

ПРИЛОЖЕНИЕ НА ВРЪЗКАТА МЕЖДУ СРЕДНО АРИТМЕТИЧНО И СРЕДНО ГЕОМЕТРИЧНО ЗА РАЦИОНАЛНО ДОКАЗВАНЕ НА НЯКОИ НЕРАВЕНСТВА

Радан Мирянов, Йордан Петков
Икономически университет – Варна

Резюме. В статията се разглежда възможност за доказване на някои неравенства, като се използва известното неравенство между средно аритметично и средно геометрично за подходящо подобрена редица от числа. Предложени са методически решения на представените примерни задачи и чрез алтернативни подходи – метод на математическата индукция или изследване на функция, при което читателят може да сравни тяхната трудоемкост и рационалност.

Keywords: inequalities; mathematical induction; arithmetic mean; geometric mean; methodology

Мястото на неравенствата в състезанията по математика за ученици и студенти по традиция е значимо и рационалността при техните доказателства почти винаги е сред важните фактори за успех. Поради тази причина на различни подходи за доказване на неравенства са посветени редица методически разработки – вж. напр. (Grozdev, 2005), (Grozdev, 2007), (Grozdev & Nenkov, 2015), (Grozdev & Nenkov, 2015-a), (Grozdev & Nenkov, 2017).

За решаването на задачи, в които трябва да се докаже, че дадено неравенство е в сила за всяко естествено число (от даден интервал), често се прилага методът на математическата индукция, или изследване на функция. В много случаи с тяхна помощ задачата се решава сравнително лесно, в други случаи обаче прилагането им е свързано с трудоемки изчисления, голям брой преобразувания и т.н. В настоящата разработка авторите представят различен подход към доказване на някои неравенства, сравнявайки го с гореспоменатите два подхода от гледна точка на рационалност и трудоемкост.

За да демонстрираме този подход, ще разгледаме две задачи, на които първо ще дадем донякъде стандартни, макар и доста трудоемки решения.

Задача 1. Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила неравенството $2^n \cdot n! \leq (n+1)^n$.

Даденото неравенство може да бъде доказано чрез метода на математическата индукция. И наистина, за $n = 1$ нестрогото неравенство е очевидно изпълнено като равенство. Да допуснем, че неравенството е вярно за някое естествено число n , т.е.

$$(1) \quad 2^n \cdot n! \leq (n+1)^n.$$

Ще покажем, че неравенството е вярно и за $n+1$, т.е.

$$(2) \quad 2^{n+1} \cdot (n+1)! \leq (n+2)^{n+1}.$$

Нека в (1) умножим двете страни по $2(n+1)$. Така получаваме

$$2^{n+1} \cdot (n+1)! \leq 2 \cdot (n+1)^{n+1}.$$

Остава да покажем, че $2 \cdot (n+1)^{n+1} \leq (n+2)^{n+1}$, и с това доказателството ще е завършено.

При разделяне двете страни на $(n+1)^{n+1}$ последното неравенство е еквивалентно на $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq 2$, или с други думи,

$$(3) \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq 2.$$

Ще докажем (въпреки че е известен факт), че $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geq 2, \forall k \geq 1$, откъдето ще следват последователно (3) и (2). Развиваме лявата страна на неравенството чрез Нютонов бином и получаваме:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= C_k^0 \cdot 1^k + C_k^1 \cdot 1^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^1 + C_k^2 \cdot 1^{k-2} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots + C_k^k \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^k = \\ &= 1 + k \cdot \frac{1}{k} + C_k^2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^k = 2 + C_k^2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{k}\right)^k \geq 2 \end{aligned}$$

Това доказва неравенство (3), а оттам е в сила (2), с което доказахме по индукция, че $2^n \cdot n! \leq (n+1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Задача 2. Да се докаже, че за всяко естествено число n е в сила неравенството

$$(4) \quad 2^{\frac{n+2}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} > n+1.$$

Ще докажем (4) по два начина, като първият ще е отново чрез индукция.

При $n = 1$ строгото неравенство (4), което е еквивалентно на

$$(5) \quad 2^{n+1} > 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 1,$$

е очевидно изпълнено, тъй като $4 > 2\sqrt{2} + 1$. Допускаме, че то е вярно за някое естествено число n , и ще докажем, че това води след себе си верността и за $n+1$, т.е.

$$(6) \quad 2^{n+2} > 2^{\frac{n+1}{2}} (n+2) + 1.$$

Преработвайки чрез еквивалентни преобразувания (6), получаваме последователно $2 \cdot 2^{n+1} > \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} (n+2) + 1 \Leftrightarrow 2^{n+1} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} (n+2) + 1$. Имайки предвид верността на (5), неравенство (6) ще бъде доказано, ако покажем, че за $\forall n \geq 2$ е в сила

$$(7) \quad 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} (n+2) + 1.$$

Да допуснем противното, т.е. $2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) + 1 \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2^{\frac{n}{2}} (n+2) + 1$ при $n \geq 2$. Оттук следва

$$\begin{aligned} (n+1) &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} (n+2) \Rightarrow 2(n+1) \leq \sqrt{2}(n+2) \Rightarrow n(2-\sqrt{2}) \leq 2\sqrt{2}-2 \\ \Rightarrow n &\leq \frac{2\sqrt{2}-2}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

което очевидно е противоречие. Следователно (7), а оттам и (6), са в сила, което доказва неравенство (4).

