac{AX_2}{BX_2} = \frac{CX_1}{DX_1}.\frac{d}{b}$. С това доказахме първото от равенствата (2). Аналогично се доказват и останалите равенства.

Както ще видим сега, ъглите, под които срещуположните страни на четириъгълника се виждат от две инверсно изогонални точки, са тясно свързани.



Фигура 2



Фигура 3

Свойство 5I. Ако X и X_1 са инверсно изогонални точки в четириъгълника $ABCD$ и $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVD = \psi$, то са изпълнени равенствата:

$$(3) \qquad \sphericalangle AX_1B = \sphericalangle DXC + \varphi, \ \sphericalangle AXD = \sphericalangle BX_1C + \psi .$$

Доказателство. Нека M е точката на Микел на четириъгълника $ABCD$ (фиг. 5). Ще разгледаме случая, когато точката X не лежи на правата MC . Имаме $Y \circ g(X) = X_1$ (по условие) и $Y \circ g(D) = B$ (от свойство 4I). Към точките X и D, които не могат да лежат на една права с точката на Микел M , защото M лежи в $\sphericalangle UCV$, а X – в четириъгълника, прилагаме свойство 2I на инверсната симетрия и получаваме, че $\Delta BX_1M \sim \Delta XDM$. Следва, че

$$(4) \qquad \sphericalangle MBX_1 = \sphericalangle MXD .$$

Аналогично от $Y \circ g(X) = X_1$ (по условие) и $Y \circ g(C) = A$ (от свойство 4I), като вземем предвид, че точките X и C не лежат на една права с точката на Микел M (според направената уговорка), получаваме $\Delta X_1AM \sim \Delta CXM$ (от свойство 2I). Следва, че

$$(5) \qquad \sphericalangle MAX_1 = \sphericalangle MXC .$$

Точката на Микел M на четириъгълника $ABCD$ лежи върху описаната окръжност на ΔABU (по определение 1), следователно $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AUB = \varphi$. Като вземем предвид равенства (4) и (5), последното равенство и означим с P произволна точка от продължението на отсечката MX_1, получаваме:

$$\sphericalangle AX_1B = \sphericalangle AX_1P + \sphericalangle BX_1P = (\sphericalangle AMX_1 + MAX_1) + (\sphericalangle BMX_1 + \sphericalangle MBX_1) =$$
$$= (\sphericalangle AMX_1 + \sphericalangle BMX_1) + \sphericalangle MAX_1 + \sphericalangle MBX_1 = \sphericalangle AMB + \sphericalangle MXC + \sphericalangle MXD =$$
$$= \sphericalangle AMB + (\sphericalangle MXC + \sphericalangle MXD) = \sphericalangle AUB + \sphericalangle DXC = \varphi + \sphericalangle DXC .$$

Така се убедихме, че $\sphericalangle AX_1B = \sphericalangle DXC + \varphi$, с което първото от равенствата (3) е доказано. Аналогично се доказва и второто равенство.

Преди да разгледаме други важни свойства на инверсната изогоналност, ще приведем още едно определение.

Определение 6. Нека AB е произволна отсечка в равнината. Ще казваме, че *точките X и Y са изогонални спрямо отсечката AB* , ако те лежат на окръжност, минаваща през точките A и B .

Лема 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а Y е произволна точка в него. Нека X е точката, изогонална на Y спрямо всяка от страните AD и BC , а X_1 – точката, изогонална на Y спрямо всяка от страните AB и DC . Ако точките X и X_1 лежат в четириъгълника и $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVD = \psi$, то са изпълнени равенствата:

$$(6) \qquad \sphericalangle AX_1B = \sphericalangle DXC + \varphi, \ \sphericalangle AXD = \sphericalangle BX_1C + \psi .$$

