

ВТОРИ ПСЕВДОЦЕНТЪР НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИКА

Станислав Стефанов
Технически университет – София

Резюме. В статията са описани свойства на една забележителна точка в изпъкнал четириъгълник – обобщение на центъра на описаната окръжност на вписания четириъгълник. Разгледани са връзките ѝ с други забележителни точки в четириъгълника.

Keywords: quadrilateral; notable point; Euler Circle; Lemoine point; Brocardian circle

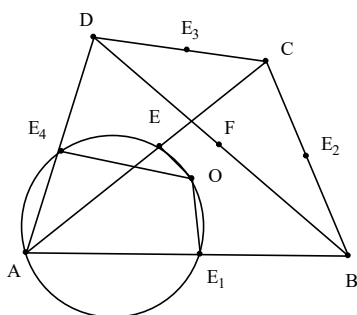
Първият псевдоцентър на четириъгълника е забележителна точка в изпъкнал четириъгълник, с която естествено се обобщава центърът на описаната окръжност на вписания четириъгълник (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2016). За обобщената точка се запазват част от свойствата на изходната. Както ще видим тук, в изпъкнал четириъгълник има точка, в която центърът на описаната окръжност на вписания четириъгълник се обобщава по друга част от свойствата си. Тази точка е пресечна точка на четири окръжности, дефинирани за изпъкнал четириъгълник, пресечна точка на която във вписан четириъгълник е именно центърът на описаната окръжност. Също като последния тя лежи на Брокаровата окръжност (Haimov, 2001). Има интересни връзки с точката на Лемоан (Haimov, 2011) и други интересни свойства.

Определение 1. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник. Окръжността (c_A), определена от средите на страните AD и AB и средата на диагонала AC , ще наричаме окръжност на Хапач, съответна на върха A . Аналогично се дефинират и окръжностите на Хапач, съответни на върховете B , C и D .

Ще докажем следната

Лема 1. Във вписан четириъгълник $ABCD$ окръжностите на Хапач се пресичат в центъра O на описаната окръжност.

Доказателство. Означаваме средите на страните AB , BC , CD и DA съответно с E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , а средите на диагоналите AC и BD – съответно с E и F (черт. 1).



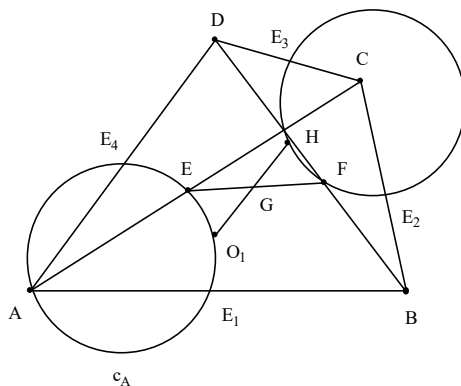
Чертеж 1

Центърът O на описаната окръжност на четириъгълника $ABCD$ лежи на симетралите на страните и диагоналите му, ето защо имаме: $\angle AE_4O = \angle AEO = \angle AE_1O = 90^\circ$. Тогава точките E_4 , E и E_1 лежат на окръжност с диаметър AO . Следователно точката O лежи на окръжността, определена от точките E_4 , E , E_1 , т.е. на окръжността (c_A) на Хапач, съответна на върха A . Аналогично се доказва, че точката O лежи на окръжностите на Хапач, съответни на другите три върха на четириъгълника.

Покажахме, че във вписан четириъгълник окръжностите на Хапач имат обща точка и това е центърът O на описаната окръжност. Както ще видим сега и в произволен четириъгълник окръжностите на Хапач имат обща точка.

Теорема 1. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник. Окръжностите на Хапач, съответни на четирите му върха, се пресичат в една точка, симетрична на ортоцентъра H спрямо центъра на тежестта G на четириъгълника.

Доказателство. Означаваме средите на страните AB , BC , CD и DA съответно с E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , а средите на диагоналите AC и BD – съответно с E и F (черт. 2).