За задача 2 ще приведем и още един начин за доказване на неравенството, основан на изследване на функция, като оставяме на читателя да прецени и сравни степента на трудоемкост на двата начина. Да разгледаме неравенство

$$(4) \text{ в еквивалентния му вид } 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} > n+1 \text{ и да положим } n=2x \geq 1, \text{ т.е.}$$

$$x = \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}. \text{ Получаваме } 2 \cdot 2^x - \frac{1}{2^x} > 2x+1, \text{ откъдето достигахме до}$$

$$(8) \quad 2 \cdot 2^{2x} - 2^x(2x+1) - 1 > 0.$$

Нека означим лявата страна на (8) с $f(x)$. За да докажем положителността на тази функция за $x \geq \frac{1}{2}$, полагаме $t = 2^x \geq \sqrt{2}$ или $x = \log_2 t \geq \frac{1}{2}$. Получаваме нова функция $g(t) = 2t^2 - t(2 \log_2 t + 1) - 1$, чиято положителност трябва

ва да докажем за $t \geq \sqrt{2}$. Първата и втората производна на $g(t)$ са съответно:

$$(9) \quad g'(t) = 4t - (2 \log_2 t + 1) - \frac{2t}{t \ln 2} = 4t - 2 \log_2 t - \frac{2}{\ln 2} - 1,$$

$$(10) \quad g''(t) = 4 - \frac{2}{t \ln 2}$$

От (10) можем да заключим, че $g''(t) \geq 4 - \frac{2}{\sqrt{2} \ln 2}$, тъй като $t \geq \sqrt{2}$. Да допуснем, че $g''(t)$ не е положителна, т.е. $4 \leq \frac{2}{\sqrt{2} \ln 2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \ln 2 \leq 1$. Оттук следва, че $\sqrt{2} \ln 4 \leq 1$, което е невъзможно поради факта, че двата множителя вляво са по-големи от 1. Така доказахме, че $g''(t) > 0$ при $t \geq \sqrt{2}$ и следователно за тези стойности на t първата производна $g'(t)$ е растяща функция, т.е. $g'(t) \geq g'(\sqrt{2})$ при $t \geq \sqrt{2}$.

Да разгледаме стойността на $g'(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} - 2 - \frac{2}{\ln 2}$ и да допуснем, че тя е неположителна. Имаме $4\sqrt{2} - 2 - \frac{2}{\ln 2} \leq 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} - 1 \leq \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow \ln 2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2} - 1}$. Но $e^2 < 8$, откъдето $\frac{2}{3} = \ln e^{\frac{2}{3}} < \ln 8^{\frac{1}{3}} = \ln 2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2} - 1}$. Това води до $4\sqrt{2} - 2 < 3 \Rightarrow 4\sqrt{2} < 5$, което очевидно не е вярно и допускането е погрешно. С други думи $g'(t) \geq g'(\sqrt{2}) > 0$, т.е. функцията $g(t)$ е растяща. Но $t \geq \sqrt{2}$, следователно $g(t) \geq g(\sqrt{2}) = 4 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} - 1 = 3 - 2\sqrt{2} > 0$.

Така доказахме положителността на $g(t)$, откъдето следва положителността на $f(x)$, както и верността на неравенства (8) и (4).

Читателят може сам да се убеди, че предложените дотук доказателства, макар и в голяма степен стандартни, са доста трудоемки, свързани с редица преобразувания, полагания и оценки. В следващите редове ще предложим далеч по-кратки и рационални решения на двете задачи чрез използване на крайни суми и известното неравенство между средно аритметично и средно геометрично. За целта, естествено, от читателя се очаква съответната специфична съобразителност, която тук ще се опитаме да доразвием.

Да разгледаме естествените числа от 1 до n и да запишем за тях известно-то неравенство между средното им аритметично и средното им геометрично. Имаме $\frac{1+2+\dots+n}{n} \geq \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}$. Както знаем, $1+2+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2}$, откъ-

дето $\frac{(1+n)n}{2n} \geq \sqrt[n]{n!}$. Получаваме $n+1 \geq 2\sqrt[n]{n!}$ и повдигайки на n -та степен двете страни, имаме $(n+1)^n \geq 2^n \cdot n!$, което всъщност е неравенство (1).