Доказателство. Точките X_1 и Y са изогонални спрямо страната AB и лежат в четириъгълника (по условие). Следователно те лежат на дъга от окръжност с краища точките A и B (фиг.6). Тогава имаме:

$$(7) \qquad \sphericalangle AYB = \sphericalangle AX_1B .$$

Точките X и Y са изогонални спрямо страните AD и BC и лежат в четириъгълника (по условие). Следователно те лежат на дъга от окръжност с краища точките A и D и на дъга от окръжност с краища точките B и C. Означаваме с P произволна точка от продължението на отсечката XY. От вписаните четириъгълници $AYXD$ и $BYXC$ имаме:

$$\sphericalangle AYB = \sphericalangle AYP + \sphericalangle BYP = \sphericalangle ADX + \sphericalangle BCX = (\sphericalangle DXU + \sphericalangle DUX) + (\sphericalangle CXU + \sphericalangle CUX) =$$
$$= (\sphericalangle DXU + \sphericalangle CXU) + (\sphericalangle DUX + \sphericalangle CUX) = \sphericalangle DXC + \sphericalangle DUC = \sphericalangle DXC + \varphi .$$

От полученото равенството $\sphericalangle AYB = \sphericalangle DXC + \varphi$ и (7) следва $\sphericalangle AX_1B = \sphericalangle DXC + \varphi$, т.е. първото от равенства (6). Аналогично се доказва и второто равенство.

Следващата теорема дава достатъчно условие две точки в четириъгълника да са инверсно изогонални.

Теорема 3. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, а X и X_1 са две точки в него, за които съществува точка Y, изогонална на X спрямо страните AD и BC и изогонална на X_1 спрямо страните AB и CD. Ако точката Y и инверсно изогоналната точка X^* на $X^* \equiv X_1$ лежат в четириъгълника, то $X^* \equiv X_1$, т.е. точката X_1 е инверсно изогонална на X.

Доказателство. Означаваме $\sphericalangle AUB = \varphi$ и $\sphericalangle AVD = \psi$ (фиг. 6). Точката X в четириъгълника е изогонална на Y спрямо всяка от страните AD и BC, а точката X_1 е изогонална на Y спрямо всяка от страните AB и CD (по условие). Затова според лема 3 са изпълнени равенствата:

$$(8) \qquad \sphericalangle AX_1B = \sphericalangle DXC + \varphi, \ \sphericalangle AXD = \sphericalangle BX_1C + \psi .$$

Точката X и инверсно изогоналната ѝ X^* лежат в четириъгълника (по условие). Затова от свойство 5I следват равенствата:

$$(9) \qquad \sphericalangle AX^*B = \sphericalangle DXC + \varphi, \ \sphericalangle AXD = \sphericalangle BX^*C + \psi .$$

От (8) и (9) следват равенствата $\sphericalangle AX_1B = \sphericalangle AX^*B$ и $\sphericalangle BX_1C = \sphericalangle BX^*C$. Освен това точките X и X^* лежат по условие в четириъгълника. Оттук заключаваме, че те лежат на дъга от окръжност с краища точките A и B и върху дъга от окръжност с краища точките B и C. Освен точката B тези дъги имат още само една обща точка, поради което X^* и X_1 съвпадат. Следователно инверсно изогоналната точка X^* на X съвпада с X_1, т.е. X_1 е инверсно изогонална на X.

Следващата теорема, както ще видим, е обобщение на теоремата на Микел за пълния четириъгълник (теорема 1).

Теорема 4. Нека X и X_1 са инверсно изогонални точки в изпъкналия четириъгълник $ABCD$.

а) Описаните окръжности на триъгълниците AX_1B, CX_1D, AXD и CXB се пресичат в една точка.

б) Описаните окръжности на триъгълниците AX_1D, BX_1C, AXB и CXD се пресичат в една точка.

Доказателство. Означаваме втората обща точка на описаните окръжности k_1 и k_2 съответно на ΔAX_1B и CX_1D с Y (фиг. 6). Ще покажем, че през нея минават и описаните окръжности k_3 и k_4 съответно на ΔAXD и ΔCXB, с което ще бъде доказано, че и четирите описани окръжности k_1, k_2, k_3 и k_4 минават през една точка. Точката Y е изогонална на X спрямо страните AB и CD (по определение 6). Нека X' е изогоналната точка на Y спрямо страните AD и BC. За точките X_1 и X' съществува точка, а именно точката Y такава, че X_1 и Y са изогонални спрямо страните AB и CD, а X' и Y са изогонални спрямо страните AD и BC. По теорема 3 можем да заключим, че инверсно изогоналната точка на X съвпада с X'. Но точката Y бе изогонална на X' спрямо страните AD и BC и затова тя е изогонална на X спрямо тези страни. Следователно описаните окръжности на ΔAXD и ΔBXC също минават през Y. С това твърдение а) е доказано. Аналогично се доказва б).