Чертеж 2

Ще покажем, че окръжността на Хапач (c_A), съответна на върха A , е симетрична на Ойлеровата окръжност на $\triangle BCD$ спрямо центъра на тежестта G на четириъгълника. Добре известно е, а и лесно се доказва, че центърът на тежестта G е среда на отсечките E_1E_3 и E_4E_2 , определени от средите на срещуположните страни и на отсечката EF , определена от средите на диагоналите. При симетрията спрямо G точките E_3 , F и E_2 се изобразяват съответно в точките E_1 , E и E_4 . Следователно окръжността, определена от точките E_3 , F и E_2 – Ойлеровата окръжност на $\triangle BCD$, се изобразява в окръжността, определена от точките E_1 , E и E_4 – окръжността на Хапач, съответна на върха A . Аналогично се доказва, че Ойлеровите окръжности на триъгълниците CDA , DAB и ABC се изобразяват в окръжностите на Хапач, съответни на другите три върха на четириъгълника. Но Ойлеровите окръжности на триъгълниците ABC , BCD , CDA и DAB се пресичат в една точка – ортоцентъра H на четириъгълника (Хаимов, 2010). Следва, че и симетричните образи на тези окръжности спрямо центъра на тежестта G – окръжностите на Хапач на четириъгълника $ABCD$, се пресичат в една точка O_1 , симетрична на ортоцентъра H спрямо центъра на тежестта G .

Доказахме, че в произволен четириъгълник окръжностите на Хапач се пресичат в една точка O_1 .

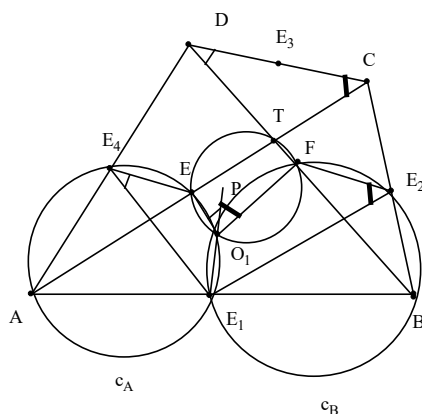
Определение 2. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник. Общата точка O_1 на окръжностите на Хапач ще наричаме втори псевдоцентър на четириъгълника.

Според доказаната теорема вторият псевдоцентър O_1 на четириъгълника е симетричен на ортоцентъра H спрямо центъра на тежестта G . Във вписан четириъгълник той съвпада с центъра на описаната окръжност.

В (Хаимов, 2001) е показано, че центърът на описаната окръжност на вписания четириъгълник лежи върху Брокаровата му окръжност. Последната е определена от средите на диагоналите и тяхната пресечна точка. Сега ще покажем, че и обобщението на центъра на описаната окръжност – вторият псевдоцентър O_1 на четириъгълника лежи на тази окръжност.

Теорема 2. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник. Вторият псевдоцентър O_1 лежи на Брокаровата окръжност.

Доказателство. Означаваме средите на страните AB , BC , CD и DA съответно с E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , средите на диагоналите AC и BD съответно с E и F , а пресечната им точка с T (черт. 3).



Чертеж 3

Ще разгледаме случая, когато точките E , F и T са различни. Вторият псевдоцентър O_1 е обща точка на окръжностите на Хапач, съответни на върховете A и B (по определение 2), т.е. на окръжностите, определени съответно от тройките точки E, E_1, E_4 и F, E_2, E_3 . По теоремата за ъгли с еднопосочни рамене имаме:

$$\sphericalangle E_1 E_4 E = \sphericalangle BDC, \sphericalangle E_1 E_2 F = \sphericalangle ACD.$$

Означаваме с P точка от продължението на отсечката $E_1 O_1$ и с помощта на тези равенства получаваме:

$$\sphericalangle EO_1 F = \sphericalangle EO_1 P + \sphericalangle FO_1 P = \sphericalangle E_1 E_4 E + \sphericalangle E_1 E_2 F = \sphericalangle BDC + \sphericalangle ACD = \sphericalangle BTC = \sphericalangle FTC.$$

Получихме $\sphericalangle EO_1 F = \sphericalangle FTC$; можем да заключим, че четириъгълникът $EO_1 FT$ е вписан в окръжност. С това се убедихме, че вторият псевдоцентър O_1 лежи на окръжността, определена от точките E, F и T , т.е. на Брокаровата окръжност на четириъгълника $ABCD$.