За да докажем неравенство (4), отново ще приложим неравенството между средно аритметично и средно геометрично, но този път за редицата от числа

$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}$. Получаваме $\frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{1 \cdot \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2^n}}$. Сумата на геометрична-

та прогресия е $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$, откъдето

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{(n+1) \left(1 - \frac{1}{2}\right)} &\geq \sqrt[n+1]{\frac{1}{2^{1+2+\dots+n}}} \Rightarrow \frac{2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{(n+1)} \geq \sqrt[n+1]{\frac{1}{2^{\frac{(1+n)n}{2}}}} \\ \Rightarrow \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} &\geq (n+1) \cdot \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned}$$

От последното неравенство, след умножаване на двете страни по $2^{\frac{n}{2}}$, имаме $2^{\frac{n+2}{2}} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \geq n+1$, което, на практика, е неравенство (4). Равенство-

то в него не е възможно поради това, че числата, чиито средно аритметично и средно геометрично използвахме за доказателството, са различни.

Ако разгледаме числата $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}$ и за тях приложим неравенството между средно аритметично и средно геометрично, ще имаме:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \dots \frac{1}{2^n}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2^{1+2+\dots+n}}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\frac{(1+n)n}{2}}}},$$

т.е. $1 - \frac{1}{2^n} \geq n \cdot \frac{1}{2^{\frac{1+n}{2}}}$ и умножавайки двете страни по 2^n , ще изведем нера-

венството $2^n - 1 \geq n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}$.

В заключение, бихме могли да изтъкнем още веднъж рационалността и сравнително по-малката трудоемкост на предложения подход с използване на крайни суми, като едновременно с това напомним необходимостта от предварително отработване на подобен род доказателства. Той, разбира се, би могъл успешно да се прилага, като се използват и други редици от числа, за които лесно могат да се пресметнат частичните им суми, като например: квадратите или кубовете на първите n естествени числа, редицата $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}$ (Nikolaev, 2016), (Grozdev, 2012). За целта оставяме на вниманието на читателя за самостоятелна работа следните неравенства:

$$(A) \ 3^n - 1 \geq 2n \cdot \sqrt{3^{n-1}};$$

$$(B) \ n^n \geq (2n-1)!!;$$

$$(B) \ (n!)^2 \geq n^n.$$

УПЪТВАНЕ. (A) Използвайте неравенството между средно аритметично и средно геометрично за числата: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}$.

(B) Използвайте неравенството между средно аритметично и средно геометрично за числата: $1, 3, \dots, 2n-1$.

(B) Използвайте неравенството между средно аритметично и средно геометрично за числата: $\frac{1}{1.2}, \frac{1}{2.3}, \dots, \frac{1}{(n-1)n}$.

REFERENCES/LITERATURA

- Grozdev, S. (2005). *Preparation for European Kangaroo*. Sofia: UBM. (ISBN 954-8880-20-2), 220 pages (in Bulgarian).
- Grozdev, S. (2007). *For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*. Sofia: ADE. (ISBN 978-954-92139-1-1), 295 pages.
- Grozdev, S. (2012). Telescopic sums. *Mathematics Plus*, 3, 12–15 (ISSN 0861-8321). (In Bulgarian).
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015). Schur's inequality and applications. *Mathematical Journal Numerus*, Skopje, 1 – 6. (In Macedonian).
- Grozdev, S. & V. Nenkov (2015-a). Two elementary inequalities and their application. *Mathematical Journal Numerus*, Skopje, 13 – 17. (In Macedonian).
- Nikolaev, R. (2016). Several mathematical models for optimization of the tools in supporting small and medium enterprises. *Mathematics Plus* 1, 42 – 49. (In Bulgarian).

Grozdev, S. & V. Nenkov (2017). A note on the theorem of the power averages and the educational character of the Olympiads. *Mathematics and Informatics*, 2 (60), 202 – 206. (In Bulgarian).

AN APPLICATION OF THE RELATION BETWEEN ARITHMETIC MEAN AND GEOMETRIC MEAN FOR RATIONAL PROVING SOME INEQUALITIES

Abstract. In the present paper an idea for proving particular inequalities is revealed using the well-known relation between arithmetic mean and geometric mean. Methodologically the proposed inequalities are also solved in different ways by using alternative approaches – by mathematical induction or by exploring functions so that the level of difficulty and rationality of different solutions may be easily compared.

✉ **Dr. Radan Miryanov, Assist. Prof.; Dr. Jordan Petkov, Assist. Prof.**

University of Economics – Varna
77, “Kniaz Boris I” Blvd.
9002 Varna, Bulgaria

E-mail: miryanov@ue-varna.bg; jr_petkov@ue-varna.bg