Забележка. От свойство 4I на инверсната изогоналност имаме, че в частност точките U и V са инверсно изогонални (фиг. 6). Като приложим току-що доказаната теорема 4 към тези точки, получаваме, че описаните окръжности на четирите триъгълника ABU, CDU, ADV и BCV минават през една точка. Но това е точно формулировката на теорема 1 (теоремата на Микел). Виждаме, че теоремата на Микел за пълния четириъгълник е частен случай от теорема 4, т.е. теорема 4 е обобщение на теоремата на Микел.

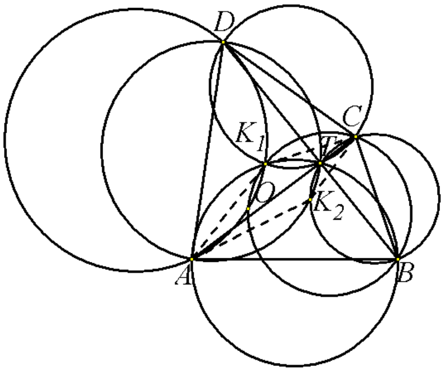
Както ще видим сега, някои забележителни точки в четириъгълника се изобразяват при инверсната изогоналност в други. Ще ни е необходима следната

Лема 4. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник с пресечна точка на диагоналите T. Ако K_1 и K_2 са брокарианите, а O е псевдоцентърът на $ABCD$, то са изпълнени следните свойства.

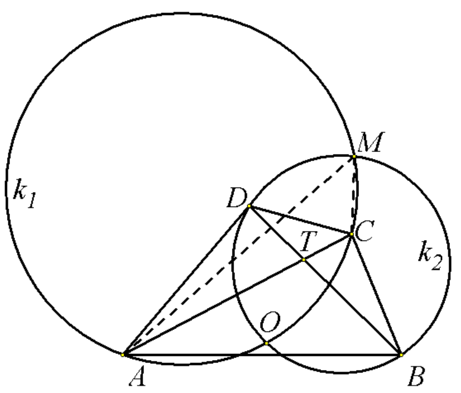
а) Точките K_1 и T са изогонални спрямо страните AB и CD, а точките K_2 и T са изогонални спрямо страните AD и BC.

б) Точките O и K_1 са изогонални спрямо страните AD и BC, а точките O и K_2 са изогонални спрямо страните AB и CD.

Доказателство. Брокарианата K_1 е втората обща точка на описаните окръжности за ΔABT и ΔCDT – по определение 1 от (Haimov, 2005) (фиг. 7). Затова точките K_1 и T са изогонални спрямо страните AB и CD (по определение 6). Аналогично се доказва, че точките K_2 и T са изогонални спрямо страните AD и BC. Псевдоцентърът O и брокарианата K_1 лежат на окръжност, минаваща през точките A и D, и на окръжност, минаваща през точките B и C – според забележката след теорема 1 от (Хаимов, 2010). Това означава, че точките O и K_1 са изогонални спрямо страните AD и BC. Аналогично се доказва, че точките O и K_2 са изогонални спрямо страните AB и CD.



Фигура 7



Фигура 8

Теорема 5. Нека $Y \circ g$ е инверсната изогоналност спрямо изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако T е пресечната точка на диагоналите, K_1 и K_2 са брокарианите, а O е псевдоцентърът на $ABCD$, то $Y \circ g\left(K_1\right) = K_2$ и $Y \circ g(T) = O$.

Доказателство. Ще разгледаме случая, когато точките K_1, K_2 и $Y \circ g\left(K_1\right)$ лежат в четириъгълника (фиг. 7). Другите случаи се разглеждат аналогично. За точките K_1 и K_2 съществува точка (а именно точката Т), изогонална на K_1 спрямо страните AB и CD и изогонална на K_2 спрямо страните AD и BC (по лема 4). При това точките K_1, K_2 и $Y \circ g\left(K_1\right)$ според направената уговорка лежат в четириъгълника. По теорема 3 можем да заключим, че $Y \circ g\left(K_1\right) = K_2$. Аналогично се доказва, че $Y \circ g(T) = O$.