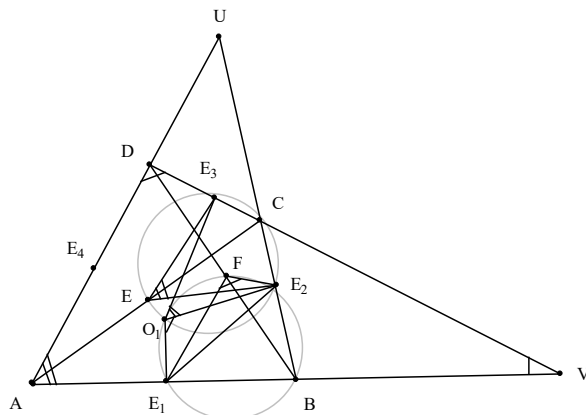
Както ще видим сега, в пълен четириъгълник има още две окръжности, аналогични на Брокаровата, и вторият псевдоцентър O_1 лежи и върху тях.

Определение 3. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник и AD пресича BC в точка U , AB пресича DC в точка V и E_1, E_2, E_3, E_4 са средите съответно на страните AB, BC, CD, DA . Окръжността, определена от точките E_1, E_3 и V , ще наричаме Брокарова окръжност, съответна на страните AB и CD . Аналогично се дефинира и Брокаровата окръжност, съответна на страните AD и BC .

Ще покажем, че вторият псевдоцентър O_1 лежи върху току-що дефинираните окръжности.

Теорема 3. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник. Вторият псевдоцентър O_1 лежи на Брокаровите окръжности, съответни на двойките срещуположни страни.

Доказателство. Означаваме средите на страните AB , BC , CD и DA съответно с E_1 , E_2 , E_3 и E_4 , средите на диагоналите AC и BD съответно с E и F (черт. 4).



Чертеж 4

Ще докажем, че вторият псевдоцентър O_1 лежи върху Брокеровата окръжност, съответна на страните AB и CD . Последната е определена по дефиниция от точките E_1 , E_3 и V . Достатъчно е, следователно да докажем равенството: $\sphericalangle E_1O_1E_3 + \sphericalangle E_1VE_3 = 180^\circ$. Имаме $\sphericalangle E_1FE_2 = \sphericalangle ADC$, $\sphericalangle E_2EE_3 = \sphericalangle BAD$ (като ъгли с еднорамени рамене). Вторият псевдоцентър O_1 лежи на окръжностите на Хапач, съответни на върховете B и C , т.е. на окръжностите, определени съответно от тройките точки E_1, F, E_2 и E_2, E, E_3 . Като използваме горните равенства, получаваме:
 $\sphericalangle E_1O_1E_3 = \sphericalangle E_1O_1E_2 + \sphericalangle E_2O_1E_3 = \sphericalangle E_1FE_2 + \sphericalangle E_2EE_3 = \sphericalangle ADC + \sphericalangle BAD$,
 т.е.

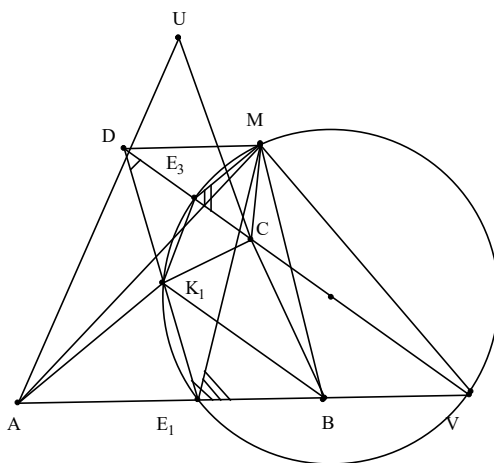
$$\sphericalangle E_1O_1E_3 = \sphericalangle ADC + \sphericalangle BAD.$$

Ето защо имаме: $\sphericalangle E_1O_1E_3 + \sphericalangle E_1VE_3 = (\sphericalangle ADC + \sphericalangle BAD) + \sphericalangle AVD = 180^\circ$, с което доказателството е завършено.