Следствие. Нека K_1 и K_2 са брокарианите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако четириъгълникът AK_2CK_1 е изпъкнал, неговата точка на Микел съвпада с точката на Микел за $ABCD$.

Доказателство. Ще разглеждаме случая, когато точките A и K_1 не лежат на една права с точката на Микел M за четириъгълника $ABCD$ (фиг. 7). Нека $Y \circ g$ е инверсната изогоналност спрямо $ABCD$. Имаме $Y \circ g\left(K_1\right) = K_2$ (по теорема 5) и $Y \circ g(A) = C$ (свойство 4I). При това $Y \circ g$ е инверсна симетрия с полюс M. Можем да използваме свойство 3I на инверсната симетрия и да заключим, че полюсът M на инверсната симетрия $Y \circ g$ е точка на Микел на четириъгълника AK_2CK_1. Следователно точката на Микел на четириъгълника $ABCD$ е точка на Микел и за четириъгълника AK_2CK_1.

Накрая с помощта на инверсната изогоналност ще докажем една връзка между две забележителни точки в четириъгълника.

Теорема 6. Нека M е точката на Микел за изпъкналия четириъгълник $ABCD$. Ако правите AC и BD не минават през M, то точката M и псевдоцентърът O на $ABCD$ лежат на окръжност, минаваща през точките A и C, и на окръжност, минаваща през точките B и D.

Доказателство. При инверсната изогоналност $Y \circ g$ права, не минаваща през полюса M, се изобразява в окръжност, минаваща през M (от известно свойство на инверсията). Понеже $Y \circ g(A) = C$ и $Y \circ g(C) = A$ (свойство 4I) (фиг. 8), правата AC се изобразява в окръжност, минаваща през C, A и M, т.е. в описаната окръжност k_1 на ΔACM. Аналогично правата BD се изобразява в описаната окръжност k_2 на ΔBDM. Общата точка T на правите AC и BD се изобразява при преобразуванието $Y \circ g$ в обща точка на окръжностите k_1 и k_2. Но точката T се изобразява при инверсната изогоналност $Y \circ g$ в псевдоцентъра O (по теорема 5). Следователно именно псевдоцентърът O е втората обща точка на описаните окръжности k_1 и k_2 на триъгълниците ACM и BDM. Следователно точките O и M лежат на окръжност.

REFERENCES / литература

Sharigin, I. (1986). *Geometry problems. Plane geometry*. Moscow: Nauka. [Шарыгин, И. (1986). *Задачи по геометрии. Планиметрия*. Москва: Наука.]

Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, *6*. [Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика, 6*.]

Alexandrov, P. & H. Haimov (2003). Geometry of the Quadrangle Isogonal Conjugated Points. *Proceedings of the the International Congress of MASSEE 2003*, 141.

Haimov, H. (2005). Brocardian points of a quadrilateral, *Mathematics Plus, 5*. [Хаимов, Х. (2005). Брокариани на четириъгълник, *Математика плюс, 5*.]

Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus, 2*, 28 – 50. [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс, 2*, 28 – 50.]

Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitieto na noosfernia intelekt.* (4th ed.). Sofia: Publ. House "Iztok-Zapad". (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages [Георгиева М., Гроздев С. (2016). [*Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.) София: Издателство „Изток – Запад"]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience* (*Theory and Practice*). Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages

Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of complex numbers*, Sofia: Arhimedes 2000. (ISBN 978-954-779-1886)

GEOMETRY OF THE QUADRILATERAL, MIQUEL POINT, INVERSION ISOGONALITY

Abstract. The paper describes some properties of Miquel point for the complete quadrilateral and relations with other notable points of the quadrilateral.

✉ **Dr. Veselin Nenkov, Assoc. Prof.**
Technical College Lovech
31, Sajko Saev St.
5500 Lovech, Bulgaria
E-mail: vnenkov@mail.bg

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, PhD student**
Technical University Sofia
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg

✉ **Mr. Haim Haimov, Researcher**
16, Bratya Shkorpil St.
9000 Varna