И така, доказахме, че Брокеровите окръжности, съответни на двойките срещуположни страни, минават през втория псевдоцентър O_1 на четириъгълника. По-нататък ще ни потрябва и фактът, че те минават още и през точката на Микел M , както и през съответната брокариана на четириъгълника.

Теорема 4. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник и M е точката му на Микел, а K_1 е брокарианата, съответна на страните AB и CD . Брокеровата окръжност, съответна на страните AB и CD , минава през точките M и K_1 .

Доказателство. Означаваме средите на страните AB , BC , CD и DA , съответно с E_1 , E_2 , E_3 , E_4 (черт. 5).



Чертеж 5

Точката на Микел M образува със срещуположните страни AB и CD подобни триъгълници (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017), т.е. имаме: $\triangle ABM \sim \triangle DCM$. При подобие B и C са съответни върхове, а ME_1 и ME_3 – съответни медиани. Лесно се доказва, че тогава $\triangle ME_1B \sim \triangle ME_3C$, откъдето имаме: $\sphericalangle ME_1B = \sphericalangle ME_3C$, т.е. $\sphericalangle ME_1V = \sphericalangle ME_3V$. Можем следователно да заключим, че четириъгълникът E_1VME_3 е вписан в окръжност. С други думи, точката на Микел M лежи на окръжността, определена от точките E_1 , E_3 и V , т.е. на Брокарвата окръжност, съответна на страните AB и CD . Аналогично и брокарианата K_1 , съответна на страните AB и CD , образува с тези страни подобни триъгълници, т.е. $\triangle ABK_1 \sim \triangle CDK_1$ (Haimov, 2001). При подобие B и D са съответни върхове, а K_1E_1 и K_1E_3 – съответни медиани. Лесно се доказва, че тогава: $\triangle K_1E_1B \sim \triangle K_1E_3D$, откъдето имаме: $\sphericalangle BE_1K_1 = \sphericalangle DE_3K_1$, т.е. $\sphericalangle VE_1K_1 = \sphericalangle DE_3K_1$. Можем да заключим, че четириъгълникът $E_1VE_3K_1$ е вписан в окръжност. С други думи, брокарианата K_1 лежи на окръжността, определена от точките E_1 , E_3 и V , т.е. на Брокарвата окръжност, съответна на страните AB и CD . С това теоремата е доказана.

Забележка 1. Аналогично се доказва, че Брокарвата окръжност, съответна на страните AD и BC , минава през точката на Микел M и през брокарианата K_2 , съответна на страните AD и BC .

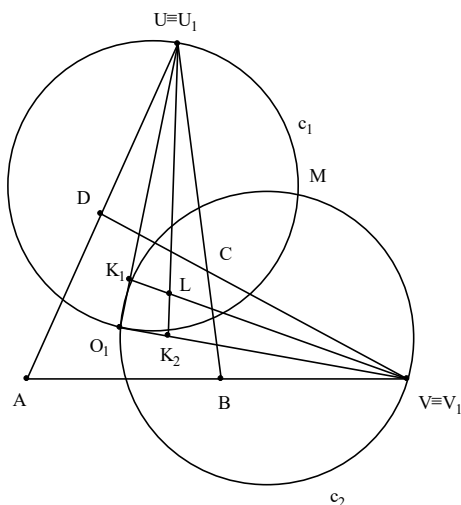
Забележка 2. Лесно се проверява, че всяка от Брокарвите окръжности, съответни на двойките срещуположни страни, минава и през пресечната точка на симетралите на съответните страни.

И така, доказахме, че върху Брокаровите окръжности, съответни на двойките срещуположни страни, лежат вторият псевдоцентър O_1 , точката на Микел M и съответната брокариана. Интересно е, че върху тях лежат и други забележителни точки на четириъгълника. Заедно с изходната Брокорова окръжност те образуват тройка забележителни окръжности на четириъгълника.

Сега ще покажем, че образ на втория псевдоцентър O_1 при инверсната изогоналност на Микел е точката на Лемоан (Haimov, 2011).

Теорема 5. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник. AD пресича BC в точка U , AB пресича DC в точка V и Ig е инверсната изогоналност спрямо него. Ако O_1 е вторият псевдоцентър, а L – точката на Лемоан, то е изпълнено $Ig(L) = O_1$.

Доказателство. Точката на Лемоан е пресечна точка на симедианите UK_2 и VK_1 на четириъгълника (Хаимов, 2011) (черт. 6), където K_1 и K_2 са съответните брокариани.



Чертeж 6

Имаме: $Ig(K_1) = K_2$ и $Ig(U) = V$ (Nenkov, Stefanov, Haimov, 2017). При изображението Ig правата VK_1 се изобразява в окръжност (c_1), минаваща през полюса на Ig – точката на Микел M , и през образите на точките V и K_1 от правата VK_1 – съответно точките U и K_2 . Но през точките M , U и K_2 минава точно Брокаровата окръжност, съответна на страните AD и BC . Заклучаваме, че образ на симедианата VK_1 при Ig е Брокаровата окръжност, съответна на страните AD и BC . Аналогично се доказва, че образ

на симедианата UK_2 при Ig е Брокарската окръжност (c_2) , съответна на страните AB и CD . Ето защо образ на точката на Лемоан L – общата точка на симедианите UK_2 и VK_1 при инверсната изогоналност Ig , е общата точка на двете Брокарски окръжности (c_1) и (c_2) , а това по теорема 3 е вторият псевдоцентър O_1 .

Следствие 1. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, O_1 е вторият му псевдоцентър, L – точката на Лемоан, а K_1 и K_2 – съответните брокариани. Точката на Микел M на четириъгълника $ABDC$ е точка на Микел и на четириъгълника $O_1K_2LK_1$.

Доказателство. Нека Ig е инверсната изогоналност спрямо четириъгълника $ABCD$. Имаме: $Ig(L) = O_1$ (по току-що доказаната теорема) и $Ig(K_1) = K_2$ (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017). Можем следователно да заключим, че полюсът на Ig – точката на Микел M на четириъгълника $ABCD$ е точка на Микел и на четириъгълника $O_1K_2LK_1$ (от свойство 3I на инверсната изогоналност (Nenkov, Stefanov & Haimov, 2017)).

Ще се спрем на още едно свойство на втория псевдоцентър O_1 .

Определение 4. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, AD пресича BC в точка U , AB пресича DC в точка V и K_1 и K_2 са съответните брокариани. Правите UK_1 и VK_2 ще наричаме антисимедиани на четириъгълника.

Ще покажем, че антисимедианите се пресичат във втория псевдоцентър O_1 .

Теорема 6. Нека $ABCD$ е произволен четириъгълник, AD пресича BC в точка U , AB пресича DC в точка V и K_1 и K_2 са съответните брокариани. Вторият псевдоцентър O_1 е пресечна точка на антисимедианите UK_1 и VK_2 .

Доказателство. Нека L е точката на Лемоан на четириъгълника $ABCD$, т.е. пресечната точка на симедианите VK_1 и UK_2 (черт. 6). Означаваме пресечната точка на правите OK_1 и LK_2 с U_1 , а пресечната точка на правите O_1K_2 и LK_1 с V_1 . За да докажем, че O_1U_1 и O_1V_1 са антисимедианите на четириъгълника $ABCD$, е достатъчно да докажем, че $U_1 \equiv U$ и $V_1 \equiv V$. Точката на Микел M на четириъгълника $ABCD$ е точка на Микел и на четириъгълника $O_1K_2LK_1$ (по следствие 1 от теорема 5). Продълженията на срещуположните страни в последния се пресичат в точките U_1 и V_1 . Следователно M е втората обща точка на описаните окръжности на $\Delta O_1K_2U_1$ и на $\Delta O_1K_1V_1$. С други думи, точките O_1 , K_2 , U_1 и M лежат на една окръжност, което означава, че точката U_1 лежи на окръжността, определена от точките O_1 , K_2 и M . Но последната е Брокарската окръжност (c_1) на четириъгълника $ABCD$, съответна на страните му AD и BC . Следователно U_1 е пресечна точка на правата LK_2 с Брокарската окръжност (c_1) . Понеже точката U също лежи както на правата LK_2 , така и на окръжността (c_1) , можем да заключим, че $U_1 \equiv U$. Аналогично се доказва, че $V_1 \equiv V$, с което теоремата е доказана.

В заключение привеждаме без доказателство още три интересни свойства на втория псевдоцентър.

Свойство 1. *В изпъкнал четириъгълник пресечните точки на симетралите на срещуположните страни, пресечната точка на симетралите на диагоналите и вторият псевдоцентър лежат на една окръжност.*

Свойство 2. *В четириъгълник с перпендикулярни диагонали вторият псевдоцентър съвпада с епицентъра (Наимов, 1997).*

Свойство 3. *В четириъгълник с перпендикулярни диагонали правата, определена от първия и втория псевдоцентър, е успоредна на Гаусовата права (Наимов, 1999).*

REFERENCES/ЛИТЕРАТУРА

Haimov, H. (2001). The Brocardians – notable points in the quadrilateral. *Mathematics and Informatics*, 6, 17 – 23. [Хаимов, Х. (2001). Брокарианите – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 17 – 23.]

Haimov, H. (2011). Lemoine point, *Mathematics*, 6, 3 – 12. [Хаимов, Х. (2011). Точка на Лемоан, *Математика*, 6, 3 – 12.]

Haimov, H. (2010). Geometry of the quadrilateral, *Mathematics Plus*, 2, 28 – 50. [Хаимов, Х. (2010). Геометрия на четириъгълника, *Математика плюс*, 2, 28 – 50.]

Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2016). Pseudocenter and orthocenter – notable points in the quadrilateral, *Mathematics and Informatics*, 6, 614 – 625. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов. (2016). Псевдоцентър и ортоцентър – забележителни точки в четириъгълника, *Математика и информатика*, 6, 614 – 625.]

Haimov, H. (1997). The epicenter – a notable point in the quadrilateral, *Mathematics*, 1, 18 – 23. [Хаимов, Х. (1997). Епицентърът – забележителна точка в четириъгълника, *Математика*, 1, 18 – 23.]

Haimov, H. (1999). Gauss line in the quadrilateral, *Mathematics*, 1, 11 – 16. [Хаимов, Х. (1999). Гаусова права в четириъгълник, *Математика*, 1, 11 – 16.]

Nenkov, V., S. Stefanov & H. Haimov (2017). Geometry of the quadrilateral. Miquel point. Inverse isogonality, *Mathematics and Informatics*, 1, 81 – 93. [Ненков, В., С. Стефанов & Х. Хаимов. (2017). Геометрия на четириъгълника. Точка на Микел. Инверсна изогоналност, *Математика и информатика*, 1, 81 – 93.]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Three notable points on the medians of a triangle*. Sofia: Archimedes 2000. (ISBN 978-954-779-136-7). [Гроздев, С. & В., Ненков (2012). *Три забележителни точки върху медианите на триъгълника*. София: Архимед 2000. (ISBN 978-954-779-136-7).]

Grozdev, S. & V. Nenkov (2012). *Around the orthocenter in the plane and space*. Sofia: Archimedes 2000. (ISBN 978-954-779-145-9). [Гроздев, С. & В.,

Ненков (2012). *Около ортоцентъра в равнината и пространството*. София: Архимед 2000. (ISBN 978-954-779-145-9).]

Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1).

Malcheski, R., S. Grozdev & K. Anevska (2015). *Geometry of complex numbers*, Sofia: Arhimedes 2000. (ISBN 978-954-779-1886).

Georgieva, M. & S. Grozdev (2016). *Morfodinamikata za razvitiето na noosfernia intelekt*. (4th ed.). Sofia: Publ. House "Iztok-Zapad". (ISBN 978-619-152-869-1). 327 pages. [Георгиева М. Гроздев С. (2016). *[Морфодинамиката за развитието на ноосферния интелект*. (4-то изд.) София: Издателство „Исток – Запад“.]

SECOND PSEUDOCENTER OF THE QUADRILATERAL

Abstract. The paper describes some properties of a notable point in convex quadrilateral – a generalization of the circumcenter of the inscribed quadrilateral.

✉ **Mr. Stanislav Stefanov, Phd Student**
Technical University – Sofia
Sofia, Bulgaria
E-mail: stanislav.toshkov@abv.